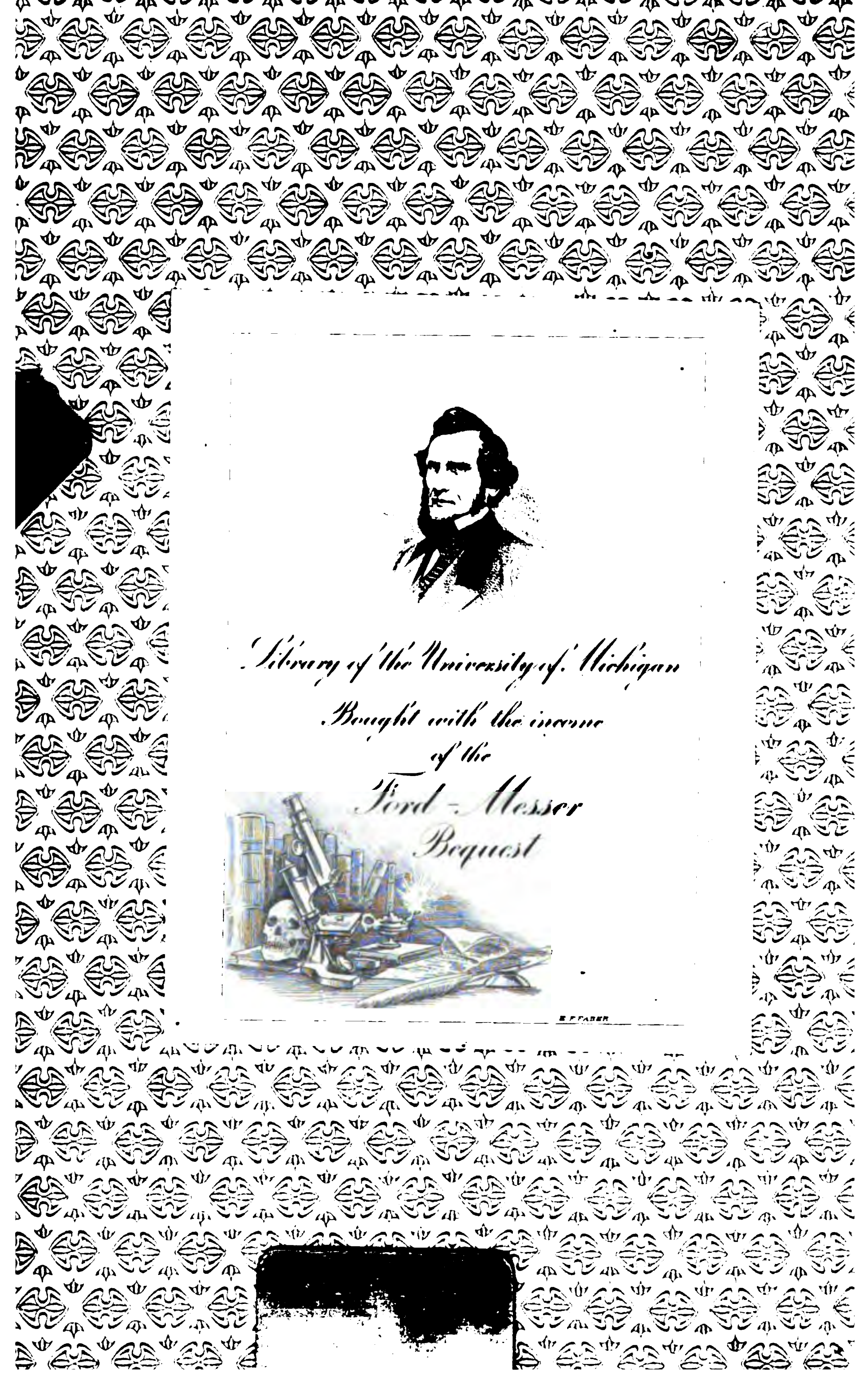
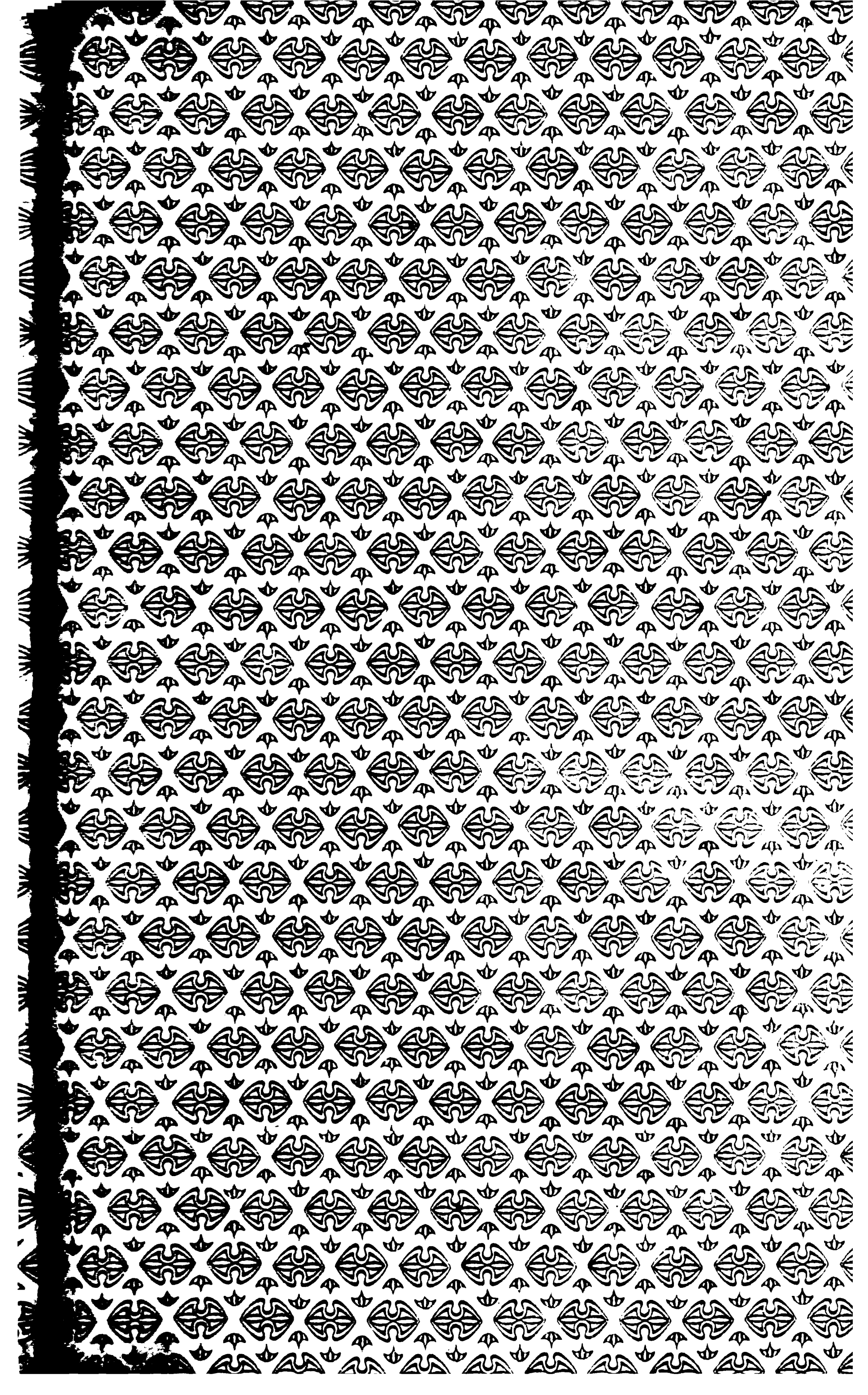
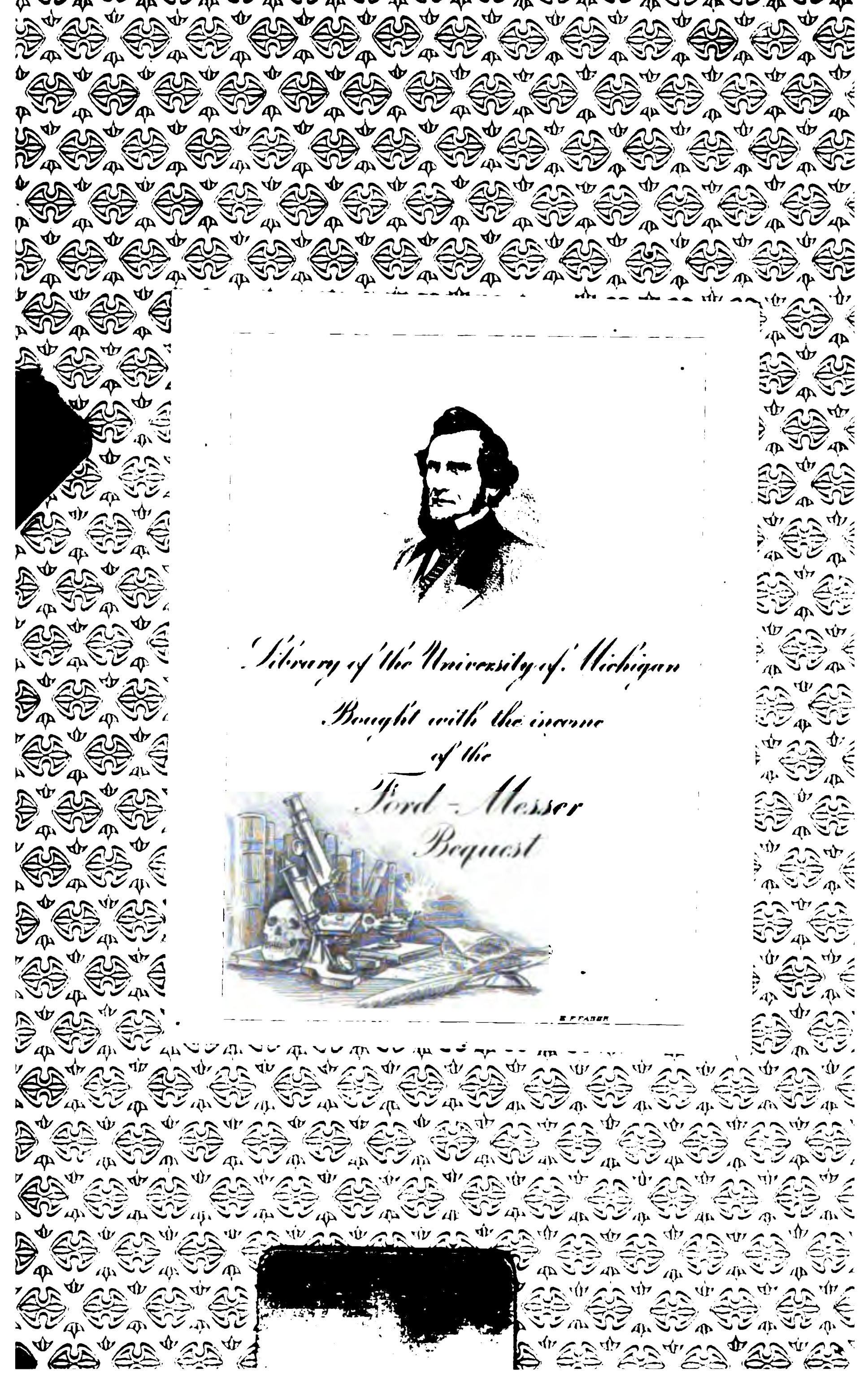
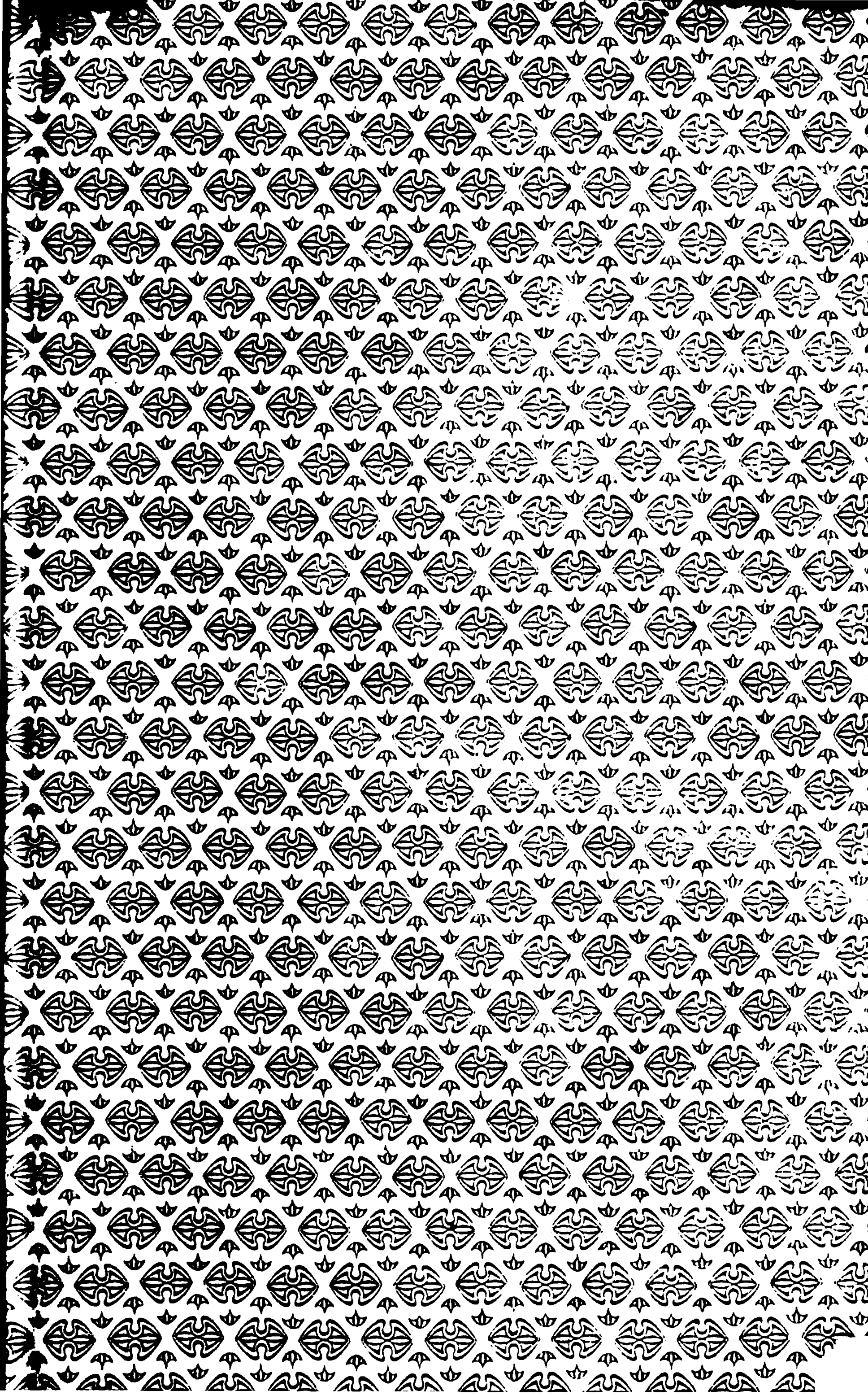

Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest




Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford-Messer
Bequest



MÉMOIRES COURONNÉS

ET

AUTRES MÉMOIRES.

MÉMOIRES COURONNÉS

ET

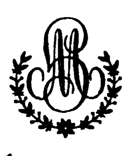
AUTRES MÉMOIRES,

PUBLIÉS PAR

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES, DES LETTRES ET DES BEAUX-ARTS DE BELGIQUE.

COLLECTION IN-8°. — TOME XV.



BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

Juillet 1863.

EXPOSÉ GÉOMÉTRIQUE

DU

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

TROISIÈME PARTIE [1],

COMPRENANT

LES APPLICATIONS DU CALCUL DIFFÉRENTIEL A L'ANALYSE
ET A LA GÉOMÉTRIE;

PAR

Ernest LAMARLE,

Ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'Université de Gand,
associé de l'Académie royale de Belgique.

(*Présenté à l'Académie, dans la séance du 8 novembre 1862.*)

[1] Voyez tome XI des Mémoires in 8°.

AVERTISSEMENT.

Le lecteur qui serait déjà initié au calcul différentiel et qui voudrait comparer aux méthodes ordinaires celle qu'on a suivie dans cet ouvrage, doit s'attacher plus particulièrement aux théories et solutions géométriques que la deuxième série présente en très-grand nombre. L'introduction et la table des matières peuvent servir de guides dans le choix à faire pour établir cette comparaison.

INTRODUCTION.

Les deux premières parties de cet ouvrage ont été publiées en 1861. Dans l'une sont exposés les principes généraux de la cinématique pure, dans l'autre, et comme déductions de ces principes, les règles de la différentiation. La troisième partie a pour objet les applications du calcul différentiel à l'analyse et à la géométrie. Elle se divise en deux séries distinctes.

La première série comprend les applications à l'analyse; elle s'écarte, en général, des errements ordinaires, et notamment dans les points suivants :

1° Les différentielles empruntent à leur définition géométrique un sens précis qui les assimile aux autres variables, et ne leur laisse ainsi rien de mystérieux ni d'obscur;

2° Les signes auxquels on reconnaît le cours des fonctions et leurs valeurs *maxima* ou *minima* se déterminent par la considération directe des différentielles;

3° L'égalité établie entre l'accroissement de la fonction et le produit de l'accroissement de la variable par la *valeur moyenne* de la fonction dérivée ouvre une voie nouvelle et facile. Elle permet d'attribuer, dès l'abord, un sens précis aux quadratures, et d'effectuer, sous forme d'identités, les développements des différences de tous les ordres;

4° Un chapitre spécial traite de la continuité dans ses rapports avec la convergence des séries de Taylor et de Maclaurin. Il est complété par deux notes placées à la suite de la première série.

La deuxième série comprend les applications du calcul diffé-

rentiel à la géométrie. Elle ne présente, pour ainsi dire, aucun point qui ne soit traité directement, par voie géométrique, et qui ne doive à l'emploi de ce procédé un certain degré d'élucidation. La simplicité des déductions se prêtait ici à plus de développements et d'extension que n'en comportent, en général, les traités élémentaires. Nous en avons profité pour faire ressortir, autant qu'il dépendait de nous, les avantages et les ressources que notre méthode peut offrir sans autre auxiliaire que la géométrie et la cinématique.

Les sept premiers chapitres traitent des lignes planes, le huitième des lignes à double courbure, les cinq suivants des surfaces, le dernier de la mesure des lignes, des aires et des solides.

Nous avons déjà dit et fait voir qu'en géométrie plane notre méthode met à la portée des commençants la théorie des contacts de tous les ordres et leur offre, comme moyens de solution, les procédés simples et rigoureux de la géométrie élémentaire [1]. Le complément exigé pour généraliser et faciliter au besoin les applications se trouve dans les sept premiers chapitres. Le huitième étend aux lignes à double courbure les théories établies d'abord pour les courbes planes. On n'y rencontre aucune difficulté particulière. La définition géométrique du plan osculateur suffit pour aplanir la voie déjà ouverte, et l'on n'a plus qu'à poursuivre.

Le chapitre IX s'applique à la génération des surfaces et à la détermination du plan tangent. On y voit pourquoi ce plan contient, en général, toutes les tangentes. On le voit, disons-nous, parce que le fait surgit de lui-même, comme conséquence directe de la génération continue des surfaces, et qu'il s'établit géométriquement avec évidence et rigueur.

Le chapitre X est relatif à la courbure des surfaces. On sait et l'on démontre par le calcul qu'il existe généralement en chaque point d'une surface *deux sections principales* rectangulaires. Pourquoi ces sections sont-elles à angle droit l'une sur l'autre? Pourquoi leur nombre se réduit-il à deux? Tout esprit curieux d'aller au fond des choses, et de saisir dans les faits leur raison d'être se

[1] Voir l'introduction placée en tête des deux parties publiées en 1861.

pose naturellement ces questions. On peut y répondre, avec nous, sans sortir de la voie purement géométrique. La propriété du plan tangent sert de point de départ : les autres s'en déduisent d'une façon tout élémentaire. C'est ainsi que nous avons pu reproduire sans calcul les principaux théorèmes concernant la courbure des surfaces et y ajouter quelques résultats nouveaux.

Le chapitre XI donne les applications générales du chapitre X.

Le chapitre XII a pour objet la théorie géométrique des lignes géodésiques. Après avoir développé cette théorie, nous l'appliquons à plusieurs cas, les uns généraux, les autres particuliers. Nous citerons, pour exemple, la question des lignes et des surfaces *minima*. Le procédé suivi met en évidence la raison fondamentale qui détermine la nature de ces lignes et de ces surfaces. C'est là, comme ailleurs, un des avantages principaux de notre méthode. Elle élucide les questions qu'elle résout.

Le chapitre XIII contient la théorie géométrique des surfaces qui peuvent s'appliquer les unes sur les autres sans déchirure ni duplicature. Il permet de transporter dans les éléments des questions réservées jusqu'ici au domaine des mathématiques supérieures.

Le chapitre XIV est le dernier. Il traite des rectifications et des quadratures dans l'espace ainsi que des cubatures. La marche suivie nous a conduit d'elle-même à quelques énoncés nouveaux, tels que celui-ci par exemple :

Toute aire engendrée par une ligne, tout solide engendré par une surface a pour différentielle le produit de la grandeur génératrice par sa vitesse moyenne de circulation.

Ce théorème comprend celui de Guldin comme cas particulier. C'est à lui que nous devons d'avoir pu résoudre par voie géométrique la question des lignes et des surfaces *minima* mentionnée ci-dessus.

Les formules du chapitre XIV comportent une extension générale au cas où les grandeurs à déterminer sont données comme limites de certaines sommes. C'est par là que nous terminons, de

manière à frayer la voie pour toute la série des applications aux phénomènes naturels.

Les parties suivantes auront pour objet les éléments du calcul intégral, du calcul des différences et du calcul des variations. Nous compléterons le tout en montrant comment on peut passer de notre méthode aux autres, les embrasser toutes dans une même conception rationnelle, et, sans en exclure aucune, combiner leur emploi de façon à remplir le mieux possible l'objet qu'on se propose en chaque cas particulier.

EXPOSÉ GÉOMÉTRIQUE

DU

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

TROISIEME PARTIE.

APPLICATIONS GÉNÉRALES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PREMIÈRE SÉRIE.

APPLICATIONS ANALYTIQUES.

CHAPITRE Ier.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX CONCERNANT LES FONCTIONS, LEURS DIFFÉRENTIELLES ET LEURS DÉRIVÉES SUCCESSIVES.

Des signes auxquels on reconnaît la marche d'une fonction.

1. Reportons-nous aux principes fondamentaux du calcul différentiel et représentons par z une grandeur quelconque supposée continûment variable. Nous avons les énoncés suivants pris pour définitions et déductions premières *.

La différentielle $\dot{z}$ *ou* dz *est la vitesse du point qui décrit le*

* Voir au besoin la première partie de cet ouvrage pages 93, 94 et 95.

segment de droite substitué comme équivalent numérique à la grandeur z.

La vitesse $\dot{z}$ n'est pas nulle en général : elle est positive ou négative selon que la grandeur z croît ou décroît.

De là résultent évidemment les conséquences suivantes :

1° *Lorsqu'une grandeur varie continûment elle croît ou décroît selon que sa différentielle est positive ou négative.*

2° *Lorsqu'une grandeur continue s'annule, le signe qu'elle prend, au sortir de zéro, est celui de sa différentielle.*

Supposons que la grandeur considérée comme variant, à partir de zéro, soit la différentielle première d'une grandeur quelconque continûment variable; supposons en outre qu'il y ait annulation simultanée de toutes les différentielles successives, jusques et y compris celle de l'ordre $(n-1)$. Les déductions qui précèdent impliquent, comme conséquence immédiate, la règle suivante :

Règle générale. — *Lorsqu'une grandeur varie continûment, elle croît ou décroît selon que sa différentielle première est positive ou négative. Si cette différentielle est nulle à l'origine de la variation que l'on considère, le signe qu'elle prend au sortir de zéro est celui de la première des différentielles successives qui ne s'annule pas à cette même origine.*

2. Soit une fonction quelconque, supposée continue *,

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = f(x).$$

La variable x et la fonction y variant toutes deux simultanément, on dit de la fonction qu'elle est *croissante* lorsqu'elle croît ou décroît en même temps que la variable. On la dit *décroissante* lorsqu'elle croît en même temps que la variable décroît, ou inversement. Cela revient à dire que la fonction est *croissante* dans le cas où les vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$ sont de même signe et qu'elle est *décroissante* dans le cas contraire.

* Le lecteur ne doit pas oublier qu'à moins de mention contraire, il est toujours entendu que la continuité subsiste.

Cela posé, on a généralement,

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \dot{y} = \dot{x} \,.\, f'(x).$$

Il s'ensuit que les vitesse $\dot{x}$, $\dot{y}$ sont ou non de même signe selon que la dérivée $f'(x)$ est positive ou négative. Ce résultat peut s'énoncer comme il suit :

Le signe de la dérivée indique, en général, la marche de la fonction, celle-ci étant croissante ou décroissante, selon que la dérivée est positive ou négative.

Un cas échappe à la règle qui vient d'être établie : c'est celui où la dérivée s'annule *. Examinons ce cas et, pour plus de généralité, supposons qu'une même valeur de la variable x annule en même temps toutes les dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, etc., jusques et y compris celle de l'ordre $n-1$. Soit a cette valeur : si on la substitue à x dans les expressions générales des différentielles successives dy, d^2y, ... $d^{n-1}y$, d^ny, il est aisé de voir qu'elle les annule toutes, la dernière exceptée, et que celle-ci se réduit à la forme très-simple

$$d^ny = \dot{x}^n f^n(a) \text{ **}.$$

* Pour ramener à ce cas celui où la dérivée se présente sous la forme $\frac{1}{0}$, il suffit de reprendre l'équation $y = f(x)$, de résoudre cette équation par rapport à x et de poser, en conséquence,

$$x = F(y).$$

De là résulte

$$\dot{x} = \dot{y} \,.\, F'(y),$$

et eu égard à l'équation (2) du présent numéro,

$$F'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

On a donc en même temps

$$f'(x) = \frac{1}{0} \quad \text{et} \quad F'(y) = o.$$

Il s'ensuit qu'en opérant sur les deux équations simultanées

$$x = F(y), \quad \dot{x} = \dot{y}\, F'(y),$$

tout se ramène au cas traité ci-dessus dans le texte.

** Voir au besoin les formules établies dans la deuxième partie de cet ouvrage,

Appliquons ici la règle générale établie au n° 1. La dérivée $f^n(x)$ étant supposée continue dans le voisinage de la valeur $x = a$, en deçà comme au delà, il s'ensuit que le signe affecté par la vitesse $\dot{y}$ au sortir de zéro est celui du produit $\dot{x}^n . f^n(a)$. Cela posé, voici les conséquences :

1° Lorsque n est impair, selon que la dérivée $f^n(a)$ est positive ou négative, les vitesses $\dot{y}, \dot{x}$ sont de même signe ou de signe contraire. On voit donc qu'en ce cas la fonction croît ou décroît selon que la dérivée $f^n(a)$ est plus grande ou plus petite que zéro.

2° Lorsque n est pair, selon que la dérivée $f^n(a)$ est positive ou négative, les vitesses $\dot{y}, \dot{x}$ sont de même signe pour $\dot{x} > o$ et de signe contraire pour $\dot{x} < o$, ou inversement, c'est-à-dire de même signe pour $\dot{x} < o$ et de signe contraire pour $\dot{x} > o$. Dans le premier cas, c'est en décroissant que la fonction parvient à la valeur $f(a)$ et c'est en croissant qu'elle s'écarte de cette valeur après l'avoir atteinte. Moindre à la fois que celles qui la précèdent et la suivent immédiatement, la valeur dont il s'agit se distingue des autres et prend le nom de *valeur minima*. Dans le second cas, c'est en croissant que la fonction parvient à la valeur $f(a)$ et c'est en décroissant qu'elle s'écarte de cette valeur après l'avoir atteinte. Plus grande à la fois que celles qui la précèdent et la suivent immédiatement, la valeur dont il s'agit se distingue des autres et prend le nom de *valeur maxima*.

Les résultats que nous venons d'établir peuvent se résumer comme il suit :

RÈGLE GÉNÉRALE. — *La marche de la fonction est indiquée par le signe et le rang de la première des dérivées successives qui ne s'évanouit point.*

Cette dérivée est-elle de rang impair? selon qu'elle est positive ou négative, la fonction est croissante ou décroissante.

Est-elle de rang pair? selon qu'elle est positive ou négative la valeur de la fonction est une valeur minima *ou une valeur* maxima.

n° 30, pages 134 et 135. L'extension que ces formules comportent est en quelque sorte évidente.

De l'égalité qui subsiste entre l'accroissement d'une fonction et le produit de l'accroissement de la variable par la valeur moyenne de la fonction dérivée.

3. Soit

(1) . . . . $y = f(x)$

une fonction quelconque supposée continue.

On a généralement

(2) . . . . $\dot{y} = \dot{x} \,.\, f'(x)$.

Supposons la vitesse $\dot{x}$ constante et considérons deux accroissements quelconques simultanés Δx, Δy.

Si la dérivée $f'(x)$ demeurait invariable, la vitesse $\dot{y}$ serait constante comme la vitesse $\dot{x}$ et l'on aurait

(3) . . . . $\Delta y = f'(x) \,.\, \Delta x$ *.

L'équation (3) ne subsiste point en général, vu que la dérivée $f'(x)$ varie incessamment avec x et qu'il en est de même de la vitesse $\dot{y}$.

Supposons que la dérivée $f'(x)$ soit continûment croissante dans l'intervalle Δx. La vitesse $\dot{y}$ restera comprise entre les valeurs extrêmes $\dot{x} \,.\, f'(x)$ et $\dot{x} \,.\, f'(x + \Delta x)$. On aura donc en même temps :

(4) . . . . $\Delta y > f'(x) \,.\, \Delta x$

et

(5) . . . . . . $\Delta y < f'(x + \Delta x) \,.\, \Delta x$.

Divisons l'intervalle Δx en n parties égales et désignons par h l'une de ces parties, par Δy_1, Δy_2, etc., les accroissements partiels

* Voir au besoin la deuxième partie de cet ouvrage, n° 3, page 93, règle 4.

successifs qui leur correspondent. On a d'abord, conformément à l'inégalité (4),

$$\Delta y_1 > h \,.\, f'(x),$$

$$\Delta y_2 > h \,.\, f'(x+h),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\Delta y_n > h \,.\, f'(x+(n-1)\,h).$$

et, conséquemment,

$$(6) \quad \Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \text{etc.} > h \left\{ \begin{array}{l} f'(x) + f'(x+h) + \text{etc.} \\ + f'(x+(n-1)\,h.) \end{array} \right\}$$

On a de même

$$\Delta y_1 < h \,.\, f'(x+h),$$

$$\Delta y_2 < h \,.\, f'(x+2h),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\Delta y_n < h \,.\, f'(x+nh),$$

et, par conséquent,

$$(7) \quad \Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \text{etc.} < h \left\{ \begin{array}{l} f'(x+h) + f'(x+2h) + \text{etc.} \\ + f'(x+nh). \end{array} \right\}$$

La différence que présentent les derniers membres des inégalités (6) et (7) ayant pour expression

$$h \,.\, [f'(x+nh) - f'(x)],$$

il s'ensuit qu'on peut écrire

$$\begin{array}{l} \Delta y = h\,[f'(x) + f'(x+h) + \text{etc.} + f'(x+(n-1)\,h)] \\ \quad + \mu h\,[f'(x+nh) - f'(x)]. \end{array}$$

μ étant une quantité comprise entre 0 et 1.

Remplaçons h par sa valeur $\frac{\Delta x}{n}$ et divisons par Δx. Il vient

$$(8) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f'(x) + f'(x+h) + \text{etc.} + f'(x+(n-1)h)}{n} + \mu \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{n}.$$

Cela posé, imaginons que, sans rien changer à l'intervalle Δx, ni par conséquent à l'accroissement Δy, l'on augmente indéfiniment le nombre n, qui marque en combien de parties égales l'intervalle Δx est subdivisé. L'équation (8) subsistera toujours, et, puisque le premier membre de cette équation demeure invariable, les deux termes qui figurent dans le second devront former ensemble une somme constante. Or, à mesure que n est pris de plus en plus grand, l'un de ces termes devient aussi petit qu'on veut : il faut donc que, dans les mêmes circonstances, l'autre se rapproche indéfiniment de la limite fixe exprimée par leur somme. Mais, d'un autre côté, ce terme est la moyenne arithmétique des valeurs que la dérivée $f'(x)$ affecte à l'origine de chacune des subdivisions introduites dans l'intervalle Δx. Si donc on représente par le symbole $M_x^{x+\Delta x} f'(x)$ la limite vers laquelle cette moyenne converge à mesure que le nombre n croît indéfiniment, il s'ensuit qu'il y a identité entre les deux limites $M_x^{x+\Delta x} f'(x)$ et $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. On peut écrire, en conséquence,

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \Delta y = \Delta x \,.\, M_x^{x+\Delta x}.f'(x).$$

Désignons sous le nom de *valeur moyenne* de la dérivée la quantité représentée par le symbole $M_x^{x+\Delta x} f'(x)$. L'équation (9) a pour traduction le théorème suivant :

L'accroissement de la fonction est égal au produit de l'accroissement de la variable par la valeur moyenne de la fonction dérivée.

4. Nous avons supposé que la dérivée $f'(x)$ était constamment croissante dans l'intervalle Δx. La démonstration qui précède s'applique de la même manière au cas où la dérivée serait constamment décroissante. Le résultat formulé ci-dessus est d'ailleurs tout à fait général, ainsi qu'on va le voir.

Reportons-nous aux inégalités (4) et (5) du n° 3, page 15. Elles se résument en une équation de la forme

$$\Delta y = \Delta x \left[f'(x) + \mu \left(f'(x + \Delta x) - f'(x) \right) \right],$$

μ étant une quantité comprise entre 0 et 1.

Supposons que la dérivée $f'(x)$ soit continue à partir de la valeur x prise pour origine de l'intervalle Δx. Si cet intervalle est suffisamment petit et qu'il ne fasse plus que décroître, il est visible que la différence $f'(x + \Delta x) - f'(x)$ converge nécessairement vers zéro. On peut donc écrire en général

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta y = \Delta x \, . \left[f'(x) + \eta \right],$$

η étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx.

Divisons l'intervalle Δx en n parties égales et désignons par h l'une de ces parties. A chacune des subdivisions représentées par h correspond un accroissement de la fonction, et cet accroissement est déterminé par les valeurs particulières que les quantités $f'(x)$ et η affectent à son origine. On a ainsi

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta y_1 = h \left[f'(x) + \eta_1 \right], \\ \Delta y_2 = h \left[f'(x + h) + \eta_2 \right], \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \Delta y_n = h \left[f'(x + (n - 1)\, h) + \eta_n \right]. \end{array} \right.$$

Or, la somme des différences Δy_1, Δy_2, etc., Δy_n est nécessairement égale à l'accroissement total Δy : il vient donc, en

ajoutant, membre à membre, les équations (2), et divisant de part et d'autre, par Δx

$$(3) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f'(x) + f'(x+h) + \text{etc.} + f'(x+(n-1)h)}{n} + \frac{\eta_1 + \eta_2 + \text{etc.} + \eta_n}{n}.$$

Imaginons qu'on attribue à n des valeurs de plus en plus grandes. Chacune des quantités η_1, η_2, etc., converge alors vers zéro et il en est de même de leur moyenne arithmétique. Concluons que l'équation (3) remplit les mêmes conditions que l'équation (8) du n° 3 et qu'elle implique, comme conséquence, la même équation finale,

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \Delta y = \Delta x \, \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x).$$

Lorsque la continuité subsiste, la valeur $\mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x)$ coïncide nécessairement avec une des valeurs que la dérivée $f'(x)$ prend dans l'intervalle Δx. On peut donc écrire

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \Delta y = \Delta x \,.\, f'(x + \theta \Delta x),$$

θ étant une quantité qui dépend, en général, de x et de Δx, et qui reste comprise entre 0 et 1.

On pourrait croire, au premier abord, que l'équation (4) est restreinte au cas où la dérivée $f'(x)$ ne cesse pas d'être continue dans l'intervalle Δx. *Ce serait une erreur.* Pour que cette équation subsiste, *il faut et il suffit* que la fonction $y = f(x)$ demeure continue dans l'intervalle que l'on considère. Un exemple suffira pour éclaircir ce point *.

* Si l'on voulait étendre à tous les cas possibles la solution donnée dans le texte pour le cas particulier où la dérivée $f'(x)$ ne cesse d'être continue qu'à l'extrémité de l'intervalle Δx, on observerait d'abord que si cet intervalle est subdivisé en une suite de parties représentées par Δx_1, Δx_2, Δx_3, etc., on a généralement

$$\mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x) = \frac{\Delta x_1 \mathrm{M}_x^{x_1} f'(x) + \Delta x_2 \mathrm{M}_{x_1}^{x_2} f'(x) + \Delta x_3 \mathrm{M}_{x_2}^{x_3} f'(x) + \text{etc.}}{\Delta x};$$

le reste s'achèverait ensuite sans aucune difficulté.

Supposons que la dérivée $f'(x)$ soit indéfiniment croissante vers la fin de l'intervalle Δx et qu'en conséquence la valeur extrême $f'(x + \Delta x)$ se présente sous la forme $\frac{A}{0}$. *Par hypothèse, la fonction* y *demeure continue.*

Divisons l'intervalle Δx en n parties égales et désignons par h l'une de ces parties. On peut écrire, conformément aux déductions précédentes,

$$\Delta y = (\Delta x - h)\, M_x^{x+(n-1)h} f'(x) + f(x + nh) - f(x + (n-1)h),$$

et divisant par Δx ou son égal nh

$$(6)\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(1 - \frac{h}{n}\right) M_x^{x+\frac{n-1}{n}\Delta x} f'(x) + \frac{f(x + \Delta x) - f(x + \Delta x - h)}{\Delta x}.$$

Par hypothèse, la différence $f(x + \Delta x) - f(x + \Delta x - h)$ converge vers zéro à mesure que le nombre n est pris de plus en plus grand. Il s'ensuit que l'équation (6) remplit les mêmes conditions que l'équation (8) du n° 3 et qu'en conséquence elle ne cesse point d'impliquer, comme tout à l'heure, la même équation finale :

$$(7)\quad \ldots\ldots\quad \Delta y = \Delta x\, M_x^{x+\Delta x} f'(x).$$

L'équation (7) subsiste, ainsi qu'on le voit, sous la seule condition que la fonction y soit et demeure continue dans l'intervalle Δx. Elle comporte en outre une extension qu'il convient d'indiquer. Imaginons qu'à la valeur x_1 comprise dans l'intervalle Δx correspondent, pour y, deux valeurs distinctes qui se rattachent, respectivement et par voie de continuité, l'une à celles qui précèdent, l'autre à celles qui suivent immédiatement. Si l'on représente par δy_1 l'accroissement brusque subi par la fonction y dans le passage de la première à la seconde de ces deux valeurs, il est aisé de voir que, sans rien changer à ce qui précède, on a nécessairement

$$\Delta y = \Delta x\, M_x^{x+\Delta x} f'(x) + \delta y_1.$$

On aurait de même pour le cas de plusieurs changements

brusques subis par la fonction y dans l'intervalle Δx et représentés par les symboles δy_1, δy_2, δy_3, etc.,

$$\Delta y = \Delta x \, \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x) + \delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3 + \text{etc.}$$

5. **Lorsqu'on part d'une fonction connue $y = f(x)$ et qu'on se propose de déterminer la valeur moyenne que la dérivée $f'(x)$ affecte dans un intervalle quelconque Δx, on peut d'abord déterminer l'accroissement Δy, en posant**

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Il vient ensuite,

$$\mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

et la question se trouve ainsi résolue.

Lorsque la grandeur donnée est la dérivée $f'(x)$ et qu'on veut calculer directement sa valeur moyenne, on a rigoureusement

$$\mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x) = \lim. \frac{f'(x) + f'\left(x + \frac{\Delta x}{n}\right) + \text{etc.} + f'\left(x + \frac{n-1}{n}\Delta x\right)}{n = \infty},$$

et, par approximation,

$$\mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x) = \frac{f'(x) + f'\left(x + \frac{\Delta x}{n}\right) + \text{etc.} + f'\left(x + \frac{n-1}{n}\Delta x\right)}{n},$$

l'erreur commise diminuant à mesure que n augmente et restant toujours moindre que la quantité

$$\frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{n}.$$

En exprimant, par cette quantité, la limite supérieure de l'erreur commise, on suppose, comme au n° 3, que la dérivée $f'(x)$ est toujours croissante ou toujours décroissante dans l'intervalle

Δx. S'il en était autrement, on pourrait subdiviser l'intervalle Δx en parties qui satisferaient toutes à la condition précédente et pour chacune desquelles on appliquerait successivement le procédé qui vient d'être décrit.

On verra plus loin comment le calcul numérique de la quantité $M_x^{x+\Delta x} f(x)$ peut s'effectuer, par voie de développement, dans le cas où les dérivées successives $f''(x)$, $f'''(x)$, etc., sont et demeurent continues.

Du développement des fonctions par voie d'identités.

6. Soient $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$,... $f^n(x)$ une suite de termes déduits les uns des autres par des dérivations successives et supposés continus entre deux limites quelconques, l'une variable et représentée par x, l'autre constante et représentée par $z = x + \Delta x$.

La quantité z étant quelconque mais constante, considérons la fonction composée

$$(1) \quad \varphi(x) = (z - x) f'(x) + \frac{(z-x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \text{etc.} + \frac{(z-x)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^n(x).$$

Cette fonction a pour dérivée première

$$\varphi'(x) = (z - x) f''(x) + \text{etc.} + \frac{(z-x)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{n+1}(x)$$
$$- f'(x) - (z-x) f''(x) - \text{etc.} - \frac{(z-x)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot (n-1} f^n(x),$$

ce qui donne, toute réduction faite,

$$(2) \quad \ldots \quad \varphi'(x) = \frac{(z-x)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{n+1}(x) - f'(x).$$

On a d'ailleurs, conformément au théorème des n°s 3 et 4,

$$(3) \quad \ldots \quad \varphi(z) - \varphi(x) = (z - x) M_x^z \varphi'(x),$$

et il y a lieu d'observer que la fonction $\varphi(z)$ se réduit à zéro en vertu de l'équation (1).

La combinaison des équations (1), (2), (3) donne, ainsi qu'on le voit aisément, la relation générale

$$(4)\quad \mathrm{M}_x^z f'(x) = f'(x) + \frac{z-x}{1\,.\,2} f''(x) + \text{etc.} + \frac{(z-x)^{n-1}}{1\,.\,2\,..\,n} f^n(x) + \frac{1}{1\,.\,2\,..\,n} \mathrm{M}_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x),$$

et cette relation subsiste alors même que la dérivée de l'ordre $n+1, f^{n+1}(x)$, ne satisfait pas, comme les précédentes, à la condition de continuité.

Soit p un nombre entier compris dans la suite $1, 2\,..\,n$; si dans l'équation (4) on remplace successivement n par $p-1$ et par p, la comparaison des résultats obtenus fournit l'équation générale,

$$(5)\quad \mathrm{M}_x^z (z-x)^{p-1} f^p(x) = \frac{(z-x)^{p-1}}{p} f^p(x) + \frac{1}{p} \mathrm{M}_x^z (z-x)^p f^{p+1}(x)$$

et pour $p=1$, ce qui revient à poser $n=1$ dans l'équation (4),

$$(6)\quad \ldots\quad \mathrm{M}_x^z f'(x) = f'(x) + \mathrm{M}_x^z (z-x) f''(x).$$

Transportons cette valeur dans l'équation fondamentale

$$(7)\quad \ldots\ldots\quad \Delta y = \Delta x\,.\,\mathrm{M}_x^z f'(x),$$

il vient

$$(8)\quad \ldots\quad \Delta y = \Delta x\,.\,[f'(x) + \mathrm{M}_x^z (z-x) f''(x)].$$

Si l'on compare cette dernière formule à la formule (1) du n° 4

$$(9)\quad \ldots\ldots\quad \Delta y = \Delta x\,[f'(x) + \eta],$$

On reconnaît que la fonction inconnue désignée par η se trouve complétement déterminée pour tout intervalle où la fonction et sa

dérivée $f'(x)$ demeurent continues. La relation très-simple et purement algébrique

$$y = \mathrm{M}_x^z (z - x) f''(x)$$

complète d'une façon satisfaisante le sens de l'équation (9).

7. Reprenons l'équation (7) du n° 6. Substituons à Δx, $z - x$; à Δy, $f(z) - f(x)$; et à $\mathrm{M}_x^z f'(x)$, le développement fourni par l'équation (4); le résultat conduit à l'énoncé suivant :

Théorème. — *La fonction quelconque* y = f(x) *et ses dérivées successives* f'(x), f''(x), ... fⁿ(x), *étant continues entre les deux limites* x *et* z, *l'on a identiquement*

$$(1)\ .\ f(z) = f(x) + (z - x) f'(x) + \frac{(z - x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \text{etc.}$$

$$+ \frac{(z - x)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^n(x) + \frac{z - x}{1 \cdot 2 \ldots n} \mathrm{M}_x^z (z - x)^n f^{n+1}(x).$$

Lorsque la dérivée de l'ordre $n + 1$ est constante, les dérivées suivantes sont toutes nulles. On peut alors écrire le dernier terme de l'équation (1), soit en lui conservant sa forme actuelle

$$(2)\ \ldots\ \frac{z - x}{1 \cdot 2 \ldots n} \mathrm{M}_x^z (z - x)^n f^{n+1}(x),$$

soit en lui attribuant celle qui résulte de la loi de formation des termes antérieurs

$$(3)\ \ldots\ \frac{(z - x)^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n + 1)} f^{n+1}(x).$$

Égalons les expressions (2) et (3) dont la forme seule peut-être différente. Observons que, par hypothèse, la dérivée $f^{n+1}(x)$ est

constante et supprimons les facteurs communs. On trouve ainsi,

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad M_x^z (z-x)^n = \frac{(z-x)^n}{n+1} \text{*}.$$

Supposons la dérivée $f^{n+1}(x)$ continûment variable entre les limites x et z; il s'ensuit qu'il existe une valeur intermédiaire, représentée par $x+\theta(z-x)$, et satisfaisant à la condition

$$[z-(x+\theta(z-x))]^n f^{n+1}[x+\theta(z-x)] = M_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x).$$

De là résulte, en premier lieu,

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \frac{z-x}{1.2..n} M_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x)$$
$$= \frac{(1-\theta)^n (z-x)^{n+1}}{1.2..n} f^{n+1}[x+\theta(z-x)],$$

θ étant une fraction.

Si, dans la même hypothèse, on désigne par A la moindre valeur affectée par la dérivée $f^{n+1}(x)$ dans l'intervalle $(z-x)$, on a, conformément à l'équation (4),

$$M_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x) > \frac{(z-x)^n}{n+1} A.$$

On trouverait de même en désignant par B la plus grande valeur affectée par la dérivée $f^{n+1}(x)$ dans l'intervalle $z-x$,

$$M_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x) < \frac{(z-x)^n}{n+1} B.$$

La conséquence est qu'il existe pour x une valeur intermé-

* Cette équation peut aussi s'écrire comme il suit :

$$M_0^{\Delta x} x^n = \frac{\Delta x^n}{n+1} \text{ ou } M_0^z x^n = \frac{x^n}{n+1}.$$

diaire représentée par $x + \theta(z - x)$ et satisfaisant à la condition

$$M_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x) = \frac{(z-x)^n}{n+1} f^{n+1}[x + \theta(z-x)].$$

De là donc résulte, en second lieu,

$$(6) \quad \ldots \quad \frac{z-x}{1.2\ldots n} M_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x) = \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{n+1}[x + \theta(z-x)],$$

θ étant, comme tout à l'heure, une quantité comprise entre 0 et 1.

En général on exprime le dernier terme de l'équation (1) par le second membre de l'une ou l'autre des égalités (5) ou (6). La première de ces trois formes est évidemment préférable, non pas seulement parce qu'elle implique chacune des deux autres, mais surtout parce qu'elle remplit les conditions suivantes :

1° *Elle supprime toute indétermination ;*

2° *Elle permet qu'on calcule la valeur du dernier terme avec tel degré d'approximation qu'on désire ;*

3° *Elle ne cesse pas d'exprimer la valeur de ce dernier terme alors même que la dérivée* $f^{n+1}(x)$ *cesse d'être continue dans l'intervalle* $z - x$.

Supposons qu'une même valeur particulière $x = a$ annule en même temps la fonction y et toutes ses dérivées successives, jusques et y compris celle de l'ordre n. Il est visible qu'en remplaçant d'abord x par a, puis ensuite z par x, les formules (1), (5), (6), se combinent de manière à fournir les équations suivantes :

$$(7) \quad . \quad f(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2..n} M_0^1 (1-u)^n f^{n+1}[a + u(x-a)],$$

$$(8) \quad . \quad f(x) = \frac{(1-\theta)^n (x-a)^{n+1}}{1.2..n} \cdot f^{n+1}[a + \theta(x-a)],$$

$$(9) \quad . \quad f(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2..(n+1)} \cdot f^{n+1}[a + \theta(x-a)].$$

On observera que le symbole $M_0^1(1-u)^n f^{n+1}[a+u(x-a)]$ exprime la moyenne arithmétique des valeurs affectées par le produit $(1-u)^n f^{n+1}[a+u(x-a)]$, lorsque la quantité u varie continûment entre 0 et 1, les quantités x et a étant considérées comme constantes.

Différences des ordres supérieurs. Moyennes multiples.

8. Soit une fonction continue

$$y=f(x).$$

Δx et Δy étant deux accroissements quelconques simultanés de la variable x et de la fonction y, on a d'abord

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

L'accroissement Δx étant supposé quelconque mais constant, prenons la différence des deux membres de l'équation (1) et désignons par $\Delta^2 y$ celle du premier, c'est-à-dire le changement subi par ce membre lorsque, dans le second, on remplace la variable x par $x+\Delta x$. Posons d'ailleurs

$$x+\Delta x=z.$$

Il vient

$$\Delta^2 y=\Delta\,[f(x+\Delta x)-f(x)],$$

et, conformément aux règles précédentes,

$$\Delta\,[f(x+\Delta x)-f(x)]=\Delta x\,M_x^z[f'(x+\Delta x)-f'(x)]=\Delta x\,M_x^z\,\Delta f'(x).$$

On a donc

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Delta^2 y=\Delta x\,M_x^z\,\Delta f'(x).$$

Si, d'ailleurs, on écrit

$$\Delta y=\Delta x\,M_x^z\,f'(x).$$

On a de même, en prenant la différence des deux membres,

(3) . . . . $\Delta^2 y = \Delta x \,.\, \Delta M_x^x f'(x).$

La comparaison des équations (2) et (3) donne

$$\Delta M_x^x f'(x) = M_x^x \,\Delta f'(x),$$

et de là résulte le théorème suivant :

La différence de la valeur moyenne d'une fonction est égale à la valeur moyenne de la différence de cette même fonction.

L'équation (3), lorsqu'on y remplace la différence $\Delta f'(x)$ par le produit égal $\Delta x . M_x^x f''(x)$, devient

(4) . . . . . . $\Delta^2 y = (\Delta x)^2 M_x^x \,.\, M_x^x f''(x).$

Opérons sur l'équation (4) comme nous l'avons fait sur l'équation (1) et, sans rien changer d'ailleurs, désignons par $\Delta^3 y$ la différence $\Delta . \Delta^2 y$. On a directement

$$\Delta^3 y = (\Delta x)^2 \,.\, \Delta \,.\, M_x^x \,.\, M_x^x f''(x),$$

et, eu égard au théorème formulé ci-dessus,

$$\Delta^3 y = (\Delta x)^2 \,.\, M_x^x \,.\, M_x^x \,\Delta f''(x).$$

Remplaçons $\Delta f''(x)$ par le produit égal $\Delta x . M_x^x f'''(x)$; il vient

(5) . . . . . $\Delta^3 y = (\Delta x)^3 \,.\, M_x^x \,.\, M_x^x \,.\, M_x^x f'''(x).$

Convenons de représenter par les notations $\overset{2}{M}$, $\overset{3}{M}$, etc., les *moyennes multiples* M . (M)., M . [M . (M)], etc. Il est visible que nous aurons en général

(6) . . . . . . $\Delta^n y = (\Delta x)^n \,.\, \overset{n}{M}{}_x^x f^n(x).$

Cette relation très-simple peut s'énoncer comme il suit :

La différence de l'ordre n *d'une fonction quelconque* $y=f(x)$ *est égale au produit de la puissance* n *de l'accroissement de la variable par la moyenne multiple* $\overset{n}{M} f^n(x)$.

Lorsque la dérivée de l'ordre n, $f^n(x)$, est constante, l'on a évidemment

$$\overset{1}{M} f^n(x) = \overset{2}{M} f^n(x) = \text{etc.} = \overset{n}{M} f^n(x) = f^n(x) = \text{cons}^{\text{te}} = C.$$

et, par suite,

$$\Delta^n y = C\,.(\Delta x)^n.$$

En général la dérivée $f^n(x)$ est une quantité variable avec x. Néanmoins, s'il y a continuité, il est aisé de voir que l'équation (6) est réductible à la forme

$$(7)\quad .\;.\;.\;.\;.\quad \Delta^n y = (\Delta x)^n\,[f^n(x) + \xi],$$

ξ étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx *.

Du développement de la différence $\Delta^n y$, *effectué à* priori *et par voie d'identité.*

9. Reprenons la formule établie ci-dessus

$$(1)\quad .\;.\;.\;.\;.\quad \Delta^n y = (\Delta x)^n\, \overset{n}{M}{}^z_a f^n(x),$$

et, pour éviter toute confusion, représentons par a la valeur assignée à x comme origine de l'intervalle Δx. On a identiquement

$$(2)\quad .\;.\;.\quad \overset{n}{M}{}^z_a f^n(x) = f^n(a) + \overset{n}{M}{}^z_a [f^n(x) - f^n(a)]$$
$$= f^n(a) + \overset{n}{M}{}^z_a (x-a)\, M^z_a f^{n+1}(x),$$

les limites entre lesquelles x varie étant a et $z = a + \Delta x$.

* On verra plus loin comment la quantité ξ se détermine.

De là résulte, en premier lieu,

$$(3) \quad . \quad . \; \Delta^n y = (\Delta x^n)\,[f^n(a) + \overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^z\,(x-a)\,\mathrm{M}_a^z\,f^{n+1}(x)].$$

Comparée à l'équation (7) du n° 8, l'équation (3) donne, en général,

$$\xi = \overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^z\,(x-a)\,\mathrm{M}_a^x\,f^{n+1}(x).$$

Poursuivons. On a, comme tout à l'heure,

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_a^x f^{n+1}(x) &= f^{n+1}(a) + \mathrm{M}_a^x\,[f^{n+1}(x) - f^{n+1}(a)] \\ &= f^{n+1}(a) + \mathrm{M}_a^x\,(x-a)\,\mathrm{M}_a^x\,f^{n+2}(x).\end{aligned}$$

Il vient donc, en second lieu,

$$\Delta^n y = (\Delta x)^n \left\{\begin{array}{l} f^n(a) + f^{n+1}(a)\,\overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^z\,(x-a) \\ + \overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^z\,(x-a)\,\mathrm{M}_a^x\,(x-a)\,\mathrm{M}_a^x\,f^{n+2}(x) \end{array}\right\}.$$

On trouverait de même,

$$(4) \quad \Delta^n y = (\Delta x)^n \left\{\begin{array}{l} f^n(a) + f^{n+1}(a)\,\overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^z\,(x-a) \\ + f^{n+2}(a)\,\overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^z\,(x-a)\,\mathrm{M}_a^x\,(x-a) \\ + \overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^z\,(x-a)\,\mathrm{M}_a^x\,(x-a)\,\mathrm{M}_a^x\,(x-a)\,\mathrm{M}_a^x\,f^{n+3}(x) \end{array}\right\},$$

et ainsi de suite indéfiniment.

Reportons-nous à la formule (4) du n° 7. Si l'on y remplace l'exposant n par l'exposant q, et la différence $z-x$ qui varie entre les limites o et $z-x$ par la différence $x-a$ supposée variable entre les limites o et $x-a$, elle donne, en général,

$$\mathrm{M}_a^x\,(x-a)^q = \frac{(x-a)^q}{q+1}.\,*$$

* Cette équation peut s'obtenir directement en procédant comme il suit. Posons

$$f(x) = \frac{(x-a)^{q+1}}{q+1}.$$

De là résulte

$$f'(x) = (x-a)^q,$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{M}_a^x\,(x-a)^q = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{(x-a)^q}{q+1}.$$

De là résulte, par voie de substitutions successives,

$$\mathrm{M}_a^x (x-a) = \frac{x-a}{2},$$

$$\mathrm{M}_a^x (x-a)\, \mathrm{M}_a^x (x-a) = \mathrm{M}_a^x \frac{(x-a)^2}{2} = \frac{(x-a)^2}{2.3},$$

$$\mathrm{M}_a^x (x-a)\, \mathrm{M}_a^x (x-a)\, \mathrm{M}_a^x (x-a) = \mathrm{M}_a^x \frac{(x-a)^3}{2.3} = \frac{(x-a)^3}{2.3.4},$$

et ainsi de suite. On peut donc écrire, comme conséquence immédiate de l'extension que l'équation (4) comporte,

$$(5) \quad . \quad . \quad \Delta^n y = \Delta x^n \left\{ \begin{array}{l} f^n(a) + f^{n+1}(a) \overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^x (x-a) \\ + f^{n+2}(a) \overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^x \dfrac{(x-a)^2}{1.2} + \text{etc.} \\ + f^{n+p-1}(a) . \overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^x \dfrac{(x-a)^{p-1}}{1.2..(p-1)} + \mathrm{R} \end{array} \right\},$$

le reste R étant déterminé par l'équation

$$(6) \quad \mathrm{R} = \overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^x (x-a) \mathrm{M}_a^x (x-a)\, \mathrm{M}_a^x (x-a) \ldots \mathrm{M}_a^x (x-a)\, \mathrm{M}_a^x f^{n+p}(x),$$

où le signe M_a^x et le facteur $(x-a)$ sont tous deux reproduits p fois.

Lorsque la dérivée $f^{n+p}(x)$ varie continûment dans l'intervalle Δx, il est aisé de voir, en opérant comme on l'a fait au n° 7, que l'on peut écrire

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{R} = f^{n+p}(x + \theta \Delta x)\, \overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^x \frac{(x-a)^p}{1.2..p},$$

θ étant une quantité comprise entre 0 et 1.

Cela posé, si l'on remarque que l'on a identiquement

$$\overset{n}{\mathrm{M}}{}_a^x (x-a)^q = \overset{n}{\mathrm{M}}{}_0^{\Delta x} x^q = (\Delta x)^q\, \overset{n}{\mathrm{M}}{}_0^1 x^q,$$

et qu'il est permis de remplacer par x la valeur quelconque a prise

pour origine de l'intervalle Δx, il est visible que la formule (5) revient à

$$(8) \quad . \quad \Delta^n y = (\Delta x)^n \left\{ \begin{array}{l} f^n(x) + f^{n+1}(x) \overset{n}{M}{}_0^{\Delta x} x + \text{etc.} \\ + \dfrac{f^{n+p-1}(x) \overset{n}{M}{}^{\Delta x} x^{p-1}}{1.2..(p-1)} \\ + \dfrac{f^{n+p}(x+\theta\Delta x)}{1.2..p} \overset{n}{M}{}_0^{\Delta x} x^p \end{array} \right\},$$

ou mieux encore à

$$(9) \quad . \quad \Delta^n y = (\Delta x)^n \left\{ \begin{array}{l} f^n(x) + \dfrac{\Delta x}{1} f^{n+1} x . \overset{n}{M}{}_0^1 x + \text{etc.} \\ + \dfrac{(\Delta x)^{p-1}}{1.2...(p-1)} f^{n+p-1}(x) . \overset{n}{M}{}_0^1 x^{p-1} \\ + \dfrac{(\Delta x)^p}{1.2...p} f^{n+p}(x+\theta\Delta x) . \overset{n}{M}{}_0^1 x^p \end{array} \right\},$$

les facteurs $\overset{n}{M}{}_0^1 x$, $\overset{n}{M}{}_0^1 x^2$, etc., étant des quantités numériques complétement déterminées.

Considérons en particulier le cas où n est égal à l'unité. Il vient alors *

$$\Delta y = \Delta x . f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{1.2} f''(x) + \text{etc.} + \frac{(\Delta x)^p}{1.2.p} f^p(x)$$
$$+ \frac{(\Delta x)^{p+1}}{1.2..p+1} f^{p+1}(x + \theta \Delta x),$$

et l'on retrouve ainsi le développement auquel nous étions déjà

* L'équation générale établie ci-dessus

$$M_a^x (x-a)^q = \frac{(x-a)^q}{q+1},$$

donne évidemment

$$M_0^{\Delta x} x^q = \frac{(\Delta x)^q}{q+1},$$

ou bien encore

$$M_0^1 x^q = \frac{1}{q+1}.$$

parvenus. En comparant le terme désigné ci-dessus par R à celui qui lui correspond dans la formule (1) du n° 7, page 22, on est conduit à l'égalité

$$(10) \quad . \quad \mathrm{M}_a^z(x-a)\,\mathrm{M}_a^x(x-a)\ldots\mathrm{M}_a^x(x-a)\,\mathrm{M}_a^x f^{p+1}(x) = \frac{\mathrm{M}_a^z(z-x)^p f^{p+1}(x)}{1\,.\,2\ldots p},$$

où l'on peut remplacer $f^{p+1}(x)$ par une fonction quelconque de la variable x *.

Reportons-nous à l'équation (8). Lorsqu'on y fait $p=1$, on trouve

$$(11) \quad . \quad \Delta^n y = (\Delta x)^n\left[f^n(x) + f^{n+1}(x+\theta\,\Delta x)\,\overset{n}{\mathrm{M}}{}_0^{\Delta x}\,x\right].$$

* Au lieu de procéder comme on l'a fait plus haut, pour déterminer par voie de substitutions successives, les valeurs des quantités $\mathrm{M}_a^x(x-a)$, $\mathrm{M}_a^x(x-a)$, $\mathrm{M}_a^x(x-a)$, etc., il est plus simple de poser tout d'abord l'équation (10) et de l'appliquer au cas où la fonction $f^{p+1}(x)$ se réduit à une constante. L'équation générale

$$\mathrm{M}_a^z(x-a)\,\mathrm{M}_a^x(x-a)\ldots\mathrm{M}_a^x(x-a)\,\mathrm{M}_a^x f^{p+1}(x) = \frac{\mathrm{M}_a^z(z-x)^p f^{p+1}(x)}{1\,.\,2\ldots p},$$

où la constante $f^{p+1}(x)$ intervient comme facteur dans chacun des deux membres, donne, après suppression de ce facteur,

$$\mathrm{M}_a^z(x-a)\,\mathrm{M}_a^x(x-a)\ldots\mathrm{M}_a^x(x-a) = \frac{\mathrm{M}_a^z(z-x)^p}{1\,.\,2\ldots p}.$$

On a d'ailleurs, comme ci-dessus,

$$\mathrm{M}_a^z(z-x)^p = \frac{(z-a)^p}{p+1} = \frac{(\Delta x)^p}{p+1}.$$

On peut donc écrire en général

$$\mathrm{M}_a^z(x-a)\,\mathrm{M}_a^x(x-a)\ldots\mathrm{M}_a^x(x-a) = \frac{(\Delta x)^p}{1\,.\,2\ldots p+1},$$

le binôme $(x-a)$ étant répété p fois dans le premier membre.

On a d'ailleurs, ainsi qu'on le voit aisément,

$$\mathrm{M}_x^{x+\Delta x}\, x = x + \frac{1}{2}\Delta x,$$

et, par suite,

$$\overset{2}{\mathrm{M}}{}_x^{x+\Delta x}\, x = \mathrm{M}_x^{x+\Delta x}\, x + \frac{1}{2}\Delta x = x + \frac{2}{2}\Delta x$$

$$\overset{3}{\mathrm{M}}{}_x^{x+\Delta x}\, (x) = \mathrm{M}_x^{x+\Delta x}\, x + \frac{2}{2}\Delta x = x + \frac{3}{2}\Delta x$$

. . . .

$$\overset{n}{\mathrm{M}}{}_x^{x+\Delta x}\, (x) = \mathrm{M}_x^{x+\Delta x}\, x + \frac{n-1}{2}\Delta x = x + \frac{n}{2}\Delta x$$

De là résulte, pour $x=0$,

$$\overset{n}{\mathrm{M}}{}_0^{\Delta x}\, x = \frac{n}{2}\Delta x.$$

On peut donc écrire, en général,

$$(12) \quad . \quad . \quad \Delta^n y = (\Delta x)^n \left[f^n(x) + \frac{n}{2}\Delta x\, f^{n+1}(x + \theta\Delta x) \right].$$

10. Proposons-nous de déterminer directement les valeurs numériques des facteurs exprimés par les symboles $\overset{n}{\mathrm{M}}{}_0^1\, x$, $\overset{n}{\mathrm{M}}{}_0^1\, x^2 \ldots$ $\overset{n}{\mathrm{M}}{}_0^1\, x^\nu$ dans l'équation (9) du numéro précédent.

On a, en général,

$$(x + p + 1)^{q+1} - (x + p)^{q+1} = (q + 1)\, \mathrm{M}_x^{x+1}\, (x + p)^q,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1) \quad \mathrm{M}_x^{x+1} (x + p)^q = \frac{1}{q+1} \left[(x + p + 1)^{q+1} - (x + p)^{q+1} \right].$$

De là résulte, pour $p=0$,

$$(2) \quad . \quad . \quad \mathrm{M}_x^{x+1}\, x^q = \frac{1}{q+1} \cdot \left[(x + 1)^{q+1} - x^{q+1} \right].$$

Prenons les valeurs moyennes de chacun des membres de l'équation (2). Il vient, eu égard à l'équation (1),

$$(3)\quad \overset{2}{\mathrm{M}}{}_x^{x+1}\, x^q = \frac{1}{(q+1)(q+2)}\left[(x+2)^{q+2} - 2(x+1)^{q+2} + x^{q+2}\right].$$

Opérons sur l'équation (3) comme nous venons de le faire sur l'équation (2), et ainsi de suite indéfiniment. Il est aisé de voir que ce procédé conduit à l'équation générale

$$(4)\quad \overset{n}{\mathrm{M}}{}_x^{x+1}\, x^q = \frac{1}{(q+1)\dots(q+n)}\left\{\begin{array}{l}(x+n)^{q+n} - \frac{n}{1}(x+n-1)^{q+n} \\ + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(x+n-2)^{q+n} - \text{etc.} \pm x^{q+n}\end{array}\right\}.$$

On a donc, en prenant $x = 0$ pour limite inférieure,

$$(5)\quad \overset{n}{\mathrm{M}}{}_0^1\, x^q = \frac{1}{(q+1)\dots(q+n)}\left\{\begin{array}{l}n^{q+n} - \frac{n}{1}(n-1)^{q+n} \\ + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2)^{q+n} - \text{etc.} \mp n\end{array}\right\}.$$

Représentons par le symbole $\left[{n+q \atop n}\right]$ l'expression générale

$$\frac{1}{1.2..(n+q)}\left[n^{q+n} - \frac{n}{1}(n-1)^{q+n} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2)^{q+n} - \text{etc.} \mp n\right],$$

nous aurons

$$(6)\quad \left[{n+q \atop n}\right] = \frac{1}{1\,.\,2\dots(n+q)}\left\{\begin{array}{l}n^{q+n} - \frac{n}{1}(n-1)^{q+n} \\ + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2)^{q+n} - \text{etc.} \mp n\end{array}\right\},$$

et, eu égard à l'équation (5),

$$(7)\quad \dots\quad \overset{n}{\mathrm{M}}{}_0^1\, x^q = 1\,.\,2\,.\,3\dots q\left[{n+q \atop n}\right].$$

Observons que, dans l'hypothèse $q = o$, on a directement pour l'équation (5)

$$\overset{n}{\mathrm{M}}{}^{1}_{o}\, x^{o} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1.$$

Cela posé, il est visible que l'équation (9) du numéro qui précède, page 30, peut s'écrire comme il suit :

$$(8) \quad \Delta^{n} y = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} (\Delta x)^{n} f^{n}(x) + \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} (\Delta x)^{n+1} f^{n+1}(x) + \text{etc.}$$

$$+ \begin{bmatrix} n+p-1 \\ n \end{bmatrix} (\Delta x)^{n+p-1} f^{n+p-1}(x) + \begin{bmatrix} n+p \\ n \end{bmatrix} (\Delta x)^{n+p} f^{n+p}(x + \theta \Delta x).$$

Si d'ailleurs on pose

$$\dot{x} = \text{const}^{te} = \Delta x,$$

ce qui donne, en général,

$$d^{q} y = (\Delta x)^{q} \,.\, f^{q}(x).$$

On peut écrire aussi

$$(9) \quad .\ .\ \Delta^{n} y = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} d^{n} y + \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} d^{n+1} y + \text{etc.}$$

$$+ \begin{bmatrix} n+p-1 \\ n \end{bmatrix} d^{n+p-1} y + \mathrm{R}_{1},$$

le dernier terme R_1 ou $\mathrm{R} \,.\, (\Delta x)^{n}$ étant déterminé par l'équation (6) du n° 9, pour tous les cas où les dérivées d'ordre inférieur à $n+p$ demeurent continues dans l'intervalle Δx, et pouvant s'exprimer de la manière suivante

$$\mathrm{R}_{1} = \begin{bmatrix} n+p \\ n \end{bmatrix} (\Delta x)^{n+p} f^{n+p}(x + \theta \Delta x),$$

lorsque la dérivée $f^{n+p}(x)$ ne cesse pas d'être continue dans ce même intervalle.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS PARTICULIÈRES.

Des rapports qui s'établissent entre la fonction et ses dérivées pour certaines valeurs de la variable.

11. Soit une fonction quelconque,

$$y = f(x).$$

On suppose que pour une valeur particulière de la variable x la fonction y *jusque-là continue* se présente sous la forme symbolique $\frac{1}{0}$. Soit x_3 cette valeur particulière * : cela revient à dire que la fonction y croît sans limite à mesure que la variable x se rapproche de la valeur x_3.

Considérons le point qui décrit le segment de droite substitué comme équivalent numérique à la grandeur y. La vitesse de ce point a pour expression générale

$$\dot{y} = \dot{x}\, f'(x).$$

et l'on a en même temps

$$\Delta y = \Delta x\, \mathrm{M}_x^{x+\Delta x}\, f'(x).$$

Cela posé, il est visible *à priori* que la vitesse $\dot{y}$ ou, ce qui revient au même, la dérivée $f'(x)$ doit croître indéfiniment à mesure que la variable x converge vers la valeur x_3. Quelle que soit en effet la vitesse d'un point, du moment qu'elle est limitée, le segment décrit par ce point reste aussi limité. Or, par hypothèse, la

* Il est entendu que toute valeur particulière d'une quantité variable est une valeur finie, déterminée et réelle.

grandeur y augmente sans limite à mesure que la variable x se rapproche de la valeur x_3; il faut donc que la dérivée $f'(x)$ croisse indéfiniment dans cette même circonstance, et par conséquent aussi toutes les dérivées successives.

Veut-on procéder plus rigoureusement? On peut raisonner comme il suit.

Soit x_1 une valeur aussi rapprochée qu'on voudra de x_3 et telle que de x_1 à x_3 la fonction y soit toujours croissante en grandeur absolue; soit en outre x_2 une valeur intermédiaire. En admettant que, pour $x = x_2$, la dérivée $f'(x)$ prît accidentellement la forme $\frac{1}{0}$, cette forme ne pourrait persister. Il est donc permis de poser immédiatement $f'(x_2) = \mathrm{B}$, la valeur B étant numériquement assignable. Or, si grand que soit B, je dis que la dérivée $f'(x)$ doit augmenter encore de x_2 à x_3. Pour le démontrer, prenons, à partir de x_2, l'intervalle Δx_2 plus petit que $x_3 - x_2$. Nous aurons, en désignant par Δy_2 l'accroissement correspondant de la fonction

$$\Delta y_2 = \Delta x_2\, \mathrm{M}_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} f'(x).$$

Suppose-t-on maintenant que la dérivée $f'(x)$ n'augmente pas de x_2 à x_3? La valeur moyenne $\mathrm{M}_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} f'(x)$ étant inférieure à B, il vient

$$\Delta y_2 < \mathrm{B} \,.\, \Delta x_2$$

et, *à fortiori*,

$$\Delta y_2 < \mathrm{B} \,.\, (x_3 - x_2).$$

Mais, quel que soit B, si grand qu'on le suppose, cette dernière inégalité est toujours impossible, puisque, par hypothèse, la différence Δy_2 croît indéfiniment à mesure que Δx_2 converge vers la limite $x_3 - x_2$. On ne peut donc admettre que la dérivée $f'(x)$, lors même qu'elle décroîtrait à partir de x_2, ne prenne pas ensuite des valeurs toujours de plus en plus grandes, et cela sans limite assignable. Il faut donc nécessairement que, pour la valeur $x = x_3$, elle affecte la forme symbolique $\frac{1}{0}$.

De là résultent les énoncés suivants :

Lorsque pour une valeur particulière attribuée à la variable

la fonction, jusque-là continue, *se présente sous la forme* $\frac{1}{o}$, *il en est de même de toutes ses dérivées successives.*

Réciproquement, toute valeur de la variable qui ne rend pas infinie la dérivée de l'ordre n, *ne rend infinie ni la fonction ni aucune des dérivées précédentes.*

Ces énoncés ont, en certains cas, leur utilité.

Des limites qui correspondent aux formes singulières
$\frac{o}{o}, \frac{\infty}{\infty}, \infty \times o., 1^{\infty}, \infty^{o}, o^{o}$.

12. Soient deux fonctions d'une même variable, représentées respectivement, l'une par $z = f(x)$, l'autre par $u = F(x)$. Considérons d'abord la fonction composée

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad y = \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{u}{z},$$

et supposons, en premier lieu, que pour une même valeur $x = a$, on ait en même temps

$$F(a) = o, \quad f(a) = o.$$

Cela posé, on demande de déterminer la limite vers laquelle converge la fonction y en même temps que la variable x se rapproche indéfiniment de la valeur a.

Reportons-nous aux principes fondamentaux du calcul différentiel. L'un de ces principes, tous établis directement et par voie géométrique, est énoncé comme il suit : *

Lorsque deux variables convergent en même temps vers zéro, leur rapport converge en même temps vers une certaine limite. Cette limite est le rapport des valeurs que les différentielles des variables considérées affectent respectivement lorsque ces variables s'annulent.

* Voir au besoin la deuxième partie de cet ouvrage, n° 9, page 104.

De là résulte immédiatement

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \lim \frac{u}{z} = \frac{\dot{u}}{\dot{z}}.$$

On a d'ailleurs, en général,

$$\dot{u} = \dot{x} \,.\, F'(x), \quad \dot{z} = \dot{x} \,.\, f'(x).$$

Il vient donc ici, pour $x = a$,

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F'(a)}{f'(a)}.$$

Si la valeur $x = a$ annulait en même temps les deux fonctions $F(x)$, $f(x)$ et leurs dérivées premières, on aurait de même

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \lim \frac{F'(x)}{f'(x)} = \frac{F''(a)}{f''(a)},$$

et ainsi de suite indéfiniment.

Concluons qu'on a généralement

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F^n(a)}{f^n(a)},$$

n étant l'ordre de la première des dérivées qui ne s'annule point pour $x = a$.

Le résultat précédent suppose que la valeur $x = a$ annule en même temps les deux fonctions $F(x)$, $f(x)$ et leurs dérivées successives jusques et y compris celles de l'ordre $(n - 1)$. Appliquée à ce cas, l'équation (9) du n° 7, page 24, donne en même temps, d'une part

$$F(x) = \frac{(x - a)^n}{1 \,.\, 2 \,..\, n} F^n [a + \theta(x - a)],$$

d'autre part

$$f(x) = \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} f^n[a+\theta'(x-a)].$$

Il vient donc, en général,

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F^n[a+\theta(x-a)]}{f^n[a+\theta'(x-a)]},$$

et, pour $x=a$,

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F^n(a)}{f^n(a)}.$$

15. Supposons en second lieu que, pour une même valeur $x=a$, on ait en même temps

$$F(a) = \frac{1}{0} = \infty, \quad f(a) = \frac{1}{0} = \infty.$$

Si nous posons, en général,

$$\varphi(x) = \frac{1}{F(x)}, \quad \psi(x) = \frac{1}{f(x)},$$

il s'ensuit que, pour $x=a$, les deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ s'annulent et qu'en conséquence on peut écrire

$$(1)\ldots\quad \frac{Fx}{f(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi'[a+\theta(x-a)]}{\varphi'[a+\theta'(x-a)]}.$$

On a d'ailleurs

$$\varphi'(x) = -\frac{F'(x)}{F(x)^2} \qquad \psi'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$

et par suite,

$$(2) \quad \frac{F'(x)}{f'(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} \frac{F(x)^2}{f(x)^2} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} \left[\frac{\psi'(a+\theta(x-a))}{\varphi'(a+\theta'(x-a))} \right]^2.$$

Passons à la limite. Les équations (1) et (2) donnent respectivement et simultanément, la première,

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \lim \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)};$$

la seconde,

$$\frac{F'(a)}{f'(a)} = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)}.$$

On peut donc écrire aussi

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F'(a)}{f'(a)}.$$

La comparaison des équations (1) et (2) fournit le principe suivant :

Lorsque deux fonctions croissent indéfiniment, à mesure que la variable converge vers une valeur particulière, le rapport de ces fonctions et celui de leurs dérivées premières convergent en même temps vers une même limite. Mais, d'ailleurs, chacune de ces dérivées est alors indéfiniment croissante ; le rapport des dérivées secondes a donc même limite que celui des dérivées premières, et ainsi de suite, à l'infini.

De là résulte

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{F'(a)}{f'(a)} = \frac{F''(a)}{f''(a)} = \text{etc.} = \frac{F^n(a)}{f^n(a)}.$$

Il semble qu'il y ait cercle vicieux à exprimer la limite $\frac{F(a)}{f(a)}$ par le rapport de deux termes dont chacun, pris isolément, affecte la forme $\frac{1}{0}$. Mais ici, de même qu'au n° 12, l'hypothèse $x = a$ ne doit être introduite dans l'expression $\frac{F^n(x)}{f^n(x)}$ qu'après la suppression des facteurs communs mis en évidence par les dérivations successives.

N. B. Nous avons supposé que les formes $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ affectées par le rapport $\frac{F(x)}{f(x)}$ répondaient à une valeur particulière $x = a$. Si l'hypothèse faite sur la variable était exprimée symboliquement par $x = \infty$, on poserait

$$x = \frac{1}{t},$$

et l'on considérerait la variable t comme convergeant vers zéro à mesure que la variable x croîtrait de plus en plus. On aurait ainsi

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F\left(\frac{1}{t}\right)}{f\left(\frac{1}{t}\right)}$$

et, conformément à ce qui précède, on en déduirait pour $t = 0$ ou, ce qui revient au même, pour $x = \infty$

$$\lim \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F'\left(\frac{1}{t}\right)}{f'\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{F'(x)}{f'(x)}.$$

Rien donc ne changerait dans le résultat définitif. Toutefois il convient d'observer que le symbole $\frac{1}{0}$ exprime, en général, une impossibilité qui peut se traduire en solution de continuité et faire tomber en défaut les règles du calcul.

14. Considérons maintenant le produit

$$f(x) \,.\, F(x).$$

Si pour une valeur particulière $x = a$, ce produit prend la forme $0 \times \infty$, on peut écrire, en général,

$$f(x) \,.\, F(x) = \frac{F(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{F(x)}}.$$

Tout revient donc à considérer une expression de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, et l'on est ramené à l'un des cas traités précédemment.

Soit encore l'exponentielle $f(x)^{F(x)}$ supposée telle que pour $x = a$ elle se présente sous l'une des trois formes 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}; on a généralement

$$\log. f(x)^{Fx} = Fx \log f(x),$$

et, si les logarithmes sont pris dans le système népérien,

$$f(x)^{F(x)} = e^{F(x) \log f(x)}.$$

La question se réduit donc à déterminer vers quelle limite converge le produit $F(x) \,.\, \log. f(x)$ dans l'hypothèse où l'on s'est placé *.

* On a

$$\Delta f(x) = \Delta x \, M_x^{x+\Delta x} f'(x).$$

Supposons que pour une valeur quelconque déterminée de l'accroissement Δx la variable x croisse indéfiniment. En général, il n'y a pas lieu de distinguer entre les limites $f'(\infty)$ et $f'(\infty + \Delta x)$. On peut donc écrire

$$f'(\infty) = \lim M_x^{x+\Delta x} f'(x) = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Posons $\Delta x = 1$. Il vient

$$f'(\infty) = \lim [f(x+1) - f(x)].$$

15. **Moutrons, par quelques applications particulières, l'usage qu'on peut faire des règles établies dans les trois numéros qui précèdent.**

Soit d'abord $x = o$: on trouve pour ce cas

$$x \log x = \lim \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim (-x) = o,$$

$$x . e^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

$$[\cos mx]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log \cos mx} = \lim e^{-m \operatorname{tg} x} = 1,$$

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log (1+x)} = \lim e^{\frac{1}{1+x}} = e.$$

Soit ensuite $x = \infty$. On a de même,

$$\frac{\log x}{x} = \lim \frac{1}{x} = o,$$

$$\frac{a^x}{x} = \lim a^x . \log a = \infty \quad \text{pour } a > o,$$

$$x^{\frac{1}{x}} = \lim e^{\frac{1}{x} \log x} = e^o = 1,$$

$$f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log f(x)} = \lim e^{\frac{f'(x)}{f(x)}} = e^{\lim \frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

De là résulte, pour le cas où la fonction $f(x)$ croît indéfiniment avec x,

$$\lim \frac{f(x)}{x} = f'(\infty.) = \lim [f(x+1) - f(x)]$$

$$\lim f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim \frac{\log f(x)}{x}} = \lim e^{\log \frac{f(x+1)}{f(x)}} = \lim \frac{f(x+1)}{f(x)} .$$

Ces deux formules ont été données par M. Cauchy.

CHAPITRE III.

SÉRIES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN.

---

16. Reportons-nous à la formule (1) du n° 7, page 22, et posons $z=x+h$. On trouve ainsi

$$(1) \quad . \quad . \quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\text{etc.}+\frac{h^n}{1.2....n}f^n(x)$$
$$+\frac{h}{1.2...n}\mathrm{M}_x^{x+h}(z-x)^n f^{n+1}(x).^*$$

Nous savons, d'ailleurs, que si la condition de continuité, supposée remplie par la fonction et ses n premières dérivées, l'est en même temps pour la dérivée de l'ordre $(n+1)$, le dernier terme peut se remplacer indifféremment, soit par

$$\frac{h^{n+1}}{1.2...(n+1)}f^{n+1}(x+\theta h),$$

soit par

$$\frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{1.2..n}f^{n+1}(x+\theta),$$

θ étant une quantité comprise entre 0 et 1.

Supposons que la valeur attribuée à x comme origine de l'accroissement h se réduise à zéro. Il vient d'abord $x=0$, puis ensuite, en substituant x à h,

$$(2) \quad . \quad f(x)=f(o)+\frac{x}{1}f'(o)+\text{etc.}+\frac{x^n}{1.2..n}f^n(o)$$
$$+\frac{x}{1.2..n}\mathrm{M}_o(z-x)^n f^{n+1}(x),^*$$

* Le dernier terme, lorsqu'on y remplace la variable x par sa valeur initiale augmentée de hu, devient

$$\frac{h^{n+1}}{1.2...n}\mathrm{M}_o^1(1-u)^n f^{n+1}(x+hu).$$

le dernier terme pouvant être remplacé, comme tout à l'heure, soit par

$$\frac{x^{n+1}}{1.2..(n+1)} f^{n+1}(\theta x),$$

ou par

$$\frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{1.2..n} f^{n+1}(\theta x).$$

On ne perdra pas de vue que dans le facteur représenté par $z - x$ sous les signes M_x^{z+h}, M_0^z, la quantité z doit être considérée comme constante et comme ayant la valeur exprimée par l'indice supérieur. Si l'on craignait quelque confusion, on pourrait prendre une variable auxiliaire qu'on désignerait par u et substituer aux formules (1) et (2) les formules suivantes

$$(3) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \text{etc.} + \frac{h^n}{1.2..n} f^n(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2..n} M_0^1 (1-u)^n f^{n+1}(x+hu),$$

$$(4) \quad . \quad . \quad f(x) = f(o) + \frac{x}{1} f'(o) + \text{etc.} + \frac{x^n}{1.2..n} f^n(o) + \frac{x^{n+1}}{1.2..n} M_0^1 (1-u)^n f^{n+1}(xu),$$

la quantité u étant la seule qui varie sous le signe M_0^1.

Au lieu de limiter ces développements par l'addition du terme qui les complète, on peut concevoir qu'ils se prolongent à l'infini, suivant la loi de formation indiquée. Les séries que l'on obtient de cette manière sont généralement connues sous les noms de *série de Taylor* ou de *série de Maclaurin*, selon qu'elles dérivent de l'identité (3) ou de l'identité (4). Il est permis, en certains cas, de substituer ces séries au développement limité de la fonction. Néanmoins on ne doit jamais perdre de vue qu'elles n'ont d'autre fondement que celui qui résulte de la possibilité présumée de pro-

longer toujours, et suivant une loi constante, le développement limité sur lequel elles reposent. Lorsque les termes complémentaires

$$\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n} \mathrm{M}_0^1 (1-u)^n f^{n+1}(x+hu), \quad \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n} \mathrm{M}_0^1 (1-u)^n f^{n+1}(xu)$$

convergent vers zéro à mesure que n augmente, les séries sont convergentes et elles permettent de calculer avec tel degré d'approximation que l'on veut la valeur des fonctions qu'elles servent à développer. Dans le cas contraire, elles sont divergentes. Pour que les séries puissent subsister, il faut que toutes les dérivées prennent des valeurs finies à l'origine de l'accroissement que l'on considère, et qu'en outre la continuité s'étende au delà de cette origine. Ces conditions étant supposées remplies, les séries sont, en général, convergentes pour tout ou partie de l'intervalle considéré.

17. Prenons, pour exemples, les fonctions élémentaires et cherchons à les développer suivant la formule de Taylor ou suivant celle de Maclaurin.

Soit, en premier lieu,

$$f(x) = x^m.$$

Lorsque l'exposant m est positif et entier, la dérivée de l'ordre m étant constante, le développement est limité et l'on a identiquement

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (x+h)^m = x^m + \frac{m}{1} hx^{m-1} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{m(m-1)..(m-n+1)}{1.2\ldots.n} h^n x^{m-n} + \text{etc.} + h^m.$$

C'est la formule du binôme de Newton pour le cas de l'exposant entier et positif.

Supposons l'exposant m quelconque. On a

$$f^{n+1}(x) = m(m-1)..(m-n)\, x^{m-n-1}.$$

En se reportant au n° 16, on voit aisément que le dernier terme

des formules (1) ou (3) peut s'écrire indifféremment sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes

$$(2)\ .\quad \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots(n+1)}\left(\frac{h}{x+\theta h}\right)^{n+1}(x+\theta h)^{m},$$

$$(3)\ .\quad \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots n}\left[\frac{h-\theta h}{x+\theta h}\right]^{n}\frac{h}{x+\theta h}(x+\theta h)^{m}.$$

La première de ces formes montre que pour des valeurs de h positives et moindres que x, le terme complémentaire converge vers zéro à mesure que n croît indéfiniment. La deuxième fait voir que cette même condition est remplie pour des valeurs de h *négatives* *, et moindres que x en grandeur absolue. On peut donc écrire, en général,

$$(4)\quad (x+h)^{m}=x^{m}+\frac{m}{1}hx^{m+1}+\frac{m(m-1)}{1.2}h^{2}x^{m-2}+\text{etc.}$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}h^{n}x^{m-n}+\text{etc.}$$

h étant, par hypothèse, moindre que x en grandeur absolue. Si l'inverse avait lieu, h étant supérieur à x, on écrirait

$$(5)\quad (h+x)^{m}=h^{m}+\frac{m}{1}xh^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{2}h^{m-2}+\text{etc.}$$

Soit $h=1$ et x une fraction quelconque positive ou négative : on a de même

$$(6)\ .\quad (1+x)^{m}=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{2}+\text{etc.}$$

* Lorsque la quantité h est négative le facteur représenté par l'expression fractionnaire $\frac{h-\theta h}{x+\theta h}$ devient $-\frac{h-\theta h}{x-\theta h}$.

Lorsqu'on fait $h = -x$ dans l'équation (1), on trouve identiquement

$$(7) \quad . \quad . \quad 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \, . \, 2} - \text{etc.} \pm 1 = 0.$$

18. Soit, en second lieu,

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(x) = \log x.$$

Il vient d'abord $f'(x) = x^{-1}$, et, par suite,

$$f^n(x) = \pm 1 \, . \, 2 \ldots (n-1) \, x^{-n}.$$

Les dérivées étant positives ou négatives, selon que l'indice n est impair ou pair.

En opérant comme au n° 17, on trouve que le terme complémentaire affecte indifféremment l'une ou l'autre des deux formes

$$\frac{1}{n+1}\left[\frac{h}{x+\theta h}\right]^{n+1}, \quad \left[\frac{h-\theta h}{x+\theta h}\right]^n \frac{h}{x+\theta h}.$$

La conséquence est la même qu'au numéro précité. On peut donc écrire, en général,

$$(2) \quad \log(x+h) = \log x + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^2 + \text{etc.} \pm \frac{1}{n}\left(\frac{h}{x}\right)^n \mp \text{etc.}$$

h étant, par hypothèse, moindre que x en grandeur absolue. Si l'inverse a lieu, h étant supérieur à x, on a de même

$$(3) \quad . \quad . \quad \log(h+x) = \log h + \frac{x}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \text{etc.}$$

Faisons $h = 1$ dans la formule (3). Il vient

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.}$$

x étant une fraction quelconque positive ou négative. De là résulte, en changeant le signe de la variable x,

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \text{etc.}$$

Soustrayons l'équation (5) de l'équation (4). On a d'abord

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{etc.}\right].$$

Si l'on pose ensuite

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{y+1}{y};$$

ce qui donne

$$x = \frac{1}{2y+1}:$$

on en déduit

$$\log(y+1) - \mathrm{L}(y) = 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \text{etc.}\right].$$

Cette dernière formule est très-convergente pour des valeurs un peu grandes de la variable y. Elle permet ainsi de calculer rapidement les logarithmes de deux nombres entiers consécutifs, et, de proche en proche, ceux de tous les nombres entiers supérieurs à celui par lequel on a commencé. On sait d'ailleurs que pour passer du logarithme naturel d'un nombre au logarithme de ce même nombre pris dans un système à base quelconque a, il faut diviser le logarithme naturel du nombre par celui de la base a *.

19. Soit, en troisième lieu,

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(x) = a^x.$$

* L'équation générale $a^{lx} = x$ donne, en prenant les logarithmes naturels des deux membres,

$$\log x = lx \,.\, \log a.$$

On a d'abord

$$f'(x) = a^x \log(a),$$

puis généralement

$$f^n(x) = a^x (\log a)^n.$$

Le terme complémentaire de la formule (4) du n° 16, page 45, devenant ici

$$\frac{h^{n+1}(\log a)^{n+1}}{1.2..n} \mathrm{M}_0^1 (1-u)^n a^{hu} < \frac{a^h . h^{n+1} . (\log a)^{n+1}}{1.2..(n+1)},$$

il est visible que ce terme converge vers zéro à mesure que n croît indéfiniment. On peut donc écrire, d'après la formule de Maclaurin,

$$(2) \ldots \quad a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{(x \log a)^2}{1.2} + \frac{(x \log a)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Supposons la base quelconque a prise égale à la base e du système Népérien. On a $\log e = 1$ et, par suite,

$$(3) \ldots \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Nous étions déjà parvenus à ce résultat au n° 18, de la deuxième partie (page 116). On en déduit

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.} = 2{,}718281828459. \ldots$$

20. Considérons, en quatrième lieu, les deux fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, et posons d'abord

$$(1) \ldots \quad f(x) = \sin x.$$

On a

$$f'(x) = \cos x.$$

Il vient ensuite

$$f''(x) = -\sin x.$$

De là résulte, en général, pour les dérivées d'ordre impair

$$f^{2n+1}(x) = \pm \sin x,$$

et pour celles d'ordre pair

$$f^{2n}(x) = \pm \cos x.$$

Les signes + et — se succédant alternativement dans un cas comme dans l'autre.

Reportons-nous aux formules (2) ou (4) du n° 16, pages 44 et 45. Le terme complémentaire devient ici

$$\pm \frac{x^{n+1}}{1.2..n} \mathrm{M}_0^1 (1-u)^n \sin hu,$$

ou bien

$$\pm \frac{x^{n+1}}{1.2..n} \mathrm{M}_0^1 (1-u)^n \cos hu.$$

Il s'ensuit qu'il est moindre en grandeur absolue que la quantité

$$\frac{x^{n+1}}{1.2..n} \mathrm{M}_0^1 (1-u)^n = \frac{x^{n+1}}{1.2..(n+1)}.$$

On voit par là que ce terme converge vers zéro à mesure que n croît indéfiniment. On peut donc écrire, en général, et sans aucune restriction,

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad \sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$$

On trouverait de même

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Il y a lieu d'observer, relativement aux séries (2) et (3), que, les termes étant alternativement positifs et négatifs, l'erreur commise en s'arrêtant à l'un quelconque d'entre eux est moindre que le suivant. On voit d'ailleurs que, quelle que soit la valeur attribuée

à x, on peut toujours choisir le terme auquel on s'arrête, de manière à obtenir tel degré d'approximation que l'on veut.

21. Considérons, en cinquième et dernier lieu, les fonctions circulaires inverses arc tg x, arc sin x, arc cos x.

Nous pourrions procéder ici comme nous l'avons fait dans les différents cas traités précédemment. Il sera plus simple de suivre une autre marche, qu'il est bon d'ailleurs de connaître et qui se fonde sur les considérations suivantes.

On a généralement *

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(x) - f(o) = x\, \mathrm{M}_o^x f'(x)$$

et

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{M}_o^x x^n = \frac{x^n}{n+1}.$$

Cela posé, imaginons que la dérivée $f'(x)$ soit développable en série convergente, et que l'on ait en conséquence

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f'(x) = a + bx + cx^2 + \text{etc.}$$

De là résulte, eu égard aux équations (1) et (2),

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(x) = f(o) + ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \text{etc.}$$

Dans le cas particulier des logarithmes, déjà traité n° 18, on peut poser

$$f(x) = \log(1 + x)$$

et, par suite,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \text{etc.}$$

* Partant de l'équation générale

$$f(x+h) - f(x) = h \,.\, \mathrm{M}_x^{x+h} f'(x)$$

et posant $h = -x$, on en déduit

$$f(x) - f(o) = x \,.\, \mathrm{M}_o^x f'(x).$$

Cette série étant convergente pour toute valeur de x^2 moindre que l'unité, on a immédiatement, par application de l'équation (4),

$$\log(1+x)=x.\mathrm{M}_0^x(1-x+x^2-\text{etc.})=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\text{etc.}$$

Passons aux fonctions circulaires inverses arc tg x, arc sin x, arc cos x, et posons d'abord

$$f(x)=\text{arc tg } x.$$

On en déduit

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\text{etc.}$$

Cette série est convergente pour toute valeur de x^2 moindre que l'unité. On peut donc écrire immédiatement

$$\text{arc tg } x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\text{etc.},$$

et comme ici la convergence ne cesse pas d'exister pour $x=1$, on en déduit cette expression remarquable du rapport de la circonférence au diamètre

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc.}$$

Soit maintenant

$$f(x)=\text{arc sin } x.$$

De là résulte

$$f'(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

et, eu égard à la formule (6) du n° 17, page 47,

$$f'(x)=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}x^4+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}x^6+\text{etc.}$$

Il vient donc aussi

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{x^7}{7} + \text{etc.}:$$

ce qui donne pour $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\,.\,2^3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{1}{5\,.\,2^5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{1}{7\,.\,2^7} + \text{etc.},$$

et pour $x = 1$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{1}{5} + \text{etc.}$$

On trouverait de même

$$\text{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{x^5}{5} - \text{etc.}$$

Extension générale des formules établies précédemment pour les développements par voie d'identités et par voie de séries.

22. Considérons une fonction de plusieurs variables

$$u = \text{F}(x, y, z, \text{etc.}).$$

Quel que soit le nombre des variables engagées sous le signe F, elles dépendent ou non les unes des autres. Dans tous les cas, on peut introduire par la pensée une variable auxiliaire, prise pour *variable indépendante,* et, afin que toutes les autres en deviennent fonction, concevoir au besoin une ou plusieurs relations arbitraires que l'on ne détermine point aussi longtemps qu'on le juge convenable et dont pourtant il est toujours permis de disposer. Désignons par t la variable auxiliaire prise pour variable indépendante. La fonction u se résout en une fonction de la forme

$$u = f(t),$$

et l'on peut lui appliquer les formules établies ci-dessus pour les développements par voie d'identités et par voie de séries.

La marche à suivre restant toujours la même, bornons-nous à prendre pour exemple la fonction

(1) . . . . $z = F(x, y)$,

qui peut être considérée comme représentant une surface.

Si nous posons

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

il vient

(2) . . . . . $z = F(x, y) = f(t)$.

On a d'ailleurs, conformément aux équations (8) et (9) du n° 10, page 34,

$$(3) \quad . \; . \quad \Delta^n z = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} d^n z + \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix} d^{n+1} z + \text{etc.}$$

$$+ \begin{bmatrix} n+p-1 \\ n \end{bmatrix} d^{n+p-1} z + \begin{bmatrix} n+p \\ n \end{bmatrix} (\Delta t)^{n+p} f^{n+p}(t + \theta \Delta t),$$

les différentielles $d^n z$, $d^{n+1} z$, etc., étant toutes déterminées par les formules établies dans la deuxième partie de cet ouvrage (n° 36, page 150).

Supposons, pour plus de simplicité, que les relations arbitraires $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ soient de la forme

$$x = a + ht, \quad y = b + kt,$$

et que l'on pose

$$dt = \Delta t = 1.$$

Il en résulte

$$dx = \Delta x = h \quad \text{et pour } n > 1 \quad d^n x = o,$$
$$dy = \Delta y = k \quad \text{et pour } n > 1 \quad d^n y = o.$$

Convenons de représenter symboliquement par

$$\left[h\left(\frac{dz}{dx}\right) + k\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^m,$$

ce que devient le développement de ce binôme, lorsqu'après l'avoir effectué d'après la formule (1) du n° 17, page 46, on déplace les exposants de la quantité dz de manière à les transformer en indices de dérivation. Ce procédé donne en général

$$\left[h\left(\frac{dz}{dx}\right)+k\frac{dz}{dy}\right]^m=h^m\left(\frac{d^mz}{dx^m}\right)+\frac{m}{1}h^{m-1}k\left(\frac{d^mz}{dydx^{m-1}}\right)+\text{etc.}$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^mz}{dx^{m-n}dy^n}\right)h^{m-n}k^n+\text{etc.}$$

et l'on peut écrire en conséquence

$$(4)\quad \Delta^n z=\begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}\left[h\left(\frac{dz}{dx}\right)+k\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^n+\text{etc.}+\begin{bmatrix}n+p-1\\n\end{bmatrix}\left[h\left(\frac{dz}{dx}\right)+k\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^{n+p-1}$$
$$+\begin{bmatrix}n+p\\n\end{bmatrix}\left[h\left(\frac{dz'}{dx}\right)+k\left(\frac{dz'}{dy}\right)\right]^{n+p},$$

les substitutions à faire dans les dérivées du dernier terme n'étant pas, comme pour les autres, les valeurs initiales attribuées aux variables x, y, mais bien ces mêmes valeurs augmentées de θh pour la première et de θk pour la seconde *. Il suit de là que, si l'on conserve les lettres x et y comme expressions des valeurs à partir des quelles les accroissements h et k sont comptés, on a pour les valeurs x', y' à substituer dans les dérivées du dernier terme

$$x'=x+\theta h,\qquad y'=y+\theta k.$$

* a et b étant, par hypothèse, les valeurs respectives des variables x et y à l'origine des accroissements que l'on considère, il s'ensuit qu'elles correspondent à $t=0$. On a d'ailleurs $\Delta t=1$. Le dernier terme de la formule (3) prend en conséquence la forme

$$\begin{bmatrix}n+p\\n\end{bmatrix}f^{n+p}(\theta),$$

θ étant la valeur à substituer pour t dans la dérivée dont il s'agit. A cette valeur de t correspondent pour x et pour y les valeurs respectives,

$$x=a+\theta h,\quad y=b+\theta k.$$

Appliquons la formule (4) au cas particulier des différences du 1[er] ordre. A cet effet nous ferons d'abord $n = 1$. Remplaçant ensuite p par n et Δz par $F(x + h, y + k) - F(x, y)$, il viendra

$$(5)\ldots F(x + h, y + k) = F(x, y) + h\left(\frac{dz}{dx}\right) + k\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$+ \frac{\left[h\left(\frac{dz}{dx}\right) + k\frac{dz}{dy}\right]^2}{1.2} + \text{etc.} + \frac{\left[h\left(\frac{dz}{dx}\right) + k\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{h\left(\frac{dz'}{dx}\right) + k\left(\frac{dz'}{dy}\right)^n}{1.2\ldots n}.$$

On peut d'ailleurs, ainsi qu'il est aisé de le voir, remplacer l'équation (5) par l'identité *

$$(6)\ldots F(x + h, y + k) = F(x, y) + h\left(\frac{dz}{dx}\right) + k\left(\frac{dz}{dy}\right) + \text{etc.}$$

$$+ \frac{\left[h\left(\frac{dz}{dx}\right) + k\left(\frac{dz}{dy}\right)\right]^{n-1}}{1.2..(n-1)} + \frac{M_0^1(1-u)^{n-1}\left[h\left(\frac{dz'}{dx}\right) + k\left(\frac{dz'}{dy}\right)\right]^n}{1.2\ldots(n-1)},$$

les substitutions à faire dans les dérivées placées sous le signe M_0^1 étant respectivement $x + hu$, $y + ku$. On observera que l'existence des formules (4), (5), (6) est subordonnée à la condition que les dérivées partielles qui y figurent en dehors du signe M soient toutes finies et continues à partir des valeurs x, y jusqu'aux limites $x + h$, $y + k$. Pour que ces mêmes formules puissent se transformer en séries, d'après la loi qui régit la formation des premiers termes, il faut en outre que leur dernier terme converge vers zéro à mesure que l'indice de ce terme est pris de plus en plus grand.

Il est aisé de voir ce que deviennent les formules précédentes, soit lorsque les valeurs x, y sont supposées nulles et qu'après les avoir annulées dans tous les termes qui les contiennent, on rem-

* Il suffit pour cela d'opérer sur l'identité (1) du n° 7, page 22, comme nous l'avons fait sur les formules (8) et (9) du n° 10, page 34.

place par x et y les accroissements quelconques déterminés h et k, soit plus généralement lorsque le nombre des variables est quelconque. Un exemple suffira, celui d'une fonction de trois variables $F(x, y, z) = V$. S'agit-il en ce cas de la formule (6)? En désignant par l l'accroissement attribué à la variable z et donnant aux conventions précédentes l'extension qu'elles comportent, il vient, sous les mêmes conditions et réserves,

$$F(x+h, y+k, z+l) = F(x, y, z) + h\frac{dv}{dx} + k\frac{dv}{dy} + l\frac{dv}{dz} + \text{etc.}$$

CHAPITRE IV.

DE LA CONTINUITÉ CONSIDÉRÉE DANS SES RAPPORTS AVEC LA CONVERGENCE DES SÉRIES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN *.

Dérivation sous le signe M.

23. Soit

$$z = F(x, y)$$

une fonction quelconque supposée continue entre les limites que l'on considère. On a, généralement,

$$(1). \quad . \quad . \quad F(x+h, y) - F(x, y) = hM_x^{x+h}F'_x(x, y),$$

et, prenant les dérivées des deux membres par rapport à y,

$$(2). \quad . \quad . \quad F'_y(x+h, y) - F'_y(x, y) = h\left[\frac{d\left[M_x^{x+h}F'_x(x, y)\right]}{dy}\right].$$

* Le lecteur peut passer ce chapitre, sauf à y revenir plus tard, s'il a quelque intérêt à approfondir le sujet qu'on y traite.

D'un autre côté, on a directement et conformément à l'équation (1)

$$(3).\ .\ F'_y(x+h,y)-F'_y(x,y)=hM_x^{x+h}F''_{y,x}(x,y)=hM_x^{x+h}F''_{x,y}(x,y).$$

La comparaison des équations (2) et (3) donne

$$(4).\quad \left(\frac{dM_x^{x+h}F'_x(x,y)}{dy}\right)=M_x^{x+h}F''_{x,y}(x,y)=M_x^{x+h}\left(\frac{d.F'_x(x,y)}{dy}\right).$$

On aurait de même, en prenant de nouveau les dérivées par rapport à y des deux membres de l'équation (4)

$$\left(\frac{d^2M_x^{x+h}F'_x(x,y)}{dy^2}\right)=\left[\frac{d.M_x^{x+h}\frac{d[F'_x(x,y)]}{dy}}{dy}\right]=M_x^{x+h}\left(\frac{d^2F'_x(x,y)}{dy^2}\right),$$

et ainsi de suite indéfiniment.

On peut donc écrire, en général,

$$(5).\ .\ .\ .\ \left(\frac{d^nM_x^{x+h}f(x,y)}{dy^n}\right)=M_x^{x+h}\left[\frac{d^nf(x,y)}{dy^n}\right],$$

$f(x,y)$ étant pris égal à la fonction désignée ci-dessus par $F'(x,y)$.

De là résulte la règle suivante :

Pour effectuer n *dérivations successives sur la valeur moyenne d'une fonction, il suffit de substituer à la fonction placée sous le signe* M *sa dérivée de l'ordre* n.

Cette règle est d'un fréquent usage. On peut l'établir *à priori*, comme nous l'avons fait ailleurs *, en substituant aux valeurs moyennes que l'on considère les développements dont elles sont les limites d'après leur définition.

* *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome XI, 1846.

Conditions remplies par les séries de Taylor et de Maclaurin lorsqu'elles sont convergentes.

24. Considérons une fonction quelconque

(1). . . . . $y=f(x+h)$.

Au lieu de s'en tenir au système des valeurs réelles que la variable x comporte, on peut attribuer à cette variable une valeur quelconque, réelle ou imaginaire, représentée par

(2). . . . . $x=p+q\sqrt{-1}$.

Dans cette expression de la variable imaginaire, p et q sont des quantités réelles dont on dispose, si la variable est indépendante, et qui, dans tous les cas, sont considérées comme impliquant la continuité ou la discontinuité de la variable qu'elles déterminent, selon qu'elles demeurent toutes deux continues ou qu'elles cessent de l'être, soit ensemble, soit séparément.

Posons

(3). . . . $p+q\sqrt{-1}=r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$.

On déduit de cette équation

(4). . . . . . $r\cos\theta=p,\qquad r\sin\theta=q,$

et, par suite,

(5) . . . . $r=\sqrt{p^2+q^2},\qquad \operatorname{tang}\theta=\frac{q}{p}$.

Quelles que soient les valeurs réelles p et q, il est visible qu'on peut toujours satisfaire à l'équation (3) en attribuant à r et à θ d'autres valeurs également réelles, les valeurs fournies par les équations (4) et (5). On voit en même temps que la continuité des

quantités p, q implique celle des quantités r, θ; et réciproquement.

La quantité r, supposée toujours positive, est dite *le module* de l'expression imaginaire $p+q\sqrt{-1}$. L'angle θ est dit *l'argument* de cette même expression. On a d'ailleurs *

$$(6) \quad . \; . \; . \quad x = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\,.\sin\theta) = re^{\theta\sqrt{-1}}.$$

Prenons x pour variable indépendante imaginaire. Remplaçons-la dans $f(h+x)$ par $re^{\theta\sqrt{-1}}$, et, mettant en évidence les parties réelles et les parties imaginaires, effectuons leur séparation dans l'équation symbolique

$$(7) \quad . \; . \; . \; . \quad f\left(h + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) = \varphi(r, \theta) + \sqrt{-1}\;\psi(r, \theta).$$

Concevons en outre que l'argument θ varie continûment de 0 à 2π.

Cela posé, si les fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ restent finies et réelles et qu'elles ne changent point brusquement de détermination numérique pour toutes valeurs du module comprises entre deux limites quelconques déterminées, la fonction $f(h+x)$ est et demeure continue entre ces mêmes limites. Dans le cas contraire, il y a discontinuité sinon pour les valeurs réelles, du moins pour les valeurs imaginaires.

La séparation effectuée dans l'équation (7) peut offrir quelque difficulté. Néanmoins elle est toujours possible. S'agit-il seulement des fonctions développables en séries convergentes suivant les formules de Taylor ou de Maclaurin? Rien de plus simple que de constater *à priori* la possibilité de la séparation. En effet on a, par hypothèse **,

$$(8) \quad . \; . \; . \; . \quad f(h+x) = a + bx + cx^2 + \text{etc.}$$

* Voir au besoin le chapitre VI, n° 35 et suivants, pour la théorie des quantités imaginaires et le sens qui s'attache à leur emploi.

** Si le développement effectué en série d'après la formule de Taylor se présente d'abord sous la forme

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \text{etc.},$$

De là résulte

$$f(h+re^{\theta\sqrt{-1}})=a+bre^{\theta\sqrt{-1}}+cr^2e^{2\theta\sqrt{-1}}+\text{etc.},$$

c'est-à-dire en remplaçant $e^{n\theta\sqrt{-1}}$ par $\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta$,

$$f\left(h+re^{\theta\sqrt{-1}}\right)=\begin{cases} a+br\cos\theta+cr^2\cos 2\theta+\text{etc.} \\ +\sqrt{-1}\,(br\sin\theta+cr^2\sin 2\theta+\text{etc.} \end{cases}$$

Il vient donc

(9). . . $\varphi(r,\theta)=a+br\cos\theta+cr^2\cos 2\theta+\text{etc.}$

(10). . . $\psi(r,\theta)=br\sin\theta+cr^2\sin 2\theta+\text{etc.}$

Prenons dans la série (8) un terme assez éloigné du premier pour qu'il devienne aussi petit qu'on veut, et qu'en outre les termes suivants soient tous de plus en plus petits à mesure qu'ils s'éloignent davantage. Deux cas sont possibles selon que ces termes ont un seul et même signe, ou qu'au contraire, leurs signes ne cessent pas d'alterner suivant une loi quelconque.

Dans le premier cas, il est visible que la convergence de la série (8) implique celle des séries (9) et (10) et par conséquent la continuité des fonctions $\varphi(r,\theta)$, $\psi(r,\theta)$ pour toute l'étendue de l'intervalle précédemment indiqué.

Dans le second cas, la même conséquence subsiste, à cela près que la continuité peut s'étendre, d'un côté, jusquà une certaine limite supérieure, tandis que de l'autre côté, cette même limite devrait être exclue. Soit en effet $x=x_1$ la plus grande des valeurs pour lesquelles la série (8) ne cesse pas d'être convergente. Représentons par px_1^n le terme désigné ci-dessus comme satisfaisant à la double condition d'être aussi petit qu'on veut et de n'avoir après lui que des termes supposés de plus en plus petits à mesure

il suffit d'y remplacer h par x et x par h pour lui donner cette autre forme,

$$f(h+x)=f(h)+\frac{x}{1}f'(h)+\frac{x^2}{1.2}f''(h)+\text{etc.}$$

qu'ils s'éloignent davantage. Si nous remplaçons la variable x par μx_1, μ étant une fraction, et que nous prenions positivement tous les termes compris dans la suite infinie

$$px^n + qx^{n+1} + \text{etc.},$$

il est clair que nous pouvons écrire

$$p(\mu x_1)^n + q(\mu x_1)^{n+1} + \text{etc.} < px_1^n[\mu^n + \mu^{n+1} + \text{etc.}] < \frac{\mu^n}{1-\mu}px_1^n.$$

Or, si rapprochée de 1 que soit la fraction μ, on peut toujours prendre le nombre n assez grand pour rendre la quantité $\frac{\mu^n}{1-\mu}px_1^n$ aussi petite qu'on veut. Il s'ensuit que si l'une ou l'autre des séries (9) et (10) cessait d'être convergente pour $x = x_1$ (les termes n'y changeant pas de signe comme dans la série (8)), il suffirait, pour rétablir la convergence, d'attribuer à r une valeur quelconque μx_1 moindre que x_1 *.

Concluons que dans toute fonction développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable la continuité subsiste nécessairement à partir de $r = o$ pour toute valeur inférieure à une certaine limite R.

23. Indépendamment de la continuité qui subsiste pour chacune des deux fonctions $\varphi(r,\theta)$, $\psi(r,\theta)$, il y a lieu d'observer que ces mêmes fonctions remplissent en outre certaines conditions particulières plus ou moins remarquables. La principale consiste

* Voici un exemple de ce cas. On a, comme nous l'avons vu au n° 18, page 48,

$$f(x) = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.};$$

et cette série ne cesse pas d'être convergente pour $x = 1$. Si l'on pose $\theta = \pi$ dans la série (9), correspondante au cas dont il s'agit, il vient

$$\varphi(r,\theta) = -r - \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} - \text{etc.} = \log(1-r),$$

et cette série, qui devient divergente pour $r = 1$, reste convergente pour toute valeur de r inférieure à l'unité.

en ce qu'elles reprennent mêmes valeurs aux deux limites $\theta = o$, $\theta = 2\pi$. Il est visible en effet que l'on a toujours et nécessairement

$$\varphi(r, o) = \varphi(r, 2\pi) \qquad \psi(r, o) = \psi(r, 2\pi).$$

Voilà donc une condition nouvelle, tout à fait distincte de la première et résultant comme elle de ce que la fonction donnée $f(h + x)$ est développable en série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable x. Cette condition en implique une autre qu'il convient d'indiquer, non pas seulement parce qu'elle est curieuse, mais surtout à raison du jour qu'elle jette sur les déductions ultérieures.

Imaginons qu'on prenne pour facteur l'expression imaginaire

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad e^{-n\theta\sqrt{-1}} = \cos n\theta - \sqrt{-1} \sin n\theta,$$

et qu'on multiplie par ce facteur les deux membres de l'équation

$$(2) \quad . \quad . \quad f(h + re^{\theta\sqrt{-1}}) = \varphi(r, \theta) + \sqrt{-1}\, \psi(r, \theta);$$

il vient

$$(3) \quad e^{-n\theta\sqrt{-1}} f(h + re^{\theta\sqrt{-1}}) = \varphi(r, \theta) \cos n\theta + \psi(r, \theta) \sin n\theta \\ - \sqrt{-1}\, [\varphi(r, \theta) \sin n\theta - \psi(r, \theta) \cos n\theta].$$

On a d'ailleurs, comme au n° 24,

$$(4) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(r, \theta) = a + br \cos \theta + cr^2 \cos 2\theta + \text{etc.}, \\ \psi(r, \theta) = br \sin \theta + cr^2 \sin 2\theta + \text{etc.} \end{array} \right.$$

De là résulte, en substituant ces valeurs dans l'équation (3) et en réduisant

$$(5) \quad e^{-n\theta\sqrt{-1}} f(h + re^{\theta\sqrt{-1}}) = \left\{ \begin{array}{l} a \cos n\theta + br \cos (n-1)\theta \\ + cr^2 \cos (n-2)\theta + \text{etc.}, \\ + pr^n + qr^{n+1} \cos \theta + \text{etc.}, \\ - \sqrt{-1} \left\{ \begin{array}{l} a \sin n\theta + br \sin (n-1)\theta \\ + cr^2 \sin (n-2)\theta + \text{etc.}, \\ + o - qr^{n+1} \sin \theta - \text{etc.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Cela posé, si l'on observe que, pour toute valeur entière du nombre m, l'on a généralement et évidemment

$$(6) \quad . \quad . \quad \mathrm{M}_0^{2\pi} \cos mx = o, \quad \mathrm{M}_0^{2\pi} \sin mx = o;$$

il s'ensuit que la convergence des séries qui figurent dans le second membre de l'équation (5), implique comme conséquence nécessaire le résultat suivant :

$$(7) \quad . \quad \mathrm{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}} . f(h + re^{\theta\sqrt{-1}}) = \mathrm{M}_0^{2\pi} p . r^n = p . r^n.$$

Prenons, de part et d'autre, dans chacun des membres de l'équation (7), la dérivée de l'ordre n par rapport à r. En vertu de la règle du n° 23, page 59, il faut, pour le premier membre, substituer à la fonction $f(h + re^{\theta\sqrt{-1}})$, la dérivée de l'ordre n, $e^{n\theta\sqrt{-1}} f^n(h + re^{\theta\sqrt{-1}})$. La dérivée du second membre est d'ailleurs $1 . 2 \ldots n . p$. Il vient donc

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{M}_0^{2\pi} f^n(h + re^{\theta\sqrt{-1}}) = 1 . 2 \ldots n . p.$$

L'équation (8), où le second membre est indépendant de r, montre que le premier n'en peut pas dépendre. Il est donc permis de poser $r = o$ et d'écrire, en conséquence,

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p = \frac{f^n(h)}{1 . 2 \ldots n}.$$

De là résulte, en prenant successivement pour n les valeurs 1, 2, 3, etc.,

$$(10) \quad . \quad f(h + x) = f(h) + \frac{x}{1} f'(h) + \frac{x^2}{1 . 2} f''(h) + \text{etc.}$$

On voit ainsi comment la formule de Taylor peut s'établir *à priori* par la considération des imaginaires, les coefficients qui se succèdent dans la série convergente

$$f(x + h) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.},$$

ne pouvant avoir d'autres valeurs que celles qui leur sont assignées par la loi de formation qui les régit dans cette même formule.

En restreignant au plus petit nombre possible les conditions qu'une fonction doit remplir pour être développable en série convergente suivant la formule de Taylor ou suivant celle de Maclaurin, nous voyons, d'après ce qui précède, qu'il en faut au moins deux.

La première consiste en ce que la continuité doit subsister à partir de $r = 0$, *pour toute valeur du module inférieure à une certaine limite* R.

La seconde exige que, dans cet intervalle, chacune des fonctions $\varphi(r, \theta)$, $\psi(r, \theta)$ *prenne pour* $\theta = 2\pi$ *même valeur que pour* $\theta = 0$.

Ces conditions nécessaires étant supposées remplies, nous allons démontrer qu'elles sont suffisantes.

Conditions à remplir pour qu'une fonction soit développable en série convergente suivant un des types réductibles aux formules de Taylor et de Maclaurin.

26. Théorème. — *Toute fonction est développable en série convergente suivant la formule de Taylor ou de Maclaurin, tant que le module de la variable reste moindre que la plus petite des valeurs pour lesquelles la fonction cesse d'être continue ou de prendre mêmes valeurs aux deux limites* $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ *.

Soit une fonction continue

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad y = f(h + x).$$

Remplaçant x par $re^{\theta\sqrt{-1}}$, on peut écrire

* Ce théorème important a été donné, pour la première fois, par M. Cauchy, sous une forme qui laissait prise à quelque incertitude. Nous avons cru devoir en modifier l'énoncé pour lui restituer toute la rigueur et toute la *généralité* qu'il comporte. (Voir le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome XI, 1846, et tome XII, 1847.) M. Maximilien Marie a rencontré cette même question dans sa *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires*. Il rectifie ce que les énoncés antérieurs avaient de vicieux et s'accorde avec M. Tchebicheff et moi sur le point principal. (Voir le *Journal* déjà cité, deuxième série, 1° tome V (1860), n°s 97 et 98; 2° tome VI (1861). Note finale).

(2) . . . $f(h + re^{\theta\sqrt{-1}}) = P + Q\sqrt{-1}.$

Considérons le produit

$$e^{-n\theta\sqrt{-1}}.f(h + re^{\theta\sqrt{-1}}),$$

équivalent à

$$(P + Q\sqrt{-1})(\cos n\theta - \sqrt{-1}\sin n\theta),$$

et dans lequel n est un nombre entier positif.

La dérivée de ce produit, prise par rapport à l'argument θ, est

$$\sqrt{-1}\left[re^{-(n-1)\theta\sqrt{-1}}.f'(h+re^{\theta\sqrt{-1}}) - ne^{-n\theta\sqrt{-1}}.f(h+re^{\theta\sqrt{-1}}\right].$$

Supposons que chacune des fonctions réelles P et Q prenne mêmes valeurs respectives aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ et qu'elle ne cesse pas d'être continûment variable entre ces mêmes limites. Il s'ensuit que le produit $e^{-n\theta\sqrt{-1}}f(h + re^{\theta\sqrt{-1}})$ remplit ces mêmes conditions, et que l'égalité subsistant entre la différence

$$e^{-2n\pi\sqrt{-1}}.f(h + re^{2\pi\sqrt{-1}}) - f(h + r) = o$$

et l'expression

$$2\pi\sqrt{-1}\,M_o^{2\pi}\left\{\begin{array}{l} re^{-(n-1)\theta\sqrt{-1}}.f'(h + re^{\theta\sqrt{-1}}) \\ - ne^{-n\theta\sqrt{-1}}.f(h + re^{\theta\sqrt{-1}}) \end{array}\right\}$$

implique, comme conséquence, l'équation suivante :

(3) $r\,M_o^{2\pi}\,e^{-(n-1)\theta\sqrt{-1}}.f'(h + re^{\theta\sqrt{-1}}) = n\,M_o^{2\pi}\,e^{-n\theta\sqrt{-1}}f(h + re^{\theta\sqrt{-1}}).$

Posons, pour simplifier,

(4) . . . $F(r) = M_o^{2\pi}\,e^{-n\theta\sqrt{-1}}.f(h + re^{\theta\sqrt{-1}}).$

Il en résulte, conformément à la règle du n° 23, page 59,

$$(5) \quad \ldots \quad F'(r) = \mathrm{M}_0^{2\pi} e^{-(n-1)\theta\sqrt{-1}} . f'(h + re^{\theta\sqrt{-1}}),$$

et, substituant dans l'équation (3) les valeurs fournies par les équations (4) et (5),

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad rF'(r) = nF(r).$$

Opérons sur l'équation (6) et sur celles qui s'en déduisent, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à r. On trouve ainsi

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} rF''(r) = (n-1)\,F'(r), \\ rF'''(r) = (n-2)\,F''(r), \\ \ldots\ldots\ldots \\ rF^{n-1}(r) = 2\,.\,F^{n-2}(r), \\ rF^{n}(r) = 1\,.\,F^{n-1}(r), \end{cases}$$

et, en dernier lieu,

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad r\,.\,F^{n+1}(r) = o.$$

L'équation (8) n'étant possible qu'autant que la dérivée de l'ordre n, $F^n(r)$, est une quantité constante, on a nécessairement

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad F^n(r) = \mathrm{cons^{te}}.$$

Si, d'ailleurs, on multiplie membre à membre les équations (6) et (7), il vient

$$(10) \quad \ldots \quad r^n F^n(r) = 1\,.\,2 \ldots n\,.\,F(r),$$

et, eu égard à l'équation (9),

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad F(r) = C\,.\,r^n.$$

C étant une constante.

Substituons dans l'équation (4) la valeur fournie par l'équation (11). On a, comme conséquence des déductions qui précèdent,

$$(12) \quad \ldots \quad Cr^n = \mathrm{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}} . f(h + re^{\theta\sqrt{-1}}).$$

Cela posé, imaginons que le module r puisse varier depuis o jusqu'à une certaine limite R sans que les fonctions P et Q cessent de remplir les conditions précédemment indiquées. En ce cas, la constante C conserve, pour tout cet intervalle, une seule et même valeur; il vient donc, en prenant la dérivée de l'ordre n par rapport à r,

$$1.2\ldots n.\mathrm{C} = \mathrm{M}_0^{2\pi} f^n(h + re^{\theta\sqrt{-1}}).$$

Le premier membre de cette équation étant indépendant de r, il s'ensuit que le second n'en dépend pas non plus, et qu'on peut y poser $r = o$, sans en changer la valeur. De là résulte

$$\mathrm{C} = \frac{f^n(h)}{1.2\ldots n}.$$

Cette valeur transportée dans l'équation (12) donne, en remplaçant r par R,

$$(13)\quad \frac{f^n(h)}{1.2\ldots n} = \frac{1}{\mathrm{R}^n}\mathrm{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}}.f(h + \mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}).$$

Considérons la série

$$(14)\quad f(h) + x\frac{f'(h)}{1} + x^2\frac{f''(h)}{1.2} + \text{etc.} + x^n\frac{f^n(h)}{1.2\ldots n} + \text{etc.}$$

et désignons par P', Q' les valeurs *maxima* affectées par les fonctions P et Q, lorsqu'on y remplace r par R et qu'on fait varier l'argument θ depuis o jusqu'à 2π. On a évidemment*,

$$(15)\ \mathrm{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}}f(h + \mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}) = \mathrm{M}_0^{2\pi}(\mathrm{P}\cos n\theta + \mathrm{Q}\sin n\theta) < \mathrm{P}' + \mathrm{Q}'.$$

* L'équation (13) exige que la partie imaginaire du produit

$$e^{-n\theta\sqrt{-1}}f(h + \mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}) = (\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1})(\cos n\theta - \sqrt{-1}.\sin n\theta)$$

s'évanouisse dans la moyenne

$$\mathrm{M}_0^{2\pi} e^{-n\theta\sqrt{-1}}f(h + \mathrm{R}e^{\theta\sqrt{-1}}).$$

Il en résulte que la partie réelle représentée généralement par le binôme $\mathrm{P}\cos n\theta + \mathrm{Q}\sin n\theta$ est la seule que l'on ait à considérer dans la formation de cette même moyenne.

Remarquons en outre que, par hypothèse, les quantités P′ et Q′ sont nécessairement finies.

En vertu de l'équation (13) et de l'inégalité (15), la série (14) est nécessairement convergente pour toute valeur de la variable x inférieure à R. La conséquence évidente est qu'on peut écrire, suivant la formule de Taylor,

$$(16) \quad . \quad f(h+x) = f(h) + \frac{x}{1} f'(h) + \frac{x^2}{1.2} f''(h) + \text{etc.}$$

Si d'ailleurs on pose

$$f(x+h) = \text{F}(x),$$

ce qui donne en général

$$f^n(h) = \text{F}^n(o),$$

il est visible qu'il y a identité entre la formule (16) et cette autre formule dite *de Maclaurin*

$$\text{F}(x) = \text{F}(o) + \frac{x}{1}\text{F}'(o) + \frac{x^2}{1.2}\text{F}''(o) + \text{etc.} + \frac{x^n}{1.2\ldots n}\text{F}^n(o) + \text{etc.}$$

Résumant ce qui précède, nous sommes en droit de conclure que les deux conditions énoncées à la fin du n° 25, page 66, et reconnues nécessaires pour la possibilité du développement, sont en même temps suffisantes. De là résulte le théorème qu'il s'agissait de démontrer, et qu'on peut compléter comme il suit :

Toute fonction est développable en série convergente, suivant la formule de Taylor ou de Maclaurin, tant que le module de la variable reste moindre que la plus petite des valeurs pour lesquelles la fonction cesse d'être continue ou de prendre même valeur aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. Lorsqu'on dépasse la plus petite de ces valeurs, la série devient divergente *.

* Il est bien entendu que la fonction considérée est censée n'admettre pour chaque valeur de la variable qu'une valeur unique, correspondante à une branche distincte et isolée. C'est cette valeur qui, par hypothèse, concourt exclusivement à la formation de tous les coefficients de la série.

27. Les résultats qui précèdent comportent une extension qu'il convient d'indiquer.

1er CAS. — La condition relative aux deux limites $\theta = 0, \theta = 2\pi$ étant supposée remplie, il peut arriver que la continuité cesse lorsque le module s'annule. En ce cas, si l'on prend au lieu de la fonction le produit de cette fonction par une certaine puissance de la variable et que l'on pose, par exemple,

$$x^n f(h + x) = \mathrm{F}(x),$$

la première condition ne cessera pas d'être remplie. On voit en outre que la fonction $\mathrm{F}(x)$ sera continue en même temps que $f(x + h)$ et pourra l'être encore pour $r = o$. Il viendra donc, en admettant que l'exposant n soit convenablement déterminé,

$$x^n f(h + x) = \mathrm{F}(o) + \frac{x}{1}\mathrm{F}'(o) + \frac{x^2}{1.2}\mathrm{F}''(o) + \text{etc.},$$

et l'on peut en déduire

$$f(x + h) = x^{-n}\mathrm{F}(o) + \frac{x^{-(n-1)}}{1}\mathrm{F}'(o) + \frac{x^{-(n-2)}}{1.2}\mathrm{F}''(o) + \text{etc.}$$

2me CAS. — Les fonctions P et Q ne prenant pas mêmes valeurs respectives aux deux limites $\theta = o$, $\theta = 2\pi$, cette condition peut avoir lieu aux deux limites $\theta = o$, $\theta = 2m\pi$. En ce cas, tous les calculs, tous les raisonnements qui précèdent demeurent applicables, pourvu que l'on remplace 2π par $2m\pi$, et l'équation (8) du n° 24, page 61, par l'équation suivante :

(1). . . . $f(h + x) = a + bx^{\frac{1}{m}} + cx^{\frac{2}{m}} + \text{etc.}$

Posons

(2). . . . . $x = u^m$

et

(3). . . . . $\mathrm{F}(u) = f(h + u^m)$,

Il vient

$$\mathrm{F}(u) = a + bu + cu^2 + \text{etc.}$$

Par hypothèse, la série $a + bu + cu^2 +$, etc., est convergente à partir de $u = o$. On a donc, conformément à ce qui précède,

$$a = F(o), \quad b = F'(o), \quad c = F''(o), \quad \text{etc.}$$

De là résulte

$$f(h + x) = F(u) = F(o) + x^{\frac{1}{m}} F'(o) + \frac{x^{\frac{2}{m}}}{1.2} F''(o) + \text{etc.}$$

3me Cas. — En admettant les mêmes choses qu'au cas précédent, supposons en outre que pour établir la continuité à partir de o, il faille multiplier $f(x + h)$ par $x^{\frac{n}{m}}$. Si l'on pose, comme tout à l'heure,

$$x = u^m$$

et

$$x^{\frac{n}{m}} f(h + x) = X(u),$$

il viendra d'abord,

$$X(u) = X(o) + \frac{u}{1} X'(o) + \frac{u^2}{1.2} X''(o) + \text{etc.},$$

et, par suite,

$$f(h + x) = x^{-\frac{n}{m}}.\, X(o) + \frac{x^{-\frac{n-1}{m}}}{1} X'(o) + \frac{x^{-\frac{n-2}{m}}}{1.2} X''(o) + \text{etc.}$$

Le théorème du n° 26 se trouvant ainsi généralisé, nous dirons maintenant :

Toute fonction est développable en série convergente suivant un des types réductibles aux formules de Taylor ou de Maclaurin, tant que le module de la variable reste moindre que la plus petite des valeurs pour laquelle le produit de la fonction, par une certaine puissance de la variable, cesse d'être continu ou de prendre même valeur aux deux limites $\theta = o$, $\theta = 2m\pi$.

Ajoutons que le nombre m se détermine par la condition des limites et la puissance $\frac{n}{m}$ de la variable par la condition de continuité à l'origine des valeurs du module.

28. Les considérations développées ci-dessus s'appliquent de la même manière au développement des fonctions en séries convergentes ordonnées suivant les puissances descendantes de la variable. Bornons-nous au cas le plus simple, celui où la fonction donnée $f(h+x)$ reste continue et satisfait en outre à la condition des limites pour toute valeur du module supérieure à une certaine quantité R.

Si l'on pose

$$x = \frac{1}{u}$$

et

$$f(h+x) = f\left(h + \frac{1}{u}\right) = \mathrm{F}(u),$$

de même qu'en remplaçant x par $re^{\theta\sqrt{-1}}$, l'on a, par hypothèse,

$$f(h+x) = f(h + re^{\theta\sqrt{-1}}) = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1};$$

de même, en remplaçant u par $r'e^{\theta\sqrt{-1}} = \frac{1}{r}e^{\theta\sqrt{-1}}$, il vient nécessairement (le signe du radical étant seul changé)

$$\mathrm{F}(u) = f(h + re^{-\theta\sqrt{-1}}) = \mathrm{P} - \mathrm{Q}\sqrt{-1}.$$

La conséquence est que, pour toute valeur du module r' inférieure à $\frac{1}{\mathrm{R}}$, la fonction F (u) reste continue et prend même valeur aux deux limites $\theta = o$, $\theta = 2\pi$. Il suit de là qu'on peut écrire immédiatement

$$\mathrm{F}(u) = \mathrm{F}(o) + \frac{u}{1}\mathrm{F}'(o) + \frac{u^2}{1.2}\mathrm{F}''(o) + \text{etc.}$$

et, par suite,

$$f(h+x) = \mathrm{F}(o) + \frac{x^{-1}}{1}\mathrm{F}'(o) + \frac{x^{-2}}{1.2}\mathrm{F}''(o) + \text{etc.}$$

29. Terminons ce sujet par une application particulière, et proposons-nous, pour exemple, de rechercher dans quels cas la fonction $(1+x)^m$ peut être développée en série convergente suivant les formules de Taylor et Maclaurin *.

En remplaçant la variable x par $re^{\theta\sqrt{-1}}$, l'on a

$$(1+x)^m = [1 + re^{\theta\sqrt{-1}}]^m = [1 + r\cos\theta + \sqrt{-1}.r\sin\theta]^m.$$

Faisons

$$(1). \quad . \quad . \quad 1 + r\cos\theta = \rho\cos\alpha, \quad r\sin\theta = \rho\sin\alpha;$$

il vient

$$(2)\ (1+x)^m = \rho^m[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha]^m = \rho^m(\cos m\alpha + \sqrt{-1}\sin m\alpha),$$

et l'on a en même temps

$$(3). \quad . \quad \rho = \sqrt{1 + r^2 + 2r\cos\theta}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{r\sin\theta}{1 + r\cos\theta}.$$

De là résulte

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\theta}{1 + r\cos\theta},$$

et, par suite,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\alpha = \frac{r(r + \cos\theta)}{1 + r^2 + 2r\cos\theta}d\theta.$$

La moindre valeur du trinôme $1 + r^2 + 2r\cos\theta$ est évidemment celle qui correspond à $\theta = \pi$, c'est-à-dire $(1-r)^2$. Elle n'est jamais inférieure à zéro.

* La distinction établie entre ces deux formules est plus apparente que réelle. Le développement $1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 +$ etc., pouvant être considéré comme effe tué suivant la formule de Taylor ou suivant la formule de Maclaurin, selon que l'on représente par $f(1+x)$ ou par $F(x)$ la fonction donnée $(1+x)^m$.

Cela posé, soit d'abord

$$r < 1.$$

La simple inspection des équations (4) et (5) met en évidence les résultats suivants :

L'angle θ croissant à partir de zéro jusqu'à 2π, désignons par θ' et θ'' les valeurs de cet angle comprises, l'une dans le deuxième quadrant, l'autre dans le troisième, et déterminées toutes deux par l'équation de condition

$$\cos\theta = -r.$$

L'angle α supposé nul pour $\theta = o$ croît jusqu'à la valeur $\text{arc tg}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$ comprise dans le premier quadrant et correspondante à $\theta = \theta'$. Il décroît ensuite et s'annule pour $\theta = \pi$. De $\theta = \pi$ à $\theta = 2\pi$ l'angle α prend négativement les valeurs qu'il a prises positivement de $\theta = o$ à $\theta = \pi$. Il décroît ainsi jusqu'à la valeur arc tg $\frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}$ comprise entre o et $-\frac{\pi}{2}$ et correspondante a $\theta = \theta''$. Il croît ensuite jusqu'à s'annuler de nouveau pour $\theta = 2\pi$.

Il suit de là, conformément aux équations (2) et (3), que, quel que soit l'exposant m entier ou fractionnaire, positif ou négatif, la fonction $(1 + x)^m$ ne cesse pas d'être continue et de prendre même valeur aux deux limites $\theta = o$, $\theta = 2\pi$. Elle est donc développable en série convergente d'après la formule de Taylor ou de Maclaurin, pour toute valeur de x inférieure à l'unité.

Soit maintenant

$$r > 1.$$

En procédant, comme tout à l'heure, on reconnaît d'abord que l'angle α ne cesse pas de croître avec l'angle θ. On voit ensuite qu'il passe en même temps que θ par les valeurs o, π, 2π. Il suit de là que la continuité subsiste en général, mais que la condition des limites cesse d'être remplie pour toute valeur fractionnaire de l'exposant m. La conséquence est que la série devient divergente, lorsque, l'exposant m étant fractionnaire, on attribue à x une valeur plus grande que l'unité.

Soit, en dernier lieu,

$$r = 1.$$

L'équation (5) se réduisant à

$$d\alpha = \frac{1}{2} d\theta.$$

on voit que l'angle α croît avec θ et moitié moins vite. De là résulte généralement

$$\alpha = \frac{\theta}{2}.$$

On a d'ailleurs

$$\sin \theta = \rho \sin \alpha.$$

On voit donc aussi que la quantité ρ change de signe en passant par zéro pour $\theta = \pi$. Positive d'abord, elle devient ensuite et reste négative.

En s'annulant pour $\theta = \pi$ la quantité ρ interrompt la continuité toutes les fois que l'exposant m est négatif. Elle la laisse subsister dans le cas contraire. On voit en outre que la condition des limites ne cesse pas d'être remplie pour toute valeur entière et positive de l'exposant m, les deux facteurs ρ^m et $\cos m\alpha$ prenant tous deux même signe et conservant chacun même valeur absolue aux deux limites $\alpha = o$, $\alpha = \pi$. Il suit de là que c'est exclusivement dans le cas où l'exposant m est entier et positif que la série subsiste pour des valeurs de la variable plus grandes que l'unité. Ce cas est aussi le seul où la variable r peut, en croissant à partir de zéro, franchir la valeur 1 sans solution de continuité. Lorsque l'exposant m est négatif, la fonction $(1 + x)^m$ prend la forme $\frac{1}{0}$ pour $r = 1$ et $\theta = \pi$. Lorsqu'il est fractionnaire et qu'on passe, pour $\theta = 2\pi$, d'une valeur de la variable r, moindre que l'unité, à une valeur plus grande que l'unité, les valeurs correspondantes de la fonction $(1 + x)^m$ sont respectivement $(1 + r)^m$ et $(1 + r)^m [\cos 2m\pi + \sqrt{-1} \sin 2m\pi]$ *. On voit donc qu'elles subissent nécessairement un changement brusque de détermination.

* Ne pas perdre de vue que, par hypothèse, m est fractionnaire et qu'en général, les valeurs de l'angle α qui correspondent à $\theta = 2\pi$ sont respectivement o ou 2π, selon que le module r est plus petit ou plus grand que l'unité.

CHAPITRE V.

THÉORIE GÉNÉRALE DES MAXIMA ET MINIMA.

---

30. Nous avons déjà vu ce qu'on entend par valeur *maxima* ou *minima* d'une quantité continûment variable. La valeur *maxima* se distingue et se caractérise en ce qu'elle est plus grande que celles qui la précèdent et la suivent immédiatement. L'inverse a lieu pour la valeur *minima* : ce qui la distingue et la caractérise, c'est qu'elle est plus petite que celles qui s'y rattachent, de part et d'autre, par voie de succession continue. A la quantité qui varie substituons, par la pensée, le segment de droite qui la représente comme équivalent numérique. Pour que ce segment prenne une valeur *maxima* ou *minima*, il faut que la vitesse du point qui le décrit change de sens, devenant négative de positive qu'elle était ou cessant d'être négative pour devenir positive. La conséquence évidente est que les valeurs *maxima* ou *minima* d'une fonction correspondent aux changements de signes de la fonction dérivée, les uns impliquant les autres et réciproquement.

En général, la continuité subsiste et si la dérivée change de signe c'est en passant par zéro. Ce sera donc, le plus souvent, en égalant à zéro la fonction dérivée qu'on déterminera les valeurs de la variable qui rendent *maxima* ou *minima* la fonction primitive. Déjà nous avons traité cette question en procédant *à priori* et d'une manière directe. Résolvons-la de nouveau en nous appuyant sur la formule 1 du n° 7, page 22.

Soit une fonction quelconque

$$y = f(x) :$$

on suppose que, pour une valeur a de la variable x, une ou plusieurs des dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, etc., s'annulent en même temps, la première de celles qui ne s'annulent pas étant la dérivée de l'ordre n, $f^n(x)$.

Désignons par h une quantité quelconque prise *positivement* et aussi petite qu'on veut.

Si dans la formule (1) des numéros 7 ou 16, pages 22 et 44, on remplace n par $n-1$, x par a, et qu'on ait égard à l'égalité

$$M_x^{x+h}(z-x)^{n-1}f^n(x) = h^{n-1}M_0^1(1-u)^{n-1}f^n(a+uh),$$

on a, en général, l'identité

$$(1).\ f(a+h)-f(a) = \frac{h^n}{1.2...(n-1)}M_0^1(1-u)^{n-1}f^n(a+uh),$$

et, par suite,

$$(2).\ f(a-h)-f(a) = \frac{(-h)^n}{1.2...(n-1)}M_0^1(1-u)^{n-1}f^n(a-uh).$$

Cela posé, voici les conséquences pour toute valeur de h inférieure à une certaine limite :

1° La quantité $f^n(a)$ donne son signe à chacune des deux fonctions

$$M_0^1(1-u)^{n-1}f^n(a+uh), \quad M_0^1(1-u)^{n-1}f^n(a-uh).$$

2° Les différences $f(a+h)-f(a)$, $f(a-h)-f(a)$ sont toutes deux de même signe ou de signe contraire, selon que l'indice n est pair ou impair.

3° Pour que la valeur a de la variable x rende *maxima* ou *minima* la valeur correspondante $f(a)$, il faut qu'elle annule la dérivée première $f'(x)$, et, si elle annule en même temps la dérivée seconde $f''(x)$, il faut que la première des dérivées successives qu'elle n'annule point soit d'ordre pair.

4° En admettant que la valeur a de la variable x annule la dérivée $f'(x)$ et que la première des dérivées suivantes qu'elle n'annule point soit d'ordre pair, la valeur $f(a)$ est *maxima* ou *minima* selon que cette dérivée d'ordre pair est négative ou positive pour $x=a$.

Concluons que la marche à suivre, pour déterminer les valeurs *minima* ou *maxima* d'une fonction quelconque

$$y=f(x),$$

consiste, en général, à résoudre l'équation

$$f'(x)=0,$$

et, si cette équation admet des racines réelles, à s'assurer, pour chacune, que la première des dérivées successives qu'elle n'annule point est de rang pair. La substitution se fait d'abord dans la dérivée seconde $f''(x)$, puis, s'il y a lieu, dans les dérivées suivantes, jusqu'à celle qui ne s'annule point. D'après l'ordre et le signe de cette dernière dérivée, on juge s'il y a ou non *maximum* ou *minimum*, et lequel des deux, le tout conformément aux indications précédentes.

31. Lorsqu'il s'agit d'appliquer la théorie qui précède, il est souvent plus simple de s'en tenir exclusivement à la considération de la dérivée première et de rechercher, en opérant sur elle, si elle change ou non de signe en passant par zéro. Cela revient à considérer la formule générale

$$(1) \quad \ldots \quad f(a \pm h) - f(a) = \pm h\mathrm{M}_0^1 f'(a \pm uh).$$

On voit par cette formule, ainsi que nous l'avons montré d'abord par un simple raisonnement, que la condition du *maximum* et du *minimum* se réduit à ce que la dérivée change de

signe en passant par la valeur $f'(a)$. Il y a *maximum* ou *minimum*, selon que ce changement a lieu du positif au négatif, ou inversement.

L'emploi de la formule (1) ou, ce qui revient au même, la recherche des valeurs de la variable auxquelles correspondent des changements de signe de la fonction dérivée présente l'avantage d'être applicable à tous les cas possibles. En général, avons-nous dit, la continuité subsiste, et si la dérivée change de signe, c'est en passant par zéro. Il est des cas, cependant, où la fonction reste continue sans qu'il en soit de même de sa dérivée, celle-ci pouvant changer de signe en passant par la forme $\frac{1}{0}$ ou même sans passer par cette forme et sans s'annuler.

En posant et résolvant l'équation

$$\frac{1}{f'(x)} = o,$$

on détermine les valeurs de la variable auxquelles correspondent les changements de signe que la dérivée peut subir en passant par la forme $\frac{1}{0}$. Il suffit ensuite de recourir à l'équation (1) pour reconnaître si ce passage est ou non accompagné d'un changement de signe, et, par conséquent, s'il y a ou non *maximum* ou *minimum* dans la valeur correspondante de la fonction donnée.

La détermination des valeurs que la variable ne peut franchir sans que la fonction dérivée change de signe semble se compliquer et devenir très-difficile, lorsque le changement de signe ne correspond pas au passage par zéro ou par l'infini. En général, les difficultés ne sont point considérables et, presque toujours, il suffit d'une étude attentive sur la dérivée pour résoudre complétement la question des valeurs *maxima* et *minima* de la fonction que l'on considère.

32. La fonction dont on cherche les valeurs *maxima* ou *minima* peut être implicite et déterminée par plusieurs équations simultanées. Rien n'est changé pour cela dans les règles à suivre :

le calcul seul devient plus compliqué. Soit, pour exemple, une fonction z déterminée par les deux équations

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad F(x, y, z) = o, \qquad f(x, y, z) = o.$$

On en déduit

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = o.$$

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = o.$$

Posons

$$\frac{dz}{dx} = o,$$

et éliminons $\frac{dy}{dx}$. Il vient

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{dF}{dx} \cdot \frac{df}{dy} = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{df}{dx}.$$

La combinaison des équations (1) et (4) détermine les valeurs cherchées pour x, y, z. Le reste s'achève, soit en différenciant les équations (2) et (3) de manière à obtenir la valeur de la dérivée seconde $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, soit en déduisant de ces mêmes équations la valeur générale de la dérivée première $\frac{dz}{dx}$. Dans un cas comme dans l'autre on applique les principes exposés ci-dessus et l'on reconnaît s'il y a *maximum* ou *minimum*.

Soit encore, pour exemple, une fonction u déterminée par les trois équations

$$(5). \quad . \quad . \quad F(x, y, z, u) = o, \quad f(x, y, z, u) = o, \quad \varphi(x, y, z, u) = o.$$

En opérant comme tout à l'heure et posant $\frac{du}{dx} = 0$, on a

d'abord

$$(6). \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = o,$$

$$(7). \quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = o,$$

$$(8). \quad \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = o.$$

Il reste ensuite à éliminer les quantités $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ de manière à obtenir l'équation de condition qui s'ajoute aux équations (5) et fixe avec elles les valeurs cherchées pour les variables x, y, z, u. Indiquons à cet effet un procédé d'élimination, souvent plus avantageux que le procédé direct.

Après avoir multiplié l'équation (7) par le facteur λ et l'équation (8) par le facteur μ, ajoutons membre à membre les équations (6) (7) (8) et égalons à zéro les coefficients des quantités $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. De là résulte

$$(9) \quad \frac{dF}{dx} + \lambda \frac{df}{dx} + \mu \frac{d\varphi}{dx} = o,$$

$$(10). \quad \frac{dF}{dy} + \lambda \frac{df}{dy} + \mu \frac{d\varphi}{dy} = o,$$

$$(11). \quad \frac{dF}{dz} + \lambda \frac{df}{dz} + \mu \frac{d\varphi}{dz} = o.$$

et l'équation de condition cherchée s'obtient en éliminant λ et μ entre les équations (9), (10), (11).

Le reste s'achève comme nous l'avons dit ci-dessus.

33. Considérons le cas où la fonction donnée dépend de plusieurs variables. Ainsi que nous l'avons déjà fait voir et que nous l'avons rappelé au n° 22, page 54, le cas général se ramène très-simplement à celui d'une seule variable indépendante. Il suffit pour cela d'introduire, par la pensée, une variable auxiliaire prise pour variable indépendante; et, afin que toutes les autres en devien-

nent fonction, de concevoir au besoin une ou plusieurs relations arbitraires que l'on ne détermine point aussi longtemps qu'on le juge convenable et dont, pourtant, il est toujours permis de disposer.

Soit, pour exemple, une fonction de deux variables

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad z = F(x, y).$$

Désignons par t la variable auxiliaire prise pour variable indépendante et posons

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Il vient

$$z = F(x, y) = f(t).$$

La condition du *maximum* ou du *minimum* exigeant, en général, que la dérivée $f'(t)$ soit égale à zéro, on a d'abord,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f'(t) = \frac{dz}{dx}\varphi'(t) + \frac{dz}{dy}\psi'(t) = o.$$

Or, s'il s'agit d'un *maximum* ou d'un *minimum* absolu de la fonction z, il faut que la relation (2) subsiste indépendamment de toute détermination particulière des fonctions arbitraires $\varphi(t)$ $\psi(t)$. Il en résulte que cette relation implique les deux équations simultanées,

$$(3). \quad . \quad . \quad F'_x(x, y) = \frac{dz}{dx} = o, \qquad F'_y(x, y) = \frac{dz}{dy} = o,$$

et que de là se déduisent les valeurs des variables x, y susceptibles de rendre *maxima* ou *minima* les valeurs correspondantes de la fonction.

Les valeurs fournies par les équations (3) exigeant, en certains cas, qu'on les substitue dans les dérivées successives $f''(t)$, $f'''(t)$, etc., il vient d'abord

$$(4). \quad . \; f''(t) = \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\varphi'(t)^2 + 2\left(\frac{d^2z}{dx.dy}\right)\varphi'(t)\psi'(t) + \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\psi'(t)^2.$$

Observons que la dérivée seconde $f''(t)$ se présente ici sous une forme particulière. Cette forme est précisément celle qu'elle affecte, en général, lorsque, disposant jusqu'à un certain point des fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$, on les suppose toutes deux linéaires, c'est-à-dire du premier degré en t. La même simplification se reproduirait pour la dérivée troisième $f'''(t)$, si les valeurs déduites des équations (3) annulaient les dérivées partielles

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \quad \left(\frac{d^2z}{dx.dy}\right), \quad \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right),$$

et, ainsi de suite, pour toutes les dérivées successives.

Cela posé, on voit qu'en ce qui concerne les substitutions à faire dans la suite des dérivées $f''(t)$, $f'''(t)$, etc., il est permis de supprimer d'avance les termes où figurent les coefficients différentiels $\varphi''(t)$, $\psi''(t)$, $\varphi'''(t)$, $\psi'''(t)$, etc. Si la suppression est permise, en même temps que la substitution devient nécessaire, c'est parce que chacun de ces termes se trouve affecté d'un facteur qui s'évanouit, et non point, *parce qu'on dispose en aucune façon* des fonctions arbitraires $\varphi(t)$, $\psi(t)$. On parvient au même résultat lorsqu'on traite *à priori* les dérivées $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ comme des quantités constantes, et tel est le point de vue auquel on se place habituellement. Mais procéder ainsi, c'est dépouiller la solution de la généralité qu'elle comporte; il paraît donc préférable de suivre la marche que nous venons d'indiquer *.

* La théorie des valeurs *maxima* ou *minima* des fonctions de plusieurs variables peut s'établir en se fondant sur les formules (5) et (6) du n° 22, page 57. Lorsqu'on procède ainsi, il importe d'avoir égard à l'observation développée ci-dessus. Ces formules ne subsistent, en effet, qu'avec une certaine restriction, provenant de l'hypothèse admise en ce qui concerne la forme des fonctions $\varphi(t) = a + ht$, $\psi(t) = b + kt$. Ainsi, par exemple, s'il s'agissait d'une surface ayant pour équation

$$z = F(x, y).$$

par cela seul qu'on suppose x et y fonctions linéaires de la variable t, il s'ensuit que la variable y devient fonction linéaire de la variable x. La consé-

En divisant par $\psi'(t)^2$ le second membre de l'équation (4), on le ramène à la forme

$$\left[\frac{\varphi'(t)}{\psi' t}\right]^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + 2\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} \cdot \left(\frac{d^2 z}{dxdy}\right) + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right).$$

Dans le cas du *maximum* ou du *minimum* absolu, ce second membre doit satisfaire à la double condition de ne point s'annuler et de conserver un seul et même signe indépendamment de toute valeur particulière attribuée au rapport $\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$. Il faut donc que l'on ait

$$(5) \quad \ldots\ldots \left[\frac{d^2 z}{dxdy}\right]^2 < \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right).$$

ce qui exige avant tout que les dérivées partielles $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)$ soient toutes deux de même signe.

Cela posé, deux cas sont possibles selon que les valeurs obtenues pour x et y par la résolution des équations (3) satisfont ou non à l'inégalité (5). Dans le premier cas, il y a *maximum* ou *minimum* absolu, suivant que les dérivées partielles $\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$ $\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)$ sont négatives ou positives. Dans le second cas, il n'y a plus, en général, que *maximum* ou *minimum* relatif, ou bien encore la marche de la fonction n'offre rien de particulier.

Lorsque les trois dérivées du second ordre s'annulent en même temps que les deux dérivées du premier ordre, il faut recourir aux dérivées $f'''(t)$, $f^{\text{IV}}(t)$, etc., et poursuivre le cours des déductions en appliquant les règles du n° 30.

34. Les détails dans lesquels nous venons d'entrer en prenant pour exemple une fonction de deux variables

$$z = \mathrm{F}(x, y)$$

quence est que les résultats se présentent comme n'étant applicables qu'aux sections planes faites dans la surface perpendiculairement au plan des xy.

s'appliquent exclusivement au cas où la dérivée $f'(t)$ change de signe en passant par zéro. En général on a, conformément à l'identité (6) du n° 22, page 57,

$$\begin{aligned} F(x \pm h, y \pm k) - F(x, y) = &\pm h M_0^1 F'_x(x \pm hu, y \pm ku) \\ &\pm k M_0^1 F'_y(x \pm hu, y \pm ku), \end{aligned}$$

et, s'il s'agit d'un changement de signe que la dérivée subisse en passant par la forme $\frac{1}{0}$, c'est à cette dernière formule qu'il faut avoir recours, en procédant comme au n° 31. La question se complique ici de la présence simultanée de deux fonctions dérivées susceptibles de prendre en même temps ou séparément la forme $\frac{1}{0}$. Toutefois, comme on dispose arbitrairement de chacune des quantités h et k et qu'on peut annuler l'une ou l'autre à volonté, il est visible qu'on doit procéder d'abord en opérant ainsi, c'est-à-dire en annulant, l'une après l'autre et séparément, chacune de ces deux quantités. La continuité qui subsiste, par hypothèse, dans la fonction exige que chacun des produits

$$hM_0^1 F'_x(x \pm hu, y), \qquad kM_0^1 F'_y(x, y \pm k),$$

converge vers zéro, le premier avec h, le second avec k. Ce n'est d'ailleurs qu'en passant par zéro ou par l'infini que chacune des deux dérivées partielles $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ peut, en général, changer de signe. Ce sera donc, presque toujours, en résolvant le système des équations simultanées

$$\frac{1}{F'_x(x, y)} = 0, \qquad \frac{1}{F'_y(x, y)} = 0,$$

ou

$$\frac{1}{F'_x(x, y)} = 0, \qquad F'_y(x, y) = 0,$$

ou bien encore

$$F'_x(x, y) = 0, \qquad \frac{1}{F'_y(x, y)} = 0,$$

qu'on déterminera les valeurs des variables x, y, auxquelles peuvent correspondre les *maxima* ou *minima* cherchés.

Pour qu'il y ait *maximum* ou *minimum*, il ne suffit pas que l'un ou l'autre de ces systèmes fournisse des valeurs réelles, ni que ces valeurs substituées dans les deùx produits

$$\pm h M_0^1 F'_x(x \pm hu, k), \quad \pm k M_0^1 F'_y(x, y \pm ku),$$

leur donnent un seul et même signe pour toutes valeurs des quantités h et k inférieures à une certaine limite. Il faut en outre que cette dernière condition ne cesse pas d'être satisfaite, lorsque à ces produits l'on substitue les suivants :

$$\pm h M_0^1 F'_x(x \pm hu, y \pm ku), \quad \pm k M_0^1 F'_y(x \pm hu, y \pm ku).$$

CHAPITRE VI.

DE L'EMPLOI DES IMAGINAIRES DANS L'ANALYSE.

Réalité des solutions dites imaginaires.

35. Soit

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x^2 + y^2 = r^2$$

l'équation d'un cercle ayant son centre à l'origine et rapporté à des axes coordonnés rectangulaires.

Imaginons qu'on se donne une droite quelconque

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = ax + b$$

située dans le plan du cercle (1) et rapportée aux mêmes axes. Imaginons en outre qu'on se propose de déterminer les points communs à ce cercle et à cette droite.

S'il est un point commun à ces deux lignes, l'abscisse de ce point doit satisfaire à l'équation

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x^2 + (ax + b)^2 = r^2.$$

De là résulte, conformément aux règles du calcul algébrique,

$$(4) \quad \ldots \quad x = \frac{-ab \pm \sqrt{(a^2+1)r^2 - b^2}}{a^2+1}.$$

L'équation (3) impliquant l'équation (4), il s'ensuit que la valeur cherchée pour x se présente sous la forme

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad p + q\sqrt{-1},$$

et cesse, par conséquent, d'être numériquement assignable toutes les fois que l'on a

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad r < \frac{b}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Le second membre de l'inégalité (6) exprime, ainsi qu'on le voit aisément, la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle (1) sur la droite (2). L'inégalité, lorsqu'elle subsiste, indique que cette perpendiculaire est plus grande que le rayon du cercle. La conséquence est qu'en ce cas la droite ne peut pas rencontrer le cercle, et si la solution cherchée semble faire défaut, c'est qu'on est en présence d'une impossibilité qui se révèle sous la forme d'une imaginaire.

Il peut, au premier abord, paraître singulier que là, où la solution qu'on cherche n'existe pas, l'algèbre semble aller au delà de ce qu'on demande, et fournir, sous une forme rigoureusement déduite, un résultat purement illusoire. Un examen plus attentif du rôle assigné à l'algèbre permet de reconnaître que les solutions, *qu'on dit imaginaires*, au point de vue restreint du problème mis en équation, ne diffèrent en rien, relativement à cette équation, des solutions réelles qui résolvent en même temps le problème donné et celui qui résulte de sa traduction algébrique.

Dans l'exemple que nous avons choisi et traité ci-dessus, on voit tout d'abord que s'il y a rencontre du cercle et de la droite, l'abscisse du point commun à ces deux lignes doit satisfaire à l'équation (3). On pose, en conséquence,

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad x^2 + (ax + b)^2 = r^2,$$

et l'on est assuré d'avance qu'il n'y a pas de solution possible en dehors de celles qui satisfont à cette équation.

Cela posé, remarquons bien ici que, du moment où l'on a traduit par l'équation (3) le problème dont il s'agissait, et où l'on demande à l'algèbre de fournir, comme équivalent de cette équation, une transformée quelconque, et en particulier la plus simple de toutes, celle où l'inconnue x se trouve entièrement dégagée, il ne s'agit plus que du problème purement algébrique dont voici l'énoncé :

Étant donnée l'équation (3), *trouver une expression de l'inconnue* x *qui rende le premier membre identique au second, lorsqu'on la substitue à* x *et qu'on effectue, suivant les règles de l'algèbre, les opérations indiquées.*

En présence de ce nouveau problème, substitué au premier comme conséquence implicite de l'application de l'algèbre à la solution cherchée, il est absolument indifférent que la transformée de l'équation (3) donne pour x une valeur numériquement assignable ou une expression imaginaire de la forme

$$x = p \pm q\sqrt{-1}.$$

Dans un cas comme dans l'autre il y a solution *réelle* de l'équation (3) par cela seul qu'en substituant à x l'expression définitive à laquelle on est parvenu, l'on rend le premier membre identique au second.

On a dit des *valeurs imaginaires* qu'elles étaient *mystérieuses*. Peut être est-ce uniquement à la juxtaposition des deux mots *valeur* et *imaginaire* qu'il faut attribuer cette erreur de qualifica-

tion. Les expressions imaginaires ont algébriquement la même réalité que les valeurs réductibles en nombre. Si celles-ci se distinguent des autres par rapport au problème qu'on se propose de résoudre, c'est que ce problème apporte à l'équation par laquelle il se traduit, et sur laquelle on opère, une restriction qui exclut tout ou partie des solutions purement algébriques.

Application des règles du calcul algébrique aux imaginaires.

36. Lorsque l'on attribue à une quantité quelconque une valeur imaginaire et que l'on écrit, par exemple,

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

il doit toujours être bien entendu qu'il s'agit d'une identité, la quantité x se composant nécessairement de deux parties distinctes, l'une réelle et égale à p, l'autre imaginaire et représentée par $q\sqrt{-1}$. Rien n'est changé d'ailleurs dans l'application des règles du calcul algébrique, si ce n'est qu'elles acquièrent un sens plus général. C'est ainsi, par exemple, que le produit $\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1}$, équivalant à $(\sqrt{-1})^2$, s'effectue purement et simplement par la suppression du signe $(\sqrt{\;\;})^2$ dans la dernière expression. On a donc, conformément aux règles ordinaires, et avec un sens plus étendu,

$$\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1.$$

Il vient de même

$$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}, \quad (\sqrt{-1})^4 = 1, \quad (\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1},$$

et, ainsi de suite indéfiniment, les résultats obtenus se reproduisant tous de quatre en quatre suivant le même ordre.

Supposons qu'on ait entre des quantités réelles et imaginaires une équation de la forme

$$(1) \quad \ldots \quad A + B\sqrt{-1} = A' + B'\sqrt{-1}.$$

Il en résulte

$$A - A' = (B' - B)\sqrt{-1},$$

et, par suite,

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad (A - A')^2 + (B - B')^2 = o.$$

Les quantités A, A', B, B' étant toutes réelles, par hypothèse, l'équation (2) exige que l'on ait en même temps

$$A = A', \quad B = B'.$$

Telle est donc aussi la conséquence impliquée par l'équation (1). Concluons qu'une équation de cette forme ne peut subsister qu'autant que les parties réelles sont respectivement égales et qu'il en est de même des coefficients des parties imaginaires.

Relations existant entre les exponentielles et les fonctions circulaires.

37. Considérons les fonctions e^x, e^y. Lorsque les valeurs x, y sont toutes deux réelles, on a, en série convergente,

$$(1) \quad \ldots \left\{ \begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}, \\ e^y &= 1 + y + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \text{etc.}, \\ e^{x+y} &= 1 + x + y + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \frac{(x+y)^3}{1.2.3} + \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

De là résulte identiquement

$$(2) \quad . \left[1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}\right]\left[1 + y + \frac{y^2}{1.2} + \text{etc.}\right]$$
$$= 1 + x + y + \frac{(x+y)^2}{1.2} + \text{etc.}$$

L'identité des deux membres de l'équation (2) ne peut être troublée lorsqu'on remplace x par $x\sqrt{-1}$, et y par $y\sqrt{-1}$. Mais, dans cette hypothèse, on a, toujours identiquement,

$$1 + x\sqrt{-1} + \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$= \cos x + \sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}},$$

$$1 + y\sqrt{-1} + \frac{(y\sqrt{-1})^2}{1.2} + \frac{(y\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$= \cos y + \sqrt{-1}\sin y = e^{y\sqrt{-1}},$$

$$1 + (x+y)\sqrt{-1} + \frac{[(x+y)\sqrt{-1}]^2}{1.2} + \text{etc.}$$
$$= \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y) = e^{(x+y)\sqrt{-1}},$$

les symboles $e^{x\sqrt{-1}}$, $e^{y\sqrt{-1}}$, $e^{(x+y)\sqrt{-1}}$, n'étant autre chose que les expressions abrégées de ce que deviennent les développements des exponentielles e^x, e^y, e^{x+y}, lorsqu'on y remplace x par $x\sqrt{-1}$ et y par $y\sqrt{-1}$. Il vient donc, en premier lieu,

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad e^{x\sqrt{-1}} . e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}} \text{*}.$$

Ce qui montre que la règle des exposants s'étend à tous les cas, soit d'abord dans la multiplication et la division des exponentielles,

* La marche suivie pour établir cette équation permet évidemment d'y attribuer à x et y des valeurs quelconques réelles ou imaginaires.

soit ensuite dans leur élévation à des puissances quelconques et par conséquent aussi dans l'extraction de leurs racines.

Il vient d'ailleurs, en second lieu,

$$(4)\quad (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y) = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\sin(x+y),$$

ce qui montre que, pour multiplier ou diviser des binômes de la forme $\cos x + \sqrt{-1}\sin x$, $\cos y + \sqrt{-1}\sin y$, il suffit d'ajouter ensemble ou de soustraire l'un de l'autre les arcs correspondants. L'équation (4) implique en outre la formule générale

$$(5)\quad [\cos x + \sqrt{-1}\,.\sin x]^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx.$$

Cette formule est due à Moivre. Elle fait voir que, pour élever à une puissance quelconque une expression de la forme

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

ou pour en extraire la racine, il suffit d'opérer sur l'arc en le multipliant par l'exposant qui indique l'opération à effectuer.

Les résultats que nous venons d'établir en ce qui concerne les puissances et les racines des exponentielles et des binômes imaginaires $\cos x + \sqrt{-1}$, $\sin x$, etc., peuvent s'obtenir directement en substituant aux équations (1) les équations suivantes

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.},$$

$$e^{mx} = 1 + mx + \frac{(mx)^2}{1.2} + \text{etc.},$$

On en déduit, par voie d'identité,

$$\left[1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}\right]^m = 1 + mx + \frac{(mx)^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Le reste s'achève comme tout à l'heure, et il vient généralement

$$(6)\quad [e^{x\sqrt{-1}}]^m = e^{mx\sqrt{-1}} = [\cos x + \sqrt{-1}\sin x]^m = \cos mx + \sqrt{-1}\sin mx,$$

ce qui justifie et confirme les déductions précédentes.

Il est visible que l'équation (3) ne cesserait pas d'avoir lieu si l'on y remplaçait x par $-x\sqrt{-1}$, ce qui revient d'ailleurs à opérer sur l'identité (2) en se bornant à changer y en $y\sqrt{-1}$. On a donc aussi

$$(7) \quad . \quad e^x . e^{y\sqrt{-1}} = e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\sin y).$$

38. En désignant par $e^{x\sqrt{-1}}$ ce que devient le développement de l'exponentielle e^x lorsqu'on y remplace x par $x\sqrt{-1}$, on a

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \cos x + \sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}}, \\ \cos x - \sqrt{-1}\sin x = e^{-x\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

De là résultent les équations symboliques

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Si l'on procède en sens inverse et qu'on désigne par $\cos(x\sqrt{-1})$, et $\sin(x\sqrt{-1})$ ce que deviennent les développements de $\cos x$ et de $\sin x$, lorsqu'on y remplace x par $x\sqrt{-1}$, on a de même

$$(3) \quad . \quad . \begin{cases} \cos x\sqrt{-1} - \sqrt{-1}\sin x\sqrt{-1} = e^x, \\ \cos x\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\sin x\sqrt{-1} = e^{-x}. \end{cases}$$

et l'on en déduit

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \begin{cases} \cos x\sqrt{-1} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \sin x\sqrt{-1} = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Ces résultats coïncident, ainsi qu'il est aisé de le voir, avec ceux

qu'on obtient en remplaçant x par $x\sqrt{-1}$ dans les formules (1) et (2).

Les équations (3) se résolvant en deux identités, on peut y attribuer à x une valeur quelconque réelle ou imaginaire. Si l'on fait, par exemple,

$$x = u - z\sqrt{-1},$$

il vient

$$(5)\ .\quad \cos(z + u\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}\,.\sin(z + u\sqrt{-1})$$
$$= e^{u - z\sqrt{-1}} = e^{u}(\cos z - \sqrt{-1}\,.\sin z);$$

on a d'ailleurs, conformément à la première des équations (3),

$$e^{u} = \cos u\sqrt{-1} - \sqrt{-1}\sin u\sqrt{-1}.$$

On peut donc écrire aussi

$$(7)\ (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)(\cos u\sqrt{-1} - \sqrt{-1}\sin u\sqrt{-1})$$
$$= \cos(z + u\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}.\sin(z + u\sqrt{-1}).$$

On trouverait de même

$$(8)\ (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos u\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\sin u\sqrt{-1})$$
$$= \cos(z + u\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}.\sin(z + u\sqrt{-1}).$$

Eu égard à l'extension que comportent ces dernières formules, il est visible qu'elles permettent d'appliquer à toutes les valeurs de x, réelles ou imaginaires, les formules du n° 37.

En opérant sur la deuxième des équations (3) comme on l'a fait sur la première, on a

$$(9)\ \cos(z + u\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}.\sin(z + u\sqrt{-1}) = e^{-u + z\sqrt{-1}}$$
$$= e^{-u}(\cos z + \sqrt{-1}.\sin z).$$

La combinaison des équations (5) et (9) conduit aux formules suivantes :

$$(10)\left\{\begin{aligned}\cos(z+u\sqrt{-1})&=\frac{1}{2}\left[(e^{u}+e^{-u})\cos z-\sqrt{-1}(e^{u}-e^{-u})\sin z\right]\\ \sin(z+u\sqrt{-1})&=\frac{1}{2}\left[(e^{u}+e^{-u})\sin z+\sqrt{-1}(e^{u}-e^{-u})\cos z\right]\end{aligned}\right.$$

Expressions générales des logarithmes.

39. Lorsqu'on étend aux exposants imaginaires la définition donnée pour les logarithmes dans le cas des exposants réels, l'équation fondamentale

$$(1)\ldots\ldots\ldots\quad Le^{x}=x$$

devient, en y remplaçant x par $x+y\sqrt{-1}$,

$$(2)\ldots\ldots\quad Le^{x+y\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}$$

et c'est à l'équation (2) que se réduit la définition générale du logarithme d'nne expression quelconque réelle ou imaginaire.

On a pour $x=o$

$$(3)\ldots\ldots\ldots\quad Le^{y\sqrt{-1}}=y\sqrt{-1}\ *$$

Ajoutons membre à membre les équations (1) et (3). Il vient

$$Le^{x}+Le^{y\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1},$$

et eu égard à l'équation (2)

$$(4)\ldots\ldots\quad Le^{x+y\sqrt{-1}}=Le^{x}+Le^{y\sqrt{-1}}$$

* On observera que l'exponentielle $e^{y\sqrt{-1}}$ reste la même pour toutes les valeurs de la variable y qui diffèrent entre elles d'un nombre entier quelconque de circonférences 2π. Il s'ensuit évidemment qu'à chaque détermination particulière de cette exponentielle correspondent nécessairement une infinité de logarithmes distincts.

L'équation (4) suffit pour établir la propriété caractéristique des logarithmes et pour permettre d'étendre au cas général d'un exposant quelconque les règles établies pour le cas des exposants réels.

Soit

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = p + q\sqrt{-1}.$$

Si l'on pose

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \qquad \theta = \text{arc tg}\,\frac{q}{p},$$

la quantité r étant positive, l'équation (5) devient, ainsi qu'on l'a vu au n° 24,

$$x = r\,[\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta] = re^{\theta\sqrt{-1}}.$$

Considérons l'expression

$$re^{\theta\sqrt{-1}} = r\,[\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta],$$

à laquelle se ramène toute expression imaginaire de la forme

$$p + q\sqrt{-1}.$$

On a

$$(6). \quad . \quad \mathrm{L}r.e^{\theta\sqrt{-1}} = \mathrm{L}r\{\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta] = \mathrm{L}r + \theta\sqrt{-1},$$

$\mathrm{L}r$ étant le logarithme arithmétique du nombre r.

Désignons par m un nombre entier quelconque, positif ou négatif, et posons successivement $\theta = 2m\pi$, $\theta = (2m+1)\pi$. De là résulte

$$(7)\ \mathrm{L}(r) = \mathrm{L}r + 2m\pi\sqrt{-1}, \quad \mathrm{L}(-r) = \mathrm{L}r + (2m+1)\pi\sqrt{1},$$

ce qui donne une infinité de valeurs toutes imaginaires, une seule exceptée, celle qui correspond à $m = o$ dans la première des formules (7).

Dans le cas particulier où l'on fait $r = 1$, les équations (7) deviennent

$$(8). \quad L(1) = 2m\pi\sqrt{-1}, \quad L(-1) = (2m+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Les formules auxquelles nous venons de parvenir expriment qu'il existe pour chaque nombre pris positivement ou négativement une infinité de logarithmes distincts, tous imaginaires à l'exception d'un seul. Voici comment ce résultat s'explique et doit être entendu.

On a l'équation (6) comme expression des conventions admises, et de l'extension que comportent les règles du calcul algébrique.

Cela posé, imaginons qu'on fasse varier la quantité θ à partir de zéro, en l'assujettissant soit à croître, soit à décroître indéfiniment. L'identité qui subsiste entre le binôme $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$, et le développement de l'exponentielle $e^{\theta\sqrt{-1}}$, montre que chacune des valeurs de ce développement correspond à une infinité de valeurs de l'argument θ, celles-ci n'étant assujetties qu'à la seule condition de comprendre entre elles un nombre entier de circonférences. Si donc on prend en particulier l'une quelconque des valeurs affectées par le développement et que, conservant au développement son expression générale, on l'égale à cette valeur, il est visible que l'équation résultante comprend nécessairement une infinité de racines toutes différentes les unes des autres. Ce sont ces racines que le second membre de l'équation (6) met en évidence alors que le premier repasse par les mêmes valeurs. L'on a, d'un côté, l'argument θ qui change incessamment et qui prend ainsi successivement toutes les déterminations possibles ; de l'autre, on a une fonction circulaire de l'argument θ, laquelle n'affecte jamais qu'une valeur unique pour toutes les valeurs de l'argument qui diffèrent entre elles d'un nombre entier de circonférences.

Relations existant entre les puissances du sinus et du cosinus d'un arc, et le sinus et le cosinus des arcs multiples.

40. Faisons voir par quelques applications les avantages que peut offrir, en certains cas, la considération des imaginaires.

Reprenons la formule (5) du n° 37, page 93,

$$(1). \quad (\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}.\sin mx,$$

et supposons que l'exposant m soit entier et positif. Le développement du binôme $(\cos x + \sqrt{-1}.\sin x)^m$ est limité en ce cas, et il s'effectue suivant la formule (1) du n° 17, page 46. Égalant de part et d'autre les parties réelles et imaginaires on a généralement

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}(x)\sin^2 x \\ &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4} x.\sin^4 x - \text{etc.} \\ &\sin mx = m\cos^{m-1} x.\sin x \\ &\quad - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3} x \sin^3 x + \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

S'agit-il, au contraire, de développer une puissance quelconque entière et positive de $\cos x$ ou de $\sin x$ en fonction des cosinus et sinus des arcs multiples? On peut poser

$$(3). \quad \left\{ \begin{aligned} y &= \cos x + \sqrt{-1}.\sin x, \\ z &= \cos x - \sqrt{-1}.\sin x, \end{aligned} \right.$$

ce qui donne, d'abord,

$$(4). \quad y + z = 2\cos x, \quad y - z = 2\sqrt{-1}.\sin x, \quad yz = 1;$$

puis, eu égard à l'équation (1),

$$y^n + z^n = 2\cos nx, \qquad y^n - z^n = 2\sqrt{-1}.\sin nx.$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} 2^m \cos^m x = (y+z)^m &= (y^m + z^m) + myz(y^{m-2} + z^{m-2}) \\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2} y^2 z^2 (y^{m-4} + z^{m-4}) + \text{etc}, \end{aligned}$$



et. par suite,

$$2^m \cos^m x = 2 \left\{ \begin{array}{l} \cos mx + m \cos (m-2)\,x \\ + \dfrac{m(m-1)}{1.2} \cos (m-4)\,x + \text{etc.,} \end{array} \right\}$$

le dernier terme étant

$$\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}},$$

ou bien

$$2.\,\frac{m(m-1\ldots\left(\frac{m+3}{2}\right)}{1.2\ldots\left(\frac{m-1}{2}\right)} \cos x,$$

selon que m est pair ou impair.

On a de même,

$$2^m(-1)^{\frac{m}{2}} \sin^m x = 2 \left\{ \begin{array}{l} \cos mx - m \cos (m-2)\,x \\ + \dfrac{m(m-1)}{1.2} \cos (m-4)\,x - \text{etc.,} \end{array} \right\}$$

ou bien

$$2^m(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin^m x = 2 \left\{ \begin{array}{l} \sin mx - m \sin (m-2)\,x \\ + \dfrac{m(m-1)}{1.2} \sin (m-4)\,x - \text{etc.,} \end{array} \right\}$$

selon que m est pair ou impair, le dernier terme étant

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{m}{2}}$$

dans le premier cas, et

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\frac{m-1}{2}} \sin x$$

dans le second *.

Résolution des équations binômes.

41. Considérons l'équation binôme

(1). . . . . $x^n = a$

où le nombre n est supposé entier et positif **.

Si nous désignons par r la racine arithmétique $\sqrt[n]{a}$, il vient

(2). . . . . $x^n = \pm r^n$.

Posons

$$x = re^{\theta\sqrt{-1}} = r[\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta];$$

substituons cette valeur dans l'équation (2) et supprimons le facteur commun r^n. On trouve ainsi, pour transformée des équations (1) et (2),

(3). . . . . $\cos n\theta + \sqrt{-1}.\sin n\theta = \pm 1$.

* On observera que, dans les formules qui donnent le développement de la puissance m de $\sin x$, les termes sont alternativement positifs et négatifs. Il s'ensuit que le dernier est positif ou négatif, selon que les termes sont en nombre pair ou en nombre impair.

** S'il en était autrement, on pourrait toujours ramener à ce cas le cas plus général d'un exposant quelconque.

Le second membre est il positif? On satisfait à l'équation (3) en posant $n\theta = 2m\pi$, m étant un nombre entier quelconque. De là résulte, pour ce cas,

$$(4). \quad . \quad . \quad x = r\left[\cos\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{2m\pi}{n}\right].$$

On a de même, pour le cas où le second membre est négatif,

$$(5). \quad . \quad x = r\left[\cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}\right].$$

Il est d'ailleurs aisé de voir qu'il suffit d'attribuer au nombre m les valeurs successives $0, 1, 2 \ldots. (n-1)$ ou $1, 2 \ldots n$ pour épuiser la série des valeurs distinctes et différentes que l'inconnue x comporte dans les deux cas.

Les solutions fournies par les équations (4) et (5) s'étendent d'elles-mêmes aux équations de la forme,

$$x^{2n} + bx^n + c = o.$$

On prend d'abord la transformée

$$x^n = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c},$$

et rien n'est à changer si les valeurs obtenues pour x^n sont réelles. Supposons ces valeurs imaginaires et représentons les par

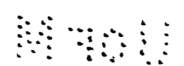
$$x^n = a(\cos\alpha \pm \sqrt{-1}.\sin\alpha).$$

En faisant, comme tout à l'heure,

$$r = \sqrt[n]{a}, \qquad x = r(\cos\theta \pm \sqrt{-1}\sin\theta),$$

il vient

$$(6). \quad . \quad . \quad \cos n\theta \pm \sqrt{-1}\sin n\theta = \cos\alpha \pm \sqrt{-1}.\sin\alpha.$$



Cela posé, selon que $\cos\alpha$ est positif ou négatif, on satisfait à l'équation (6), en faisant $n\theta = 2m\pi + \alpha$ ou $n\theta = (2m+1)\pi + \alpha$, ce qui donne

$$(7).\quad x = r\left[\cos\frac{\alpha + 2m\pi}{n} \pm \sqrt{-1}.\sin\frac{\alpha + 2m\pi}{n}\right]$$

dans le premier cas, et

$$(8).\quad x = r\left[\cos\frac{\alpha + (2m+1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}.\sin\frac{\alpha + (2m+1)\pi}{n}\right]$$

dans le second.

42. Reprenons l'équation

$$x^n = a.$$

En appliquant la formule (7) du n° 39, page 97, on a

$$n\mathrm{L}x = \mathrm{L}(a) = \mathrm{L}a + 2m\pi\sqrt{-1}.$$

De là résulte en divisant par n, puis revenant des logarithmes aux nombres et désignant par r la racine arithmétique $\sqrt[n]{a}$

$$x = re^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}} = r\left[\cos\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2m\pi}{n}\right].$$

En opérant de même sur l'équation

$$x^n = -a,$$

on trouverait

$$x = re^{\frac{(2m+1)\pi}{n}\sqrt{-1}} = r\left[\cos\frac{(2m+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}.\sin\frac{(2m+1)\pi}{n}\right].$$

Si l'on avait

$$x^n = p + q\sqrt{-1} = \pm a(\cos\alpha + \sqrt{-1}.\sin\alpha),$$

La fourmule (6) du n° 39, page 97, donnerait d'abord,

$$n\,\mathrm{L}\,x = \mathrm{L}\,(\pm a) + \alpha\sqrt{-1}.$$

Le reste s'achèverait comme ci-dessus, et l'on retrouverait ainsi tous les résultats du n° 41.

Interprétation générale de la formule de Moivre.

43. Considérons la formule

$$(1).\quad [\cos x + \sqrt{-1}.\sin.x]^{\frac{p}{q}} = \cos\frac{p}{q}x + \sqrt{-1}.\sin\frac{p}{q}x,$$

où p et q sont par hypothèse deux nombres entiers, premiers entre eux.

On peut voir dans la formule (1) la transformée de cette autre formule

$$(2).\left[\cos x + \sqrt{-1}.\sin x\right]^{p} = \left[\cos\frac{p}{q}x + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{q}x\right]^{q}:$$

on a, d'ailleurs, en désignant par pi un nombre entier quelconque,

$$\left[\cos\frac{2pi\pi}{q} + \sqrt{-1}\sin\frac{2pi\pi}{q}\right]^{q} = \cos 2pi\pi + \sqrt{-1}\sin 2pi\pi = 1.$$

Il vient donc aussi

$$\left[\cos x + \sqrt{-1}\sin x\right]^{p} =$$

$$\left[\left(\cos\frac{p}{q}x + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{q}x\right)\left(\cos\frac{2pi\pi}{q} + \sqrt{-1}\sin\frac{2pi\pi}{q}\right)\right]^{q}.$$

On déduit de là,

$$[\cos x + \sqrt{-1}\sin x]^{\frac{p}{q}} = \cos\left(\frac{p}{q}\right)(x+2i\pi) + \sqrt{-1}\sin\frac{p}{q}(x+2i\pi),$$

et, pour obtenir les q valeurs que comporte le second membre de l'équation (1), il suffit d'attribuer successivement au nombre i chacune des valeurs comprises dans la suite 0, 1, 2, 3,...$(q-1)$.

De la continuité dans la variation des imaginaires.

44. On admet que toute expression imaginaire est réductible au type fondamental

$$P + Q\sqrt{-1}.$$

Ce n'est d'ailleurs qu'après avoir effectué cette réduction, ou démontré sa possibilité, qu'il est permis d'opérer sur une expression imaginaire et de la soumettre au calcul.

Soit, pour exemple, la fonction $\mathrm{L}\, r e^{\theta\sqrt{-1}}$. Elle n'est que par l'identité

$$\mathrm{L}\, r e^{\theta\sqrt{-1}} = \mathrm{L}\, r + \theta\sqrt{-1}:$$

si donc on fait varier θ c'est dans le second membre et non dans le premier qu'il faut étudier les modifications subies par la fonction.

Considérons une fonction quelconque imaginaire ramenée à la forme

$$P + Q\sqrt{-1}:$$

P et Q seront des fonctions réelles de la variable indépendante subsistant chacune isolément et non réductibles entre elles.

La fonction donnée étant représentée par y, il vient identiquement

$$y = P + Q\sqrt{-1},$$

et ce qu'il faut voir dans y ce sont deux grandeurs l'une égale à P, l'autre à Q, toutes deux réunies symboliquement, mais toujours distinctes et toujours séparables. Il suit évidemment de là que la variation de l'imaginaire y doit être considérée comme s'identifiant avec celle des fonctions P et Q prises à part et simultanément.

On peut avoir, entre certaines limites,

$$y = f(x) + \sqrt{-1}.F(x),$$

puis, entre d'autres limites,

$$y = \varphi(x) + \sqrt{-1}.\psi(x)$$

les fonctions exprimées par P et Q changeant en même temps qu'on passe du premier intervalle au second et par conséquent restant toujours réelles.

Il peut arriver aussi que la quantité Q s'évanouisse par suite d'une valeur particulière attribuée à la variable indépendante ou qu'elle disparaisse d'elle-même pour toute l'étendue d'un certain intervalle. Dans le premier cas la valeur affectée par y, quoique réelle en apparence *, ne cesse point d'appartenir au système général des valeurs imaginaires. Dans le second il y a transition d'un système à l'autre et solution relative de continuité.

Une fonction peut être tantôt réelle, tantôt imaginaire, la variable dont elle dépend restant toujours réelle : elle n'affecte ainsi qu'une partie des déterminations compatibles avec son mode d'existence. Si l'on veut l'étudier dans toutes les modifications qu'elle comporte, il faut substituer aux valeurs réelles de la variable un système qui, sans exclure aucune de ces valeurs, comprenne en

* La fonction $(-a)^x$, dans laquelle la variable x demeure réelle, offre un exemple remarquable de ce cas. On a généralement

$$(-a)^x = a^x(-1)^x = a^x.[\cos(2m+1)\pi x + \sqrt{-1}\sin(2m+1)\pi x]$$

m étant un nombre entier quelconque. On voit par là que, contrairement à l'idée qu'on s'en forme généralement, la fonction $(-a)^x$ est imaginaire et continue. A chaque valeur du nombre entier m répond un système distinct de déterminations particulières. Il n'y a solution de continuité que lorsqu'on passe de l'un de ces systèmes à un autre. On voit d'ailleurs aisément qu'en désignant par k un nombre entier quelconque, les valeurs de $(-a)^x$ qui affectent la forme réelle sont celles qui correspondent soit à $x = \frac{2k+1}{2m+1}$ soit à $x = \frac{2k}{2m+1}$.

outre toutes les valeurs imaginaires possibles *. Pour satisfaire à cette condition x étant la variable, on doit poser

$$x = p + q\sqrt{-1}.$$

Il faut admettre en outre que les quantités p et q sont susceptibles d'acquérir directement et indépendamment l'une de l'autre toutes les valeurs réelles. Dès lors x devient fonction de ces deux variables et celles-ci seules sont dites indépendantes.

En assujettissant la variable x à franchir successivement et avec continuité toutes les valeurs imaginables, on ne détermine aucun des modes particuliers suivant lesquels la variation peut s'accomplir effectivement. Il est permis de rester à ce point de vue général, comme aussi de considérer spécialement l'un ou l'autre de ces modes, le choix à faire pouvant dépendre des questions à résoudre et offrir ainsi le moyen d'établir entre la variable et la fonction donnée l'ordre de relation le plus propre à remplir l'objet qu'on se propose. Dans tous les cas la continuité n'est possible pour x, qu'autant qu'elle subsiste pour chacune des quantités réelles p et q, prises à part et simultanément Nous admettrons que cette condition nécessaire est toujours satisfaite.

Ce qui vient d'être dit s'applique en même temps et de la même manière à la fonction

$$y = \mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1}.$$

Il s'ensuit qu'à la variation continue de la variable imaginaire correspond une variation continue ou discontinue de la fonction, selon que les quantités P et Q restent, ou non, finies, réelles et continues.

45. Les détails qui précèdent n'offrant aucune difficulté, je crois

* Le système complet des valeurs imaginaires comprend, comme cas particuliers, toutes les valeurs réelles. Dès qu'on entre dans ce système, il n'y a plus lieu d'établir entre les unes et les autres aucune distinction, si ce n'est celle que nous avons déjà mentionnée. Cette remarque est très-importante au point de vue de la continuité.

inutile d'insister sur la distinction qu'il importe d'établir entre le système général de tous les modes possibles de variation continue et l'un quelconque d'entre eux. Je vais, en conséquence, passer immédiatement à celui de ces modes que l'on choisit habituellement pour l'attribuer à la variable imaginaire.

Il semblerait naturel d'opérer directement sur les quantités p et q en faisant correspondre successivement l'une quelconque des valeurs de p à toutes les valeurs de q ou réciproquement. Dans l'un et l'autre de ces modes p et q seraient les variables indépendantes. Il est d'ailleurs visible qu'on y réaliserait pour x toutes les valeurs imaginables. Tel n'est point le procédé généralement suivi : moins simple en apparence il offre en réalité certains avantages qui le font préférer. Voici en quoi il consiste.

Faisant

$$(1) \quad \ldots \quad r\cos\theta = p, \quad r\sin\theta = q,$$

on en déduit

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \theta = \text{arc tg}\,\frac{q}{p}.$$

Cela posé, on remarque que quelles que soient les valeurs respectives attribuées séparément aux quantités p et q, on peut toujours satisfaire aux équations (1) en attribuant à r la valeur positive $\sqrt{p^2 + q^2}$, et à l'arc θ, soit la valeur unique qui, dans l'intervalle de o à 2π, remplit les conditions voulues, soit cette même valeur augmentée ou diminuée d'un multiple quelconque de la circonférence.

Au lieu de l'équation

$$x = p + q\sqrt{-1},$$

il est donc permis d'écrire

$$x = r\left[\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta\right],$$

et, changeant le mode de variation, de prendre r et θ pour variables indépendantes.

Veut-on n'attribuer à r que des valeurs positives et restreindre entre les limites o et 2π la variation de θ, cela suffit pour réaliser un mode de variation continue où la variable x passe successivement par toutes les valeurs imaginables. Cela ne suffit point, en général, si l'on veut que la fonction acquière elle-même toutes les déterminations qu'elle comporte. Soit, pour exemple, la fonction

$$y = x^{\frac{1}{q}} = r^{\frac{1}{q}}\left[\cos\theta + \sqrt{-1}\,.\sin\theta\right]^{\frac{1}{q}} = r^{\frac{1}{q}}\left[\cos\frac{\theta}{q} + \sqrt{-1}\,.\sin\frac{\theta}{q}\right].$$

Il est visible que pour n'exclure aucune des déterminations dont elle est susceptible, et, en particulier, pour lui faire exprimer les diverses racines de l'unité, il est indispensable d'assigner comme limites à la variation de θ des valeurs prises de plus en plus grandes à mesure que q augmente.

46. Lorsqu'on entre dans le système des valeurs imaginaires, il est à observer que, sauf les cas d'impossibilité fortuite, il n'est pour la fonction, de même que pour la variable, aucune détermination particulière que toutes deux n'admettent nécessairement. La seule chose qui change d'une fonction à une autre, c'est l'ordre dans lequel ces déterminations se succèdent, ou bien encore le degré de périodicité. Supposons en effet que la variable soit prise pour fonction et réciproquement. La fonction, prise pour variable, reçoit immédiatement toutes les valeurs possibles. D'un autre côté, à chacune de ces valeurs il en correspond une que la variable, devenue fonction, acquiert forcément. Si donc agissant directement sur la variable on lui fait prendre successivement toutes les valeurs possibles, il faut que la fonction remplisse elle-même cette condition générale. De là résulte le principe suivant :

Toute variation limitée des quantités r *et* θ *qui ne permet pas de réaliser dans la fonction le système entier des valeurs imaginaires est, par cela seul, nécessairement incomplète.*

Appliquant ce principe à la fonction particulière

$$\mathrm{L}x = \mathrm{L}r\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,.\sin\theta) = \mathrm{L}re^{\theta\sqrt{-1}} = \mathrm{L}r + \theta\sqrt{-1},$$

on reconnait immédiatement que la variation de θ ne peut être complète par rapport à la fonction qu'autant qu'elle est illimitée.

L'exemple que nous venons de choisir est très-propre à montrer comment, en certains cas, la série des valeurs imaginaires est à peine entamée par la variation continue de la fonction, tandis qu'elle est déjà complétement épuisée par celle de la variable. L'explication de ce fait est toute simple : il dépend de la multiplicité des valeurs qui, dans la fonction, correspondent à une seule et même détermination de la variable imaginaire. L'inverse est également possible; nous citerons, pour exemple, la fonction

$$x^m = r^m [\cos\theta + \sqrt{-1} . \sin\theta]^m = r^m [\cos m\theta + \sqrt{-1} . \sin m\theta].$$

Essentiellement continue pour toute valeur entière et positive de l'exposant m, cette fonction est en même temps périodique, et, par elle, la série des valeurs imaginaires est m fois épuisée, lorsqu'elle ne l'est qu'une fois par la variable x.

La variable x demeurant continue, imaginons que, pour toute valeur de r comprise entre deux limites déterminées la fonction varie périodiquement suivant un certain mode et qu'au delà de ces limites ce mode change brusquement. Il est clair que ces limites ne pourront être franchies sans qu'il y ait, *en général*, changement brusque de détermination et par conséquent solution de continuité. Si donc une fonction a d'abord un certain degré de périodicité, puis qu'elle le perde brusquement ou que, ne l'ayant pas, elle l'acquière tout à coup, la discontinuité surgit en même temps. Cette remarque explique peut-être l'erreur où l'on est tombé en faisant dépendre la continuité de la périodicité et confondant ainsi deux caractères essentiellement distincts *.

* Voir plus loin la note placée à la suite du n° 50.

Application du calcul différentiel aux imaginaires.

47. Soit y une fonction quelconque imaginaire définie par l'identité

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad y = f(x) + \sqrt{-1}\,.\,F(x).$$

Pour appliquer à cette fonction les règles du calcul différentiel, il suffit d'opérer successivement sur la partie réelle et sur la partie imaginaire en traitant le facteur symbolique $\sqrt{-1}$ comme un facteur constant. De là résulte

$$(2) \quad \ldots \quad \dot{y} = f'(x)\,.\,\dot{x} + \sqrt{-1}\,.\,F'(x)\,.\,\dot{x},$$

et l'équation (2) définit la différentielle, de la même manière que l'équation (1) définit la fonction.

On voit par ce simple aperçu que les règles établies pour la différentiation et la dérivation des fonctions réelles s'étendent d'elles-mêmes aux fonctions imaginaires, et qu'aucune difficulté ne peut surgir dans leur application lorsqu'on a pris le soin de ramener au type fondamental

$$P + Q\sqrt{-1}$$

l'expression imaginaire sur laquelle il s'agit d'opérer.

Veut-on procéder directement, sans passer par l'intermédiaire d'aucune transformation? Il faut s'assurer d'abord que cette voie plus rapide et plus simple peut être suivie légitimement. Tout se réduit ainsi à quelques vérifications faciles et d'ailleurs peu nombreuses.

Soit pour premier exemple la fonction $e^{x\sqrt{-1}}$. Elle est par l'identité

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,.\,\sin x.$$

Si l'on opère directement sur $e^{x\sqrt{-1}}$, en traitant le facteur symbolique $\sqrt{-1}$ comme un facteur constant, on a pour la dérivée,

$$e^{x\sqrt{-1}}.\sqrt{-1}.$$

Or, en vertu de l'équation (3), il vient identiquement

$$e^{x\sqrt{-1}}.\sqrt{-1} = -\sin x + \sqrt{-1}.\cos x,$$

et cette expression de la dérivée n'est autre que la dérivée du second membre de l'identité (3). Il est démontré par là qu'on a généralement

$$de^{x\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}.e^{x\sqrt{-1}}.dx$$

la règle restant la même que s'il s'agissait d'un exposant réel.

Soit, pour deuxième exemple, la fonction. $\mathrm{L}.e^{x\sqrt{-1}}$. Elle est, par l'identité

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{L}e^{x\sqrt{-1}} = x\sqrt{-1}.$$

Traitée directement elle a pour dérivée,

$$\frac{\sqrt{-1}.e^{x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1},$$

et telle est aussi la dérivée que l'on obtient en opérant sur le second membre de l'identité (4).

Soit, pour troisième exemple, la fonction $\sin x\sqrt{-1}$. Ainsi qu'on l'a vu par les formules (4) du n° 38, page 94, on a identiquement

$$\sin x\sqrt{-1} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x\sqrt{-1} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}.$$

Prise directement la dérivée de $\sin x\sqrt{-1}$ est, d'après les règles ordinaires

$$\sqrt{-1}.\cos x\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}.$$

D'un autre côté, si l'on opère sur le binôme $\frac{e^{-x} - e^{x}}{2\sqrt{-1}}$, on a, pour dérivée

$$-\frac{e^{-x} + e^{x}}{2\sqrt{-1}} = \sqrt{-1} \cdot \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}.$$

Rien donc n'est changé dans le résultat, soit qu'on opère d'une manière directe, soit qu'on suive la marche générale.

S'agit-il de la formule

$$(\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1} \cdot \sin mx ?$$

Il est visible *à priori* que, subsistant par voie d'identité, elle ne peut avoir pour chacun de ses deux membres qu'une seule et même dérivée. On peut d'ailleurs le vérifier directement, ou bien le déduire de ce qui précède en observant que l'on a

$$[\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x]^m = e^{mx\sqrt{-1}}.$$

Considérons en dernier lieu la fonction

$$z^m = (x + y\sqrt{-1})^m = r^m e^{m\theta\sqrt{-1}} = r^m [\cos m\theta + \sqrt{-1} . \sin m\theta].$$

On a directement

$$d(z^m) = mz^{m-1} . dz = mz^{m-1} . (dx + dy\sqrt{-1})$$
$$= m(x + y\sqrt{-1})^{m-1}(dx + dy\sqrt{-1}),$$
$$d(z^m) = m . [re^{\theta\sqrt{-1}}]^{m-1}(e^{\theta\sqrt{-1}} . dr + e^{\theta\sqrt{-1}} rd\theta\sqrt{-1})$$
$$= m(x + y\sqrt{-1})^{m-1}(e^{\theta\sqrt{-1}} dr + e^{\theta\sqrt{-1}} rd\theta\sqrt{-1}).$$

Eu égard aux équations de condition

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad e^{\theta\sqrt{-1}} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta,$$

il vient

$$dr = \frac{xdx + ydy}{r}, \quad d\theta = \frac{xdy - ydx}{r^2},$$

et l'on en déduit

$$e^{\theta\sqrt{-1}}dr + e^{\theta\sqrt{-1}}rd\theta = dx + dy\sqrt{-1}.$$

Il y a donc identité de part et d'autre et les règles de la différentiation ne cessent pas d'être applicables aux expressions symboliques des imaginaires de la même manière que si le symbole $\sqrt{-1}$ était en réalité un facteur numérique.

Représentation géométrique des imaginaires.

48. Nous ne terminerons point ce sujet sans ajouter quelques mots sur la construction géométrique des valeurs imaginaires et sur les avantages spéciaux que ce mode de représentation peut offrir en certains cas *.

Soient t et u deux coordonnées rectangulaires, si l'on pose, en général,

$$P + Q\sqrt{-1} = t + u\sqrt{-1},$$

toute valeur de l'imaginaire $P + Q\sqrt{-1}$ fixe la position d'un point, et, réciproquement, tout point du plan des coordonnées répond à l'une des valeurs de cette imaginaire.

On voit ainsi que toute expression imaginaire considérée dans l'ensemble des déterminations qu'elle comporte, et abstraction faite des solutions de continuité qu'elle peut offrir accidentellement,

* On peut varier à l'infini les différents modes que comporte la représentation géométrique des imaginaires. Nous ne nous occupons ici que d'un seul mode choisi parmi les plus simples et les plus élémentaires; le lecteur qui voudrait étendre et poursuivre ces recherches peut consulter avec fruit les travaux de M. Maximilien Marie déjà cités en note, nº 26, page 66.

dans les cas d'impossibilité fortuite, est exactement représentée par la suite infinie des points que comprend une surface plane.

Cherchons quelle est, par rapport à la génération de cette surface, le sens exprimé par les divers modes de variation continue sur lesquels notre attention s'est portée plus particulièrement dans les numéros qui précèdent.

Soit, d'abord,

$$x = p + q\sqrt{-1} = t + u\sqrt{-1}:$$

si l'on fait correspondre à chaque valeur de p toutes les valeurs de q, on a pour chaque valeur de p une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses, et c'est par le déplacement de cette droite, transportée parallèlement à elle-même, que la génération du plan s'effectue. Lorsqu'on procède inversement, c'est-à-dire en faisant correspondre à une valeur de q toutes les valeurs de p, puis en donnant à q toutes les valeurs possibles, la génération a lieu par le déplacement d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Soit, ensuite,

$$x = r[\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta] = t + u\sqrt{-1}.$$

De là résulte

$$t = r\cos\theta, \quad u = r\sin\theta,$$

et, suivant qu'on élimine r ou θ,

$$u = t.\mathrm{tg}\,\theta,$$

ou bien

$$u^2 + t^2 = r^2.$$

Dans le premier cas, chaque valeur de θ, se combinant avec toutes les valeurs de r, fournit une droite qui passe par l'origine et fait avec l'axe des abscisses un angle égal à θ. Lorsque θ varie, cette droite tourne et c'est par sa rotation autour de l'origine que le plan se trouve engendré.

Dans le second cas, il y a combinaison directe de chaque valeur de r avec toutes les valeurs de θ. Chacune de ces combinai-

sons donne une circonférence de cercle ayant son centre à l'origine et la quantité r pour rayon. Lorsque r varie à son tour, la circonférence se développe progressivement, et la génération du plan s'effectue.

49. Considérons en particulier quelques fonctions simples et, pour abréger, adoptons exclusivement, en ce qui concerne la variable x, le mode de variation continue qui se traduit par la rotation d'une droite tournant autour de l'origine des coordonnées. On sait que, dans cette hypothèse, chacune des valeurs de l'argument θ se combine directement avec toutes les valeurs que comporte le module, c'est-à-dire que pour une même valeur quelconque attribuée à θ, le module r est censé prendre toutes les valeurs possibles à partir de zéro.

Soit, en premier lieu, la fonction x^m. On a

$$x = r\,[\cos\theta + \sqrt{-1}\,.\sin\theta],$$

et, par suite,

$$x^m = r^m\,[\cos m\theta + \sqrt{-1}\,.\sin m\theta].$$

On voit ainsi que, de part et d'autre, c'est par la rotation d'une droite tournant autour de l'origine que se traduisent les variations continues simultanées de la variable et de la fonction. Si l'on prend pour unité la vitesse angulaire qui correspond à la variation de la variable, celle qui en résulte pour la variation simultanée de la fonction est représentée en sens et grandeur par l'exposant m.

Soit, en second lieu, la fonction Lx. En posant, comme tout à l'heure,

$$x = r\,[\cos\theta + \sqrt{-1}\,.\sin\theta] = re^{\theta\sqrt{-1}},$$

il vient

$$\mathrm{L}x = \mathrm{L}r + \theta\sqrt{-1} = t + u\sqrt{-1}.$$

Il s'ensuit qu'en se combinant avec toutes les valeurs de r, chaque valeur attribuée à θ donne une droite parallèle à l'axe des

abscisses et située à la distance θ de cet axe. Ici donc, tandis que le système des valeurs imaginaires se réalise, pour la variable, par la rotation d'une droite qui tourne autour de l'origine des coordonnées, c'est par le déplacement continu d'une droite assujettie à rester parallèle à l'axe des abscisses que ce système se réalise en même temps pour la fonction. Lorsqu'on restreint la variation de l'angle θ entre les limites o et 2π (ce qui permet d'obtenir, en ce qui concerne la variable, le système complet des valeurs imaginaires), les positions extrêmes de la droite qui correspond aux valeurs imaginaires de la fonction sont données par les équations

$$u = o, \quad u = 2\pi,$$

et la surface engendrée se réduit à la bande que comprennent entre elles ces positions extrêmes. On voit ainsi que la réalisation du système complet des valeurs imaginaires, par la variation continue de la fonction, exige impérieusement que l'on attribue successivement à θ toutes les valeurs possibles et qu'on les prenne chacune positivement et négativement.

Ces exemples suffisent. Par eux on saisit clairement ce qu'exprime tout mode de variation continue susceptible d'être attribué à la variable imaginaire. Ils mettent d'ailleurs en évidence la relation qui s'établit entre l'un quelconque de ces modes et celui qui lui correspond dans la variation simultanée de la fonction. De part et d'autre, il y a d'abord à considérer le mouvement d'un point et par suite la génération de deux lignes répondant, l'une à la variable, l'autre à la fonction : puis vient, avec ou sans changement de forme, le déplacement de ces lignes. De là résultent deux aires planes qui s'engendrent simultanément et se correspondent de la même manière que leurs génératrices respectives. Par hypothèse, l'un de ces deux systèmes est essentiellement continu, c'est-à-dire que dans le mouvement du point qui décrit une position quelconque de la génératrice, comme dans celui de la génératrice qui décrit une portion d'aire quelconque, il n'y a jamais ni lacune ni saut brusque. Tant que l'autre système remplit les mêmes conditions, il y a continuité relative.

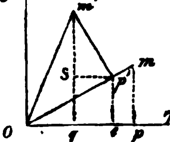
En résumé, soit une fonction quelconque réelle ou imaginaire, la variable peut être assujettie à varier continûment entre certaines limites. Quelle que soit, en ce cas, la détermination particulière du mode de variation, il reste caractérisé par l'absence de tout changement brusque, et la fonction varie, en général, de la même manière. Aussi longtemps que cette condition, supposée remplie par la variable, l'est également par la fonction, on dit de celle-ci qu'elle est et demeure fonction continue de la variable que l'on considère.

50. Étant donnée une expression quelconque imaginaire

$$P + Q\sqrt{-1}.$$

Prenons pour axes coordonnés rectangulaires les deux droites OT, OU, et désignons par m le point déterminé par les équations

Fig. 1.



(1) . . . . $t = P, \quad u = Q,$

t étant l'abscisse et u l'ordonnée de ce point.

Si l'on pose

$$t + u\sqrt{-1} = re^{\theta\sqrt{-1}} = r\cos\theta + \sqrt{-1} \,.\, r\sin\theta,$$

l'on en déduit

(2) . . . . $r = \sqrt{t^2 + u^2}, \quad \tang\theta = \frac{u}{t},$

et, lorsqu'on passe du système des coordonnés OT, OU, au système polaire dont le pôle est en O et la droite fixe en OT, le point m se trouve déterminé par les équations (2) comme il l'était d'abord par les équations (1), le module r étant le rayon vecteur du point m, et l'argument θ l'angle de ce rayon avec la droite OT.

Supposons le point m situé sur la circonférence de cercle décrite

du point O comme centre avec un rayon égal à l'unité, et considérons un second point m' situé sur cette même circonférence. On aura, d'abord, $r = 1$ et, par suite,

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta.$$

Du point m' abaissons sur Om la perpendiculaire $m'p'$ et désignons par θ' l'angle m'Op'. On a

$$Op' = \cos\theta', \quad m'p' = \sin\theta'.$$

Soient t', u' les coordonnées du point m'. En abaissant du point m' sur la droite OT la perpendiculaire $m'q$, il vient

$$t' = Oq = Op'\cos\theta - m'p'\sin\theta,$$
$$u' = m'q = Op'\sin\theta + m'p'\cos\theta.$$

Cela posé, puisque l'expression symbolique, qui détermine le point m', est indifféremment

$$t' + u'\sqrt{-1} \text{ ou bien } \cos(\theta + \theta') + \sqrt{-1}.\sin(\theta + \theta'),$$

il s'en suit que l'on a

$$\cos(\theta + \theta') = t' = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta.\sin\theta',$$
$$\sin(\theta + \theta') = u' = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta.\sin\theta'.$$

Si, d'ailleurs, on multiplie entre elles les deux imaginaires $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$, $\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta'$, on trouve pour produit

$$\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \sqrt{-1}\,[\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'].$$

On peut donc écrire, en général,

$$[\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta][\cos\theta' + \sqrt{-1}.\sin\theta']$$
$$= \cos(\theta + \theta') + \sqrt{-1}.\sin(\theta + \theta').$$

Concluons que la multiplication des expressions de la forme $\cos\theta + \sqrt{-1}.\sin\theta$, $\cos\theta' + \sqrt{-1}.\sin\theta'$, s'effectue en ajoutant les angles.

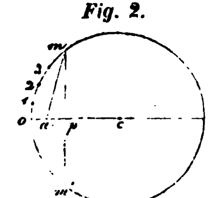
De là résulte la formule de Moivre *

$$[\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta]^m = \cos m\theta + \sqrt{-1}\sin m\theta.$$

S'agit-il ensuite des racines de l'unité? Voici comment on en obtient la représentation géométrique.

Soit une circonférence de cercle ayant l'unité pour rayon et divisée en n parties égales à partir du point o. Si de l'un quelconque des points de division, du point m par exemple, on abaisse sur le diamètre qui correspond au point o la perpendiculaire mp représentée par $u = \sin m.\frac{2\pi}{n}$ et qu'on désigne par $t = \cos m.\frac{2\pi}{n}$ la distance cp comprise entre le centre du cercle et le pied de cette perpendiculaire, il est visible que l'expression imaginaire,

Fig. 2.



$$t + u\sqrt{-1}. = \cos m\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}.\sin m\frac{2\pi}{n},$$

est une des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. On a, en effet,

$$\left[\cos m\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin m\frac{2\pi}{n}\right]^n = \cos 2m\pi + \sqrt{-1}\sin 2m\pi = 1.$$

Prolongeons la perpendiculaire mp jusqu'à sa rencontre en m' avec la circonférence de cercle déjà divisée en n parties égales. Le point m' est comme le point m un des points de cette division. Il

* Démontrée d'abord pour le cas d'un exposant entier et positif, la formule de Moivre s'étend sans difficulté au cas d'un exposant quelconque entier ou fractionnaire, positif ou négatif, commensurable ou incommensurable.

s'ensuit que les racines $n^{ièmes}$ de l'unité qui correspondent aux deux points m, m' ont, pour somme,

$$2cp = 2 \cos m \frac{2\pi}{n},$$

et, pour produit.

$$(t + u\sqrt{-1})(t - u\sqrt{-1}) = t^2 + u^2 = 1.$$

Désignons par z l'inconnue du facteur du second degré qu'il faut égaler à zéro pour obtenir chacune de ces deux racines. Ce facteur est évidemment,

$$z^2 - 2z \cos m \frac{2\pi}{n} + 1.$$

Prenons sur le diamètre oc le point a, situé comme on veut à gauche du centre c. Posons

$$ca = z,$$

et tirons la droite am. On a

$$\overline{am}^2 = \overline{mp}^2 + \overline{ap}^2 = \sin^2 m \frac{2\pi}{n} + \left(z - \cos m \frac{2\pi}{n}\right)^2$$
$$= z^2 - 2z \cos m \frac{2\pi}{n} + 1.$$

La conséquence est qu'en désignant par y_0, y_1, y_2, etc., y_{n-1}, les distances comprises entre le point a et chacun des points de division, o, 1, 2, etc., $n-1$ marqués sur la circonférence, on a généralement

$$z^n - 1 = y_0 \cdot y_1 \cdot y_2 \ldots y_{n-1}.$$

Si, sans rien changer à ce qui précède, on doublait le nombre des divisions, il faudrait écrire

$$(3) \quad \ldots \quad z^n - 1 = y_0 \cdot y_2 \cdot y_4 \ldots y_{2n-2}$$

On aurait, d'ailleurs, en même temps et de la même manière, ainsi qu'il est aisé de le voir,

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad z^n + 1 = y_1 \cdot y_3 \cdot y_5 \ldots y_{2n-1}.$$

Les équations (3) et (4) expriment le théorème de Cotes.

NOTE I.

Sur la continuité et la périodicité des fonctions d'une variable imaginaire.

Soit une fonction quelconque

$$y = f(x).$$

La variable x croissant d'une manière continue entre certaines limites, il peut arriver que les valeurs correspondantes de la fonction constituent un système unique ou plusieurs systèmes simultanés et distincts. Dans le cas où la fonction admet plusieurs systèmes de valeurs, nous supposons que l'on prenne à part l'un quelconque de ces systèmes, et qu'on le considère isolément de la même manière que s'il subsistait seul. Il suit de là que la fonction satisfait, *en général*, aux conditions suivantes :

1° Elle varie continûment;

2° Elle affecte à chaque instant une valeur unique et déterminée.

Lorsque nous disons de la fonction y qu'elle affecte une valeur déterminée, nous entendons exprimer que la valeur dont il s'agit est *effectivement atteinte* par la fonction, et qu'elle ne se réduit pas à une simple limite vers laquelle la fonction serait conver-

gente. Pour bien faire comprendre le sens de cette remarque, considérons en particulier la fonction

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad y = x \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot$$

Si l'on perdait de vue l'impossibilité radicale accusée par le symbole $\frac{1}{0}$ et qu'on traitât l'équation (1) sans tenir compte de cette impossibilité, on serait conduit à confondre parmi les valeurs effectives de la fonction $x \cdot \sin \frac{1}{x}$ la limite zéro vers laquelle cette fonction converge à mesure que la variable x décroît indéfiniment. On pourrait alors ne pas apercevoir la solution de continuité qui correspond à $x = 0$, ou bien estimer qu'il n'y a pas lieu d'y avoir égard. Une simple remarque suffira pour montrer que la question n'est point indifférente et qu'on doit en réalité mettre le plus grand soin à distinguer les *valeurs effectives* de ces autres valeurs qu'on peut désigner sous le nom de *valeurs limites* en rappelant ainsi qu'elles restent en dehors de la suite formée par les premières.

Supposons en effet que, dans l'exemple choisi, la valeur $y = 0$, qui répond à $x = 0$, puisse être considérée, non pas seulement comme une *valeur limite* mais bien comme une *valeur effective*. Il s'en suivra que la courbe représentée par l'équation (1) atteint l'origine des coordonnées et que, par suite, elle comporte nécessairement un tracé continu ayant cette même origine pour point de départ. Or il est évident qu'un pareil tracé est absolument impossible puisque rien ne détermine si c'est en s'élevant au-dessus de l'axe des x, ou au contraire, en s'abaissant au-dessous qu'il devrait commencer. On voit donc que la valeur $y = 0$ qui répond à $x = 0$ n'est qu'une *valeur limite* et qu'il n'est pas permis de lui attribuer le caractère d'une *valeur effective*.

La distinction que nous venons d'établir ne doit pas être perdue de vue en ce qui concerne l'exacte définition de la continuité.

Reportons-nous aux considérations développées, à partir de la page 60, n° 24 et suivants.

Nous avons dit à la fin du n° 46, page 110, qu'en faisant dépen-

dre la continuité de la périodicité dans les fonctions d'une variable imaginaire, on avait confondu deux caractères essentiellement distincts. Pour se convaincre de l'exactitude de cette assertion, il suffit de considérer la fonction

$$y = x^{\frac{3}{2}}.$$

En y posant

$$x = r\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,.\sin\theta),$$

on trouve pour les fonctions désignées au n° 24, page 61, par $\varphi(r,\theta)$, $\psi(r,\theta)$,

$$\varphi(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{3}{2}\,\theta, \quad \psi(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3}{2}\,\theta.$$

Il suit de là que la fonction $x^{\frac{3}{2}}$ est et reste continue pour toute valeur du module r. On voit d'ailleurs qu'elle ne reprend pas pour $\theta = 2\pi$ la valeur qu'elle affecte pour $\theta = 0$. Elle n'a donc pas la périodicité voulue pour être développable en série convergente suivant la formule de Maclaurin, et ce n'est pas le défaut de continuité, mais bien celui de périodicité qui accuse ici l'impossibilité du développement.

Nous avons démontré au n° 26, page 66, le théorême suivant :

Toute fonction est développable en série convergente suivant la formule de Taylor ou de Maclaurin tant que le module de la variable reste moindre que la plus petite des valeurs pour lesquelles la fonction cesse d'être continue ou de prendre mêmes valeurs aux deux limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$. *Lorsqu'on dépasse la plus petite de ces valeurs la série devient divergente.*

M. Tchebicheff a proposé en 1844 (*Journal de Crelle*, tome XXVIII), un autre énoncé dont je n'avais pas connaissance et qui se trouve reproduit dans le mémoire déjà cité de M. Marie. Voici cet énoncé :

« La série de Taylor

$$f(a) + \frac{z}{1} f'(a) + \frac{z^2}{1\,.\,2} f''(a) + \text{etc.}$$

» est divergente ou convergente suivant que le module de z est
» plus grand ou plus petit que celui de la valeur imaginaire x qui
» rendrait infinie ou discontinue une des fonctions,

$$f(a+x),\quad f'(a+x),\quad f''(a+x),\ \text{etc.}$$

Pour que ces deux énoncés concordent, il faut que la condition de périodicité, lorsqu'elle est remplie par une fonction continue, implique en ce qui concerne toutes les dérivées successives, la condition de continuité et réciproquement. C'est en effet ce qu'on peut établir, comme il suit, d'une manière générale.

Partons de notre théorème et considérons une suite de séries, toutes ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable, et déduites les unes des autres par dérivations successives. On sait que si l'une quelconque de ces séries est convergente pour toute valeur de la variable inférieure à une certaine limite, chacune des autres remplit en même temps cette même condition. De là, et eu égard à notre théorème, résulte en premier lieu la déduction suivante :

Étant donnée la suite infinie des fonctions

$$f(a+x),\quad f'(a+x),\quad f''(a+x),\ \text{etc.}$$

Si, pour toute valeur du module inférieure à une certaine limite, l'une quelconque de ces fonctions reste continue et reprend mêmes valeurs aux deux limites $\theta=0$, $\theta=2\pi$, chacune des autres remplit en même temps ces mêmes conditions.

On voit ainsi, qu'une fonction ne peut être continue et périodique * pour toute valeur du module inférieure à une certaine limite sans que ses dérivées successives ne soient en même temps continues **.

* Lorsque nous disons ici que la fonction est périodique, nous entendons exprimer qu'elle reprend mêmes valeurs aux deux limites $\theta=0$, $\theta=2\pi$.

** Il est clair que ces dérivées ne sont pas seulement continues, mais qu'elles sont aussi périodiques.

Supposons que la fonction donnée $f(a+x)$, soit continue à partir de $r=0$, et qu'étant d'abord périodique, elle cesse de l'être avant de subir aucune solution de continuité. Pour établir la réciproque de la proposition précédente, tout se réduit à démontrer que les dérivées successives comprises dans la suite infinie

$$f'(a+x),\quad f''(a+x),\quad f'''(a+x), \text{ etc.},$$

ne peuvent toutes rester continues alors que la fonction $f(a+x)$ cesse d'être périodique.

Soit

$$f(a+x)=f(a+re^{\theta\sqrt{-1}})=\varphi(r,\theta)+\sqrt{-1}\,\psi(r,\theta).$$

Observons d'abord que pour $r=o$, on a nécessairement

$$\varphi(r,o)=\varphi(r,2\pi)=f(a),\quad \psi(r,o)=\psi(r,2\pi)=o.$$

La condition de périodicité subsiste donc à l'origine.

Soit R la valeur du module au delà de laquelle la périodicité n'a plus lieu, bien que la continuité persiste. Cette valeur peut être aussi petite qu'on veut, elle peut même se réduire à zéro, sans modifier en rien les déductions suivantes.

Les fonctions $\varphi(r,\theta)$, $\psi(r,\theta)$ ne cessant pas d'être continues et périodiques pour toute valeur du module qui ne dépasse point la limite R, il s'en suit, d'abord, qu'on a généralement

$$f^n(a+x)=f^n_r(a+re^{\theta\sqrt{-1}})=\varphi^n_r(r,\theta)+\sqrt{-1}\,.\,\psi^n_r(r,\theta).$$

Il s'en suit, en outre, que la dérivée quelconque $f^n_r(a+re^{\theta\sqrt{-1}})$ reste continue et périodique pour toute valeur du module inférieure à R. Est-il possible que la continuité et la périodicité de la dérivée $f^n_r(a+re^{\theta\sqrt{-1}})$ s'étendent toutes deux au delà de cette même limite? *Évidemment non* [1]. Il faut donc qu'à partir de la

[1] Si la dérivée $f^n_r(a+re^{\theta\sqrt{-1}})$ pouvait franchir la limite R en restant continue et périodique, la fonction donnée $f(a+x)=f(a+re^{\theta\sqrt{-1}})$ remplirait nécessairement cette même condition, ce qui est contraire à l'hypothèse admise.

limite R la fonction $f_r^n(a+re^{\theta\sqrt{-1}})$ devienne discontinue ou bien qu'elle cesse d'être périodique. Cesse-t-elle d'être périodique sans devenir discontinue? Les équations de condition

$$\varphi_r^n(r, 2\pi) - \varphi_r^n(r, o) = o, \quad \psi_r^n(r, 2\pi) - \psi_r^n(r, o) = o,$$

subsistant pour toute valeur du module inférieure à R et n'ayant plus lieu au delà, il en résulte que les expressions

$$\varphi_r^n(r, 2\pi) - \varphi_r^n(r, o), \quad \psi_r^n(r, 2\pi) - \psi_r^n(r, o)$$

sont d'abord indépendantes de r et que, partant de zéro, pour $r = R$, elles deviennent et restent fonctions continues de r pour une suite non interrompue de valeurs toutes supérieures à R.

Cette déduction s'applique indistinctement à toutes les dérivées de la fonction $f(a+x)$. Si donc il n'était aucune de ces dérivées qui cessât d'être continue, à partir de $r = R$, il faudrait que chacun des termes des deux suites infinies

$$[\varphi_r'(R+r, 2\pi) - \varphi_r'(R+r, o)],\ [\varphi_r''(R+r, 2\pi) - \varphi_r''(R+r, o)],$$
$$[\varphi_r'''(R+r, 2\pi) - \varphi_r'''(R+r, o)],\ \text{etc.},$$
$$[\psi_r'(R+r, 2\pi) - \psi_r'(R+r, o)],\ [\psi_r''(R+r, 2\pi) - \psi_r''(R+r, o)],$$
$$[\psi_r'''(R+r, 2\pi) - \psi_r'''(R+r, o)],\ \text{etc.},$$

pût satisfaire en même temps à la double condition de s'annuler avec le module r et de rester fonction continue de ce même module dans un certain intervalle compté à partir de $r = o$.

On démontre aisément que la première de ces conditions est incompatible avec la seconde *. Il en résulte que si la fonction donnée $f(a+x)$ cesse d'être périodique en restant continue, il est impossible que ses dérivées successives demeurent toutes finies et continues dans un intervalle quelconque ayant pour origine la

* Voir, page suivante, la note sur les fonctions dont toutes les dérivées successives s'annulent en même temps pour une même valeur de la variable.

limite au-delà de laquelle il n'y a plus périodicité. Cela revient à dire que, dans la suite infinie des dérivées successives, la continuité ne peut s'étendre plus loin que la limite R.

Concluons que les deux énoncés reproduits ci-dessus peuvent être considérés comme équivalents. Le premier a l'avantage de tout ramener à l'examen direct d'une seule et même fonction, qui peut être indifféremment, soit la fonction donnée, soit l'une quelconque de ses dérivées successives ; le second présente l'inconvénient de faire intervenir à la fois toutes ces dérivées : néanmoins, comme il fait tout dépendre d'une condition unique, la continuité, il peut, en certains cas se mieux prêter aux applications. Sous ce rapport on doit les connaître tous deux et se servir de l'un ou de l'autre suivant les circonstances.

NOTE II.

Sur les fonctions dont toutes les dérivées successives s'annulent en même temps pour une même valeur particulière de la variable.

Soit

(1). . . . . $y=f(x)$

une fonction quelconque, supposée telle que toutes ses dérivées successives s'annulent en même temps pour $x=a$. Imaginons, s'il est possible, que la fonction y et ses dérivées successives soient toutes continues depuis $x=a$ jusqu'à $x=a+h$. La formule (1) du n° 16, page 44, donne identiquement

$$(2).\quad f(a+h)-f(a)=\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n}\,\mathrm{M}_0^1\,(1-u)^n f^{n+1}(a+hu),$$

et le nombre n *peut être pris aussi grand que l'on veut.* De là résulte

$$(3). \quad . \quad . \; M_0^1 f^{n+1}(a + hu) > \frac{1.2\ldots n}{h^{n+1}} [f(a+h) - f(a)].$$

Attribuons à h une valeur quelconque, aussi petite qu'on veut, mais déterminée. Si l'on prend pour n des valeurs de plus en plus grandes, le second membre de l'inégalité (3) croît indéfiniment et peut ainsi dépasser tout degré de grandeur assignable. Cela revient à dire que l'intervalle h ne peut jamais être assez petit pour que la moyenne $M_0^1 f^{n+1}(a + hu)$ ne devienne pas infinie avec le nombre n. La conséquence est que les dérivées comprises dans la suite infinie,

$$f'(a + hu), \quad f''(a + hu), \quad f'''(a + hu), \text{ etc.}$$

ne peuvent pas être considérées comme satisfaisant *toutes* à la condition de ne subir aucun changement brusque lorsqu'on passe de la valeur $u = o$ à une valeur quelconque aussi rapprochée qu'on voudra de la première.

Pour peu qu'on réfléchisse sur les rapports existant entre l'accroissement d'une grandeur et les vitesses exprimées par ses différentielles, il semble qu'une même valeur de la variable ne puisse jamais annuler en même temps toutes les dérivées successives d'une même fonction. Telle serait, pensons-nous, la conclusion générale à laquelle on aboutirait, si l'on distinguait toujours les *valeurs effectives des valeurs limites* * et que l'on rangeât parmi les dernières toutes celles qui correspondent à l'apparition du symbole $\frac{1}{0}$. Quoi qu'il en soit, dès qu'on procède comme on le fait habituellement, il y a lieu d'admettre qu'il est des fonctions dont les dérivées successives s'annulent toutes ensemble pour une même valeur de la variable; je citerai, comme exemple, la fonction

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

* Voir la note qui précède.

Lorsqu'on pose $x = o$, la continuité subsistant par hypothèse, on a pour valeur effective

$$y = o.$$

S'agit-il ensuite de la dérivée d'un ordre quelconque n? On trouve aisément que la limite vers laquelle cette dérivée converge, à mesure que la variable x se rapproche de zéro, a pour expression générale,

$$\frac{2^n . y}{x^{3n}} = \frac{1}{\left(\frac{x^3}{2}\right)^n e^{\frac{1}{x^2}}}.$$

Faisons

$$x^2 = \frac{1}{m.n}$$

et observons que, pour avoir $x = o$, il faut poser $m = \infty$.

Le dénominateur

$$\left[\frac{x^3}{2}\right]^n e^{\frac{1}{x^2}}$$

devenant

$$\left[\frac{1}{2n^{3/2}} \cdot \frac{e^m}{m^{3/2}}\right]^n,$$

on voit qu'il satisfait aux deux conditions suivantes :

1° Pour toute valeur déterminée de n il croît sans limites avec m;

2° Pour toute valeur déterminée de m, il converge vers zéro en même temps que le nombre n est pris de plus en plus grand.

On reconnait ainsi que, s'il est permis de dire de toutes les dérivées de la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ qu'elles s'annulent pour $x = o$, il faut ajouter en même temps qu'il n'existe à partir de zéro aucun intervalle qu'elles puissent *toutes* franchir sans passer brusquement de zéro à une valeur indéfiniment grande.

Imaginons qu'à la fonction

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

on substitue cette autre fonction

$$y = e^{-\frac{1}{(x-a)^2}};$$

ce que nous avons dit de la première, par rapport à la valeur $x=o$, s'applique à la seconde pour la valeur $x=a$. Il en résulte que s'il s'agissait de développer, suivant la formule de Taylor, une expression de la forme

$$\mathrm{F}(x) = f(x) + e^{-\frac{1}{(x-a)^2}},$$

et que, partant de la valeur $x=a$, on écrivît

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(a) + \frac{x-a}{1}\mathrm{F}'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\,.\,2}\mathrm{F}''(a) + \text{etc.},$$

la série, supposée convergente, se réduirait au développement exclusif de la fonction $f(x)$. Cette anomalie apparente s'explique en observant que, pour être en droit d'appliquer la formule de Taylor, il ne suffit pas que les valeurs affectées pour $x=a$ par chacune des dérivées successives $\mathrm{F}'(x)$, $\mathrm{F}''(x)$, etc., fassent converger la série

$$(4)\quad .\;.\;.\quad \mathrm{F}(a),\quad \frac{x-a}{1}\mathrm{F}'(a),\quad \frac{(x-a)^2}{1\,.\,2}\mathrm{F}''(a),\text{etc.}:$$

il faut en outre que l'expression générale

$$\frac{h^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}\,\mathrm{M}_0^1(1-u)^n\,\mathrm{F}^{n+1}(a+hu)$$

devienne indéfiniment petite à mesure que le nombre n est pris de plus en plus grand, et cela, pour toute valeur de h inférieure à une certaine limite déterminée. S'il arrive, comme dans l'exemple choisi ci-dessus, que cette limite n'existe pas ou, ce qui revient au même, qu'il faille la faire converger vers zéro à mesure qu'on attribue à n des valeurs de plus en plus grandes, il s'ensuit que

ce n'est point comme développement de la fonction $F(x)$ que la série (4) peut subsister. La marche suivie pour parvenir à la formule de Taylor ne laisse aucun doute sur ce point.

En appliquant à la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ le procédé de transformation que comporte la règle du n° 26, page 70, et posant, en conséquence,

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\,.\sin\theta).$$

On a d'abord

$$x^2 = r^2[\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta],$$

puis

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{r^2}[\cos 2\theta - \sqrt{-1}\sin 2\theta],$$

et, par suite,

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{\cos 2\theta}{r^2}}\left(\cos\frac{\sin 2\theta}{r^2} + \sqrt{-1}\sin\frac{\sin 2\theta}{r^2}\right).$$

De là résulte en général, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{r^2}}.$$

Il suit de là que la continuité ne s'étend pas jusqu'à $r = o$. Le développement suivant la formule de Maclaurin est donc impossible.

NOTE III.

Sur quelques applications de la formule de Maclaurin.

Développement d'une fonction suivant les puissances entières et positives d'une autre fonction de la même variable. — Soient $F(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions données d'une même variable x. Si l'on pose

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad y = \varphi(x) - \varphi(a),$$

a étant une constante, la fonction $F(x)$ devient dépendante de la variable y, et l'on peut écrire en conséquence,

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad F(x) = f(y).$$

Désignons par A, B, C ce que deviennent les dérivées $f'(y)$, $f''(y)$, $f'''(y)$, etc., lorsqu'on les exprime en fonction de la variable x. La combinaison des équations (1) et (2) donne successivement,

$$(3) \quad \ldots \quad \begin{cases} f'(y) = \dfrac{F'(x)}{\varphi'(x)} = A, \\ f''(y) = \dfrac{1}{\varphi'x} \cdot \left(\dfrac{dA}{dx}\right) = B, \\ f'''(y) = \dfrac{1}{\varphi'(x)} \cdot \left(\dfrac{dB}{dx}\right) = C, \end{cases}$$

et ainsi de suite indéfiniment.

Supposons que la fonction $f(y)$ soit développable en série convergente suivant la formule de Maclaurin : On a

$$f(y) = f(o) + \frac{y}{1} f'(o) + \frac{y^2}{1\,.\,2} f''(o) + \text{etc.},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \quad . \quad Fx = F(a) + A_a[\varphi(x) - \varphi(a)] + B_a \frac{(\varphi(x) - \varphi(a))^2}{1 \cdot 2} + C_a \frac{[\varphi(x) - \varphi(a)]^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

les coefficients A_a, B_a, C_a, etc., n'étant autre chose que les valeurs affectées pour $x=a$ par les fonctions A, B, C, etc.

Veut-on substituer aux coefficients A_a, B_a, C_a, etc., leurs valeurs respectives? Les équations (3) donnent

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} A_a &= \frac{F'(a)}{\varphi'(a)}, \\ B_a &= \frac{F''(a)\,\varphi'(a) - F'(a)\,\varphi''(a)}{[\varphi'(a)]^3}, \\ C_a &= \frac{F'''(a)\,\varphi'(a)^2 - 3F''(a)\,\varphi''(a)\,\varphi'(a) + 3F'(a)\,\varphi''(a)^2 - F'(a)\,\varphi'''(a)\,\varphi'(a)}{[\varphi'(a)]^5}. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

L'équation (4) peut servir en général à développer l'une par l'autre les deux fonctions données $F(x)$ et $\varphi(x)$. Elle se simplifie lorsque la valeur $x=a$ est choisie de manière à annuler $\varphi(a)$: elle tombe en défaut lorsque cette même valeur fait évanouir la dérivée $\varphi'(a)$.

Retour des suites. — Dans le cas du retour des suites, on a, par hypothèse,

$$y = \varphi(x) - \varphi(a) = b(x-a) + c\frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + d\frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.},$$

et, ce qu'on se propose, c'est de développer x suivant les puissances entières et positives de la variable y. Posons $F(x)=x$: On en déduit,

$$A_a = \frac{1}{b}, \quad B_a = -\frac{c}{b^3}, \quad C_a = \frac{3c^2 - bd}{b^5}, \quad \text{etc.}$$

De là résulte immédiatement le développement cherché

$$x = a + \frac{y}{b} - \frac{y^2}{1.2}\frac{c}{b^3} + \frac{y^3}{1.2.3}\cdot\frac{3c^2 - bd}{b^5} - \text{etc.}$$

Résolution approchée des équations numériques. — Dans le cas où l'on prend pour x une racine de l'équation

$$\varphi(x) = o,$$

et pour a une valeur approchée de cette racine, la différence

$$\varphi(x) - \varphi(a) = -\varphi(a)$$

étant petite, la série (4) peut converger rapidement et fournir ainsi un moyen prompt et facile de calculer la racine x avec tel degré d'approximation que l'on veut. En effet, si l'on pose comme tout à l'heure, $F(x) = x$, il en résulte $F(a) = a$; et, comme on a d'ailleurs $\varphi(x) = o$, il est visible que l'équation (4) donne immédiatement,

$$x = a - A_a\varphi(a) + B_a\frac{\varphi(a)^2}{1.2} - C_a\frac{\varphi(a)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

NOTE IV.

Sur la convergence et la divergence des séries.

On entend par *série* une suite *infinie* de termes qui dérivent les uns des autres suivant une loi déterminée.

Soit une série quelconque

(1). . . . . $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,$ etc.

Considérons la somme de n premiers termes, et posant

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \text{etc.} + u_{n-1},$$

imaginons qu'on attribue successivement à n toutes les valeurs comprises dans la suite infinie

1, 2, 3, 4, 5, etc.

Deux cas sont possibles selon que la somme S_n finit ou non par converger vers une limite déterminée. Dans le premier cas on dit de la série (1) qu'elle est *convergente*, et qu'elle a pour *somme* la limite dont la somme S_n se rapproche indéfiniment pour des valeurs de n de plus en plus grandes. Dans le second cas la série est dite *divergente*.

Pour qu'une série soit convergente, il faut d'abord et avant tout, que les termes qui s'y succèdent en nombre illimité finissent par converger vers zéro à mesure qu'ils s'éloignent davantage. En effet, s'il en est autrement, suivant qu'ils ont tous même signe ou qu'ils sont alternativement de signes contraires, leur somme croît sans limite, ou elle oscille sans fin entre des valeurs brusquement différentes.

La condition qui vient d'être énoncée est toujours nécessaire : elle ne suffit, en général, que dans le cas où les termes de la série

changent un à un de signe. Voici d'ailleurs, en ce qui concerne *les séries dont les termes sont tous positifs* [*], les caractères les plus simples auxquels on peut reconnaître qu'elles sont convergentes ou qu'elles ne le sont pas.

Il y a convergence ou divergence selon que, à partir d'un terme et pour tous les suivants, l'une ou l'autre des expressions

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}, \qquad \sqrt[n]{u_n}, \qquad \frac{\log n}{\log \frac{1}{u_n}},$$

reste toujours inférieure à l'unité [**] *ou qu'au contraire elle n'est jamais moindre que un.*

Dans le cas où le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *a l'unité pour limite supérieure, on peut écrire, en général,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha} \quad \text{et} \quad \lim \frac{1}{1+\alpha} = 1.$$

Il y a d'ailleurs, convergence ou divergence, selon qu'à partir d'un terme et pour tous les suivants le produit $n\alpha$ *l'emporte sur un d'une certaine quantité ou qu'au contraire il n'est jamais supérieur à un.*

Les règles que nous venons de résumer en quelques lignes peuvent se démontrer comme il suit :

1° Selon que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est toujours inférieur à la fraction quelconque r ou qu'au contraire il reste au moins égal à l'unité, on a

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \text{etc.} < u_n\,[1 + r + r^2 + \text{etc.}] < \frac{u_n}{1-r},$$

[*] Le cas d'une série où les termes sont tous négatifs se ramène évidemment à celui où ils sont tous positifs.

[**] Nous entendons par là qu'entre l'unité et la limite vers laquelle l'expression considérée peut être convergente, il existe un certain écart.

ou bien

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \text{etc.} \ \overset{=}{\underset{>}{\text{ou}}} \ u_n(1 + 1 + 1 + 1 + \text{etc.}).$$

Il s'en suit qu'il y a convergence dans le premier cas et divergence dans le second.

2° Selon que l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ est toujours inférieure à la fraction quelconque r ou qu'au contraire elle reste au moins égale à l'unité, on a

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \text{etc.} < r^n + r^{n+1} + r^{n+2} + \text{etc.} < \frac{r^n}{1-r},$$

ou bien

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \text{etc.} \ \overset{=}{\underset{>}{\text{ou}}} \ 1 + 1 + 1 + \text{etc.}$$

Il s'ensuit qu'il y a convergence dans le premier cas et divergence dans le second.

3° Les termes de la série (1) étant par hypothèse, tous positifs, supposons en outre qu'ils décroissent constamment à partir du premier.

Si, partant de la série (1) on forme cette autre série

(2). . . . . u_0, $2u_1$, $4u_3$, $8u_7$, $16u_{15}$, etc.,

il est aisé de voir que l'on a, d'une part,

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + \text{etc.} > u_0 + (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5 + u_6) + (u_7 + u_8 + \ldots) + \text{etc.}$$

et, d'autre part,

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + \text{etc.} < u_0 + 2\left\{\begin{matrix} u_1 + (u_2 + u_3) \\ + (u_4 + u_5 + u_6 + u_7) + \text{etc.}\end{matrix}\right\}.$$

Il suit évidemment de là que *les séries* (1) *et* (2) *sont en même temps ou toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.*

Posons $u_n = \frac{1}{(n+1)^m}$. Les séries (1) et (2) deviennent respectivement, la première

$$(3). \quad \ldots\ldots \quad 1, \quad \frac{1}{2^m}, \quad \frac{1}{3^m}, \quad \frac{1}{4^m}, \quad \text{etc.};$$

la seconde

$$(4). \quad \ldots\ldots \quad 1, \quad 2^{1-m}, \quad 4^{1-m}, \quad 8^{1-m}, \quad \text{etc.}$$

Or, la série (4) est convergente ou divergente *, selon que l'exposant m l'emporte ou non sur l'unité. Il en est donc de même de la série (3) : convergente pour toute valeur de m supérieure à 1, elle est divergente pour $m=1$ et pour toute valeur plus petite.

Cela posé, selon que le rapport

$$\frac{\log n}{\log \frac{1}{u_n}}$$

est toujours inférieur à la fraction quelconque $\frac{1}{m}$ (m étant plus grand que 1), ou qu'au contraire il reste au moins égal à l'unité, on a généralement

$$u_n < \frac{1}{n^m} \quad \text{ou bien} \quad u_n \ \begin{matrix} = \\ \text{ou} \\ > \end{matrix} \ \frac{1}{n}.$$

Dans le premier cas, il vient

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \text{etc.} < \frac{1}{n^m} + \frac{1}{(n+1)^m} + \frac{1}{(n+2)^m} + \text{etc.},$$

et il y a convergence, puisque par hypothèse m est plus grand que 1.

* Il est visible que la série (4) est une progression géométrique décroissante ou croissante selon que l'exposant m est, ou non, plus grand que l'unité

Dans le second cas, il vient

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \text{etc.} \ \overset{=}{\underset{>}{\text{ou}}} \ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \text{etc.}$$

et il y a divergence, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure et qu'on peut d'ailleurs le reconnaître directement *.

4° Supposons que, dans la série (1), le rapport d'un terme au précédent finisse par converger vers l'unité, tout en lui restant inférieur. On a, en ce cas,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

et si l'on attribue à n des valeurs toujours croissantes

$$\lim \frac{1}{1+\alpha} = 1.$$

Considérons la série (5) où le rapport d'un terme au précédent a pour expression générale

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m} = \frac{1}{1 + \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{n^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3} + \text{etc.}}.$$

Lorsque le produit $n\alpha$ a pour limite un nombre plus grand que

* On a

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \text{etc.} + \frac{1}{2n} > n\cdot\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit que la série $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{1+2}$, etc., est évidemment divergente.

l'unité, on peut écrire pour toute valeur de n qui dépasse un certain degré de grandeur

$$(5).\quad n\alpha > m + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,.\,\frac{1}{n} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{1}{n^2} + \text{etc.}$$

m *étant plus grand que* 1.

Divisons par n les deux membres de l'inégalité (5) et ajoutons 1 de part et d'autre. Il vient

$$1 + \alpha > 1 + \frac{m}{n} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\,\frac{1}{n^2} + \text{etc.} > \left[1 + \frac{1}{n}\right]^m$$

et, par suite,

$$(6).\quad \ldots\ldots\quad \frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{n}\right]^m}\,.$$

L'inégalité (6) fait voir que dans la série (1) les termes finissent par décroître *plus rapidement* qu'ils ne le font dans la série (3). Or, celle-ci est convergente pour toute valeur de m supérieure à l'unité; il faut donc que la première le soit *à fortiori* toutes les fois que l'on a

$$\lim n\,.\,\alpha > 1.$$

Lorsque le produit $n\alpha$ croît avec n sans jamais dépasser l'unité, on a pour toute valeur de n qui excède un certain degré de grandeur

$$n\alpha \ \overset{=}{\underset{<}{\text{ou}}}\ 1.$$

Il en résulte

$$1 + \alpha \ \overset{=}{\underset{<}{\text{ou}}}\ 1 + \frac{1}{n} \quad \text{et par suite} \quad \frac{1}{1+\alpha} \ \overset{=}{\underset{>}{\text{ou}}}\ \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\,.$$

La dernière inégalité fait voir que dans la série (1) les termes

finissent par décroître moins vite ou, tout au plus, aussi vite qu'ils le font dans la série

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+2}, \quad \text{etc.}$$

Or, celle-ci est divergente. Il faut donc qu'il en soit de même de la série (1), lorsque le produit $n\alpha$ croît avec n sans jamais dépasser l'unité.

Indépendamment des règles exposées ci-dessus et choisies parmi les plus simples, il en est encore une que je vais établir comme application de la théorie des valeurs moyennes à la convergence des séries dont les termes sont tous positifs.

Soit u_n le terme général de la série (1). Si l'on pose

$$u_n = f(n),$$

on peut admettre qu'à partir d'une certaine valeur $n = m$, la fonction $f(n)$ ne cesse pas de décroître continûment et de converger vers zéro à mesure qu'on attribue à n des valeurs de plus en plus grandes. Cela posé, il est visible que l'on a, d'une part

$$\mathrm{M}_m^{m+1} u_n < u_m, \quad \mathrm{M}_{m+1}^{m+2} u_n < u_{m+1}, \quad \mathrm{M}_{m+2}^{m+3} u_n < u_{m+2}, \text{ etc.},$$

et, d'autre part,

$$\mathrm{M}_m^{m+1} u_n > u_{m+1}, \quad \mathrm{M}_{m+1}^{m+2} u_n > u_{m+2}, \quad \mathrm{M}_{m+2}^{m+3} u_n > u_{m+3}, \text{ etc.}$$

De là résulte, en premier lieu,

$$(7) \quad \mathrm{M}_m^{m+1} u_n + \mathrm{M}_{m+1}^{m+2} u_n + \mathrm{M}_{m+2}^{m+3} u_n + \text{etc.} < u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \text{etc.},$$

et, en second lieu,

$$(8) \quad \mathrm{M}_m^{m+1} u_n + \mathrm{M}_{m+1}^{m+2} u_n + \mathrm{M}_{m+2}^{m+3} u_n + \text{etc.} > u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \text{etc.}$$

On a d'ailleurs, en désignant par $\mathrm{F}(n)$ la fonction dont la dérivée est $f(n)$,

$$(9) \quad \mathrm{M}_m^{m+1} u_n + \mathrm{M}_{m+1}^{m+2} u_n + \text{etc.} + \mathrm{M}_{p-1}^{p} u_n = (p-m)\mathrm{M}_m^{p} u_n = \mathrm{F}(p) - \mathrm{F}(m).$$

Combinons l'équation (9) avec les inégalités (7) et (8). Nous aurons en même temps

$$(10) \quad . \quad F(p) - F(m) < u_m + u_{m+1} + \text{etc.} + u_{p-1},$$

et

$$(11) \quad . \quad F(p) - F(m) > u_{m+1} + u_{m+2} + \text{etc.} + u_p.$$

La simultanéité des inégalités (10) et (11) montre que la série (1) est convergente ou divergente, selon que la fonction $F(n)$ converge ou non vers une limite déterminée pour des valeurs de n indéfiniment croissantes.

Considérons, en particulier, la série

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1, \ \frac{1}{2^r}, \ \frac{1}{3^r}, \ \frac{1}{4^r}, \ \text{etc},$$

On a

$$f(n) = \frac{1}{n^r},$$

et, par suite,

$$F(n) = \frac{n^{1-r}}{1-r}.$$

Il en résulte, conformément à ce qui précède, que la série (12) est convergente ou divergente selon que l'exposant r est, ou non, plus grand que l'unité.

Remarque relative aux séries dont les termes ne sont pas tous de même signe. — Étant donnée une série dont les différents termes se succèdent sans cesser de présenter des changements de signe, on peut la transformer en prenant tous ses termes positivement. S'il y a convergence après cette transformation, la convergence s'étend d'elle même à la série donnée. Celle-ci, d'ailleurs, peut être convergente alors que sa transformée ne l'est pas. C'est ainsi, par exemple, qu'une série dont les termes finissent par converger vers zéro et par prendre alternativement des signes contraires est

toujours convergente, tandis qu'elle peut devenir divergente par cela seul qu'on donne le même signe à tous ses termes. Telle est, en particulier, la série

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \text{etc.}$$

On observera que, dans le cas où les alternances de signe s'appliquent à l'ensemble de plusieurs termes, on peut grouper les termes qui se succèdent sans changer de signe, former de chaque groupe un terme unique et ramener ainsi la série donnée à une série dont les termes sont alternativement, l'un positif, l'autre négatif. Pour qu'il y ait convergence il suffit alors que dans la transformée les termes finissent par converger vers zéro à mesure qu'ils s'éloignent davantage.

DEUXIÈME SÉRIE.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE Ier.

INTERPRÉTATION GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

AVEC EXTENSION AUX DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS.

51. Soient x et y deux grandeurs quelconques, dépendant l'une de l'autre et liées entre elles par la relation,

(1) . . . . $y = f(x)$.

Lorsqu'on suppose ces grandeurs incessamment variables et qu'on désigne, par $\dot{x}$ ou dx pour la première, par $\dot{y}$ ou dy pour la seconde, leurs différentielles respectives, on a, en général,

$$\dot{y} = \dot{x} \cdot f'(x),$$

ou ce qui revient au même

(2) . . . . $dy \cdot = f'(x) \cdot dx$.

Soient p et q les points qui décrivent les longueurs quelconques, ou, plus simplement, les segments de droite substitués comme

équivalents numériques aux grandeurs x et y. On sait que les différentielles dx et dy ne sont autre chose que les vitesses respectives et simultanées des points décrivants p et q. Si, d'ailleurs, on désigne par Δx et Δy deux accroissements qui se correspondent à partir d'une origine quelconque déterminée, la valeur attribuée à la variable x restant la même dans les équations (1) et (2), on a, en même temps,

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \Delta y = \Delta x \,.\, M_x^{x+\Delta x} \,.\, f'(x).$$

Lorsque l'on attribue à x une valeur quelconque déterminée, on fixe par cela seul, d'une part, l'origine des accroissements Δx et Δy, d'autre part, le rapport qui s'établit à cette origine entre les vitesses simultanées des points p et q. Imaginons qu'ayant fait cela, on assujettisse les points p et q à conserver les vitesses qui les animent à l'origine des accroissements considérés : les longueurs qu'ils décrivent *dans cette hypothèse* conservent entre elles le même rapport que leurs vitesses respectives, *devenues constantes.* La conséquence est que l'équation (2) comporte en même temps deux interprétations distinctes, les différentielles dx et dy pouvant être indifféremment, soit les vitesses des points p et q à l'origine des accroissements Δx et Δy, soit les longueurs décrites simultanément par ces points, dans l'hypothèse où ils conservent les vitesses qu'ils ont à cette origine.

Plaçons-nous à ce dernier point de vue. La comparaison des équations (2) et (3) s'accorde avec la déduction précédente en faisant voir que, pour une même valeur quelconque attribuée à dx et à Δx, il y a identité entre la différentielle dy et ce que devient l'accroissement Δy, lorsque, au lieu de rester incessamment variable dans l'intervalle Δx, la dérivée $f'(x)$ est assujettie à conserver, pour toute l'étendue de cet intervalle, la valeur qu'elle y affecte à l'origine.

De là résulte le principe suivant :

Lorsqu'on attribue à la variable x *une valeur quelconque déterminée et qu'on fixe, par cela même, la valeur correspondante*

de la dérivée f'(x), *les différentielles* dy, dx *peuvent être considérées comme des différences ordinaires, ayant même origine que les accroissements effectifs* $\Delta y, \Delta x$, *et conservant entre elles un rapport invariable.*

52. Le principe qui vient d'être établi s'étend de lui-même aux différentielles de tous les ordres, la variable x étant prise pour variable indépendante et assujettie à croître ou à décroître uniformément. En effet on a, généralement, d'une part,

$$d^n y = f^n(x) \, . \, dx^n,$$

et, d'autre part,

$$\Delta^n y = \Delta x^n \, . \, \overset{n}{\mathrm{M}}{}_x^{x+\Delta x} f^n(x) \; * .$$

Il s'ensuit que si l'on attribue de part et d'autre une seule et même valeur aux deux quantités dx et Δx, il suffit, pour identifier la différentielle $d^n y$ avec la différence ordinaire du même ordre $\Delta^n y$ de soustraire la dérivée de l'ordre n, $f^n(x)$, aux changements qu'elle subit dans l'intervalle Δx et de l'assujettir à conserver, pour toute l'étendue de cet intervalle, la valeur qu'elle y affecte à l'origine. Ce résultat peut se formuler de la manière suivante :

Lorsqu'on attribue à la variable x *une valeur quelconque déterminée, et qu'on assujettit la dérivée de l'ordre* n, $f^n(x)$ *à conserver pour toute l'étendue de l'intervalle* Δx *la valeur qu'elle affecte à l'origine de cet intervalle, les différentielles* $d^n y$, dx^n *peuvent être considérées comme des différences ordinaires ayant même origine que les accroissements effectifs* Δy, Δx *et conservant entre elles un rapport invariable.*

Il est bien entendu, d'ailleurs, que si les différentielles $d^n y$ et dx^n sont considérées comme des différences ordinaires, la pre-

* Voir au besoin, pour ce qui concerne les différentielles des ordres supérieurs, le chapitre Ier des *applications analytiques*, n° 8, pages 25 et suivantes.

mière est une différence de l'ordre n, tandis que la seconde est la $n^{ième}$ puissance de la différence dx ou Δx.

53. Les considérations développées dans le n° 51 conduisent à plusieurs déductions que nous croyons devoir indiquer, tout en avertissant le lecteur qu'il peut passer outre et les laisser à l'écart, s'il éprouve la moindre difficulté à les bien entendre. Ces déductions ont, à nos yeux, une certaine importance et nous pensons qu'elles offrent, non-seulement et pour certains cas, un secours utile, mais aussi et généralement, un intérêt métaphysique très-digne d'attention. Quoi qu'il en soit, elles s'écartent assez des idées généralement admises pour soulever des objections spécieuses, et d'ailleurs, il nous est aisé de poursuivre sans nous appuyer sur elles. Si donc nous les indiquons, c'est en laissant au lecteur toute liberté d'en prendre ce qu'il voudra, rien même, pour peu qu'il les juge autrement que nous. Voici ces déductions dont l'énoncé suffit, soit parce que nous les avons déjà démontrées ailleurs, soit parce qu'il est très-facile de les établir comme conséquences des principes fondamentaux exposés dans le cours de cet ouvrage.

1° Dans toute fonction continue, $y = f(x)$, la génération simultanée des accroissements Δy et Δx commence, en général, suivant une raison de proportionnalité incessamment variable. Cette raison est exprimée par la valeur particulière que la dérivée $f'(x)$ affecte à l'origine de ces accroissements.

2° Lorsqu'on considère la raison de proportionnalité exprimée par la dérivée $f'(x)$ comme affectant dans l'intervalle Δx toutes ses déterminations successives, l'équation correspondante

$$\Delta y = \Delta x \,.\, \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x)$$

exprime *la loi variée* qui régit le développement continu de la différence ordinaire Δy.

3° On peut se placer à un point de vue différent, fixer l'origine des accroissements que l'on considère et supposer que, au lieu de varier incessamment dans l'intervalle Δx, la raison dont il s'agit conserve, pour toute l'étendue de cet intervalle, une seule et même détermination, celle qu'elle y affecte à l'origine. L'équation cor-

respondante à cette hypothèse est l'équation différentielle

$$dy = f'(x) \, . \, dx.$$

Elle exprime *la loi uniforme* qui régit le développement continu de l'accroissement différentiel dy, les accroissements dy et dx n'étant autre chose que des différences ordinaires qui conservent entre elles un rapport constant.

4° A partir de toute origine commune, il y a identité entre le *mode transitoire* suivant lequel commence la génération de l'accroissement effectif Δy et *le mode permanent* suivant lequel s'accomplit la génération de l'accroissement différentiel dy.

5° Quel que soit l'énoncé fourni comme traduction *directe et équivalente* de l'équation différentielle

$$dy = f'(x) \, . \, dx,$$

par cela seul que la condition exprimée a lieu d'une manière *permanente et invariable* dans la génération des accroissements différentiels dx et dy, on peut affirmer, sans autre intermédiaire, qu'elle subsiste *transitoirement* à l'origine des accroissements effectifs Δx et Δy.

6° Soit y une fonction continue de x *à déterminer* d'après les données suivantes :

1° Une grandeur incessamment variable et représentée numériquement par $\varphi(x)$ intervient dans la génération continue de l'accroissement Δy.

2° Si cette grandeur cessait d'être variable et que, *toutes choses restant d'ailleurs les mêmes*, elle fût assujettie à conserver une seule et même détermination, celle qu'elle affecte à l'origine de l'intervalle Δx, l'accroissement de la fonction *pris dans cette hypothèse*, aurait pour mesure le produit $\varphi(x) \, \Delta x$, x étant la valeur *quelconque* choisie pour origine de l'intervalle Δx.

Cela posé, l'on a comme traduction directe des données du problème,

$$dy = \varphi(x) \, . \, dx,$$

et, de cette équation différentielle, on déduit immédiatement,

$$\Delta y = \Delta x\, M_x^{x+\Delta x}\, \varphi(x),$$

ce qui résout la question proposée.

CHAPITRE II.

DES TANGENTES ET DES NORMALES AUX COURBES PLANES.

54. Une courbe quelconque étant donnée, on peut toujours concevoir un point qui la décrive. Quel que soit le lieu actuellement occupé par ce point, lorsqu'il en sort, c'est avec une certaine vitesse déterminée en direction. La droite qui fixe cette direction, et que nous avons désignée sous le nom de *directrice*, est la tangente à la courbe au lieu occupé par le point décrivant. De là les deux définitions suivantes, dont nous avons déjà demontré la rigueur absolue et qu'il importe d'avoir toujours présentes à la pensée dans les applications géométriques du calcul différentiel:

1° *La courbe est la trace d'un point qui se meut sur une droite mobile, dite directrice, le point glissant sur la droite et la droite tournant autour du point, tous deux incessamment.*

2° *La tangente à la courbe est la directrice du point décrivant, autrement dit, la droite suivant laquelle est dirigée la vitesse de ce point.*

Soit une courbe plane S, rapportée à des axes coordonnés rectangulaires OX, OY et déterminée par l'équation

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F(x, y) = 0.$$

Désignons par μ un point mobile assujetti à décrire la ligne S;

par m le lieu choisi pour position actuelle du point μ ; par x, y les coordonnées du lieu m. (Voir fig. 3, n° 56, page 134.)

Losque le point μ sort du lieu m, c'est avec une vitesse dirigée suivant la tangente et dont les composantes parallèles aux axes coordonnés sont respectivement, l'une $\dot{x}$ ou dx, l'autre $\dot{y}$ ou dy. De là résulte, en désignant par α l'angle de la tangente avec l'axe des x *,

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \tang \alpha = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx}.$$

Cela posé, il ne reste plus qu'à déterminer le rapport des deux différentielles dy et dx. La solution générale consiste à différencier l'équation (1). On en déduit

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy = o,$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}.$$

On a donc aussi

$$\tang \alpha = -\frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}.$$

Soient t et u les coordonnées courantes de la tangente en m à la ligne S. Il est visible que l'équation de cette droite étant d'abord

$$\frac{u - y}{t - x} = \tang \alpha,$$

* Cet angle est celui que la partie de la tangente située au-dessus de l'axe des x fait avec la partie de cet axe dirigée dans le sens positif.

on peut l'écrire, en général, sous la forme suivante :

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad (t - x)\left(\frac{dF}{dx}\right) + (u - y)\left(\frac{dF}{dy}\right) = o.$$

Si les axes coordonnés sont obliques au lieu d'être rectangulaires (l'angle qu'ils font entre eux étant désigné par θ), la seule différence consiste en ce que l'on doit remplacer tang α par le rapport de sin α à sin $(\theta - \alpha)$. L'équation (2) devient, en conséquence,

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} = \frac{dy}{dx},$$

et, comme la même substitution doit être faite partout, il s'ensuit que rien n'est changé dans l'équation (4).

On observera qu'on peut passer directement de l'équation (3) à l'équation (4). Il suffit pour cela de substituer aux différentielles dx et dy les différences ordinaires qu'elles expriment. Cette substitution s'accorde avec l'hypothèse que les composantes $\dot{x}$, $\dot{y}$ conservent entre elles un rapport invariable, celui qu'elles affectent à l'instant précis où le point μ sort du lieu m. La conséquence est que le point μ ne cesse pas de se mouvoir suivant une seule et même direction, celle de la tangente en m à la ligne S. C'est donc une droite qu'il décrit et l'équation (4) est nécessairement l'équation de cette droite *.

* Si l'on voulait procéder ici par application des principes du n° 53, voici comment on pourrait s'y prendre.

Partant de l'équation.

$$F(x, y) = o,$$

on observerait que l'équation différentielle

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy = o$$

est *en différences ordinaires* l'équation *d'une ligne qui touche* la courbe S au

55. La normale au point m de la ligne S est la droite menée par ce point perpendiculairement à la courbe : elle est ainsi déterminée en même temps que la tangente. Si les axes coordonnés sont rectangulaires et qu'on désigne par α' l'angle que la normale en m fait avec l'axe des x, on a l'équation de condition

$$\operatorname{tang} \alpha . \operatorname{tang} \alpha' + 1 = o.$$

De là résulte

$$\operatorname{tang} \alpha' = -\frac{dx}{dy},$$

et désignant par t, u les coordonnées courantes de la normale

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad (u-y)\left(\frac{dF}{dx}\right) - (t-x)\left(\frac{dF}{dy}\right) = o.$$

Au lieu de déduire l'équation de la normale de celle de la tangente, on peut procéder directement, sans autre secours que celui de l'analyse différentielle. En effet, soient t, u, les coordonnées d'un point quelconque a pris sur la normale en dehors du point m. Supposons le point a fixe et prenons-le pour centre du cercle qui touche en m la ligne S. Il est visible qu'on peut substituer ce cercle à la ligne S sans altérer en rien la vitesse du point μ au sortir du lieu m, ni par conséquent les composantes dx et dy. Mais, dans

point m. Cela résulte de ce qu'en persistant dans sa détermination première, le rapport des vitesses dx et dy n'est point altéré, ni par conséquent la direction qu'il détermine de part et d'autre à l'origine commune des accroissements.

Considérant la ligne dont il vient d'être fait mention, et substituant aux différentielles les différences qu'elles expriment, il vient, en désignant par t et u les coordonnées courantes de cette ligne,

$$(t-x)\left(\frac{dF}{dx}\right) + (u-y)\left(\frac{dF}{dy}\right) = o.$$

Or, dans un système quelconque d'axes coordonnés rectilignes, cette équation représente une droite. La ligne dont il s'agit est donc la tangente elle-même.

l'hypothèse où le point μ sort du lieu m en restant sur le cercle am, on a généralement

$$(2) \quad . \quad . \quad (t-x)^2 + (u-y)^2 = \overline{am}^2 = \text{const}^{\text{e}}.$$

Il vient donc, en différentiant par rapport aux variables x, y,

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad (t-x)\,dx + (u-y)\,dy = o.$$

Cela posé, on a comme au n° 54, page 151,

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy = o.$$

Substituant au rapport $\frac{dy}{dx}$ la valeur déduite de cette équation, on trouve, pour équation de la normale,

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad (u-y)\left(\frac{dF}{dx}\right) - (t-x)\left(\frac{dF}{dx}\right) = o.$$

Si les axes coordonnés sont obliques, au lieu d'être rectangulaires, l'équation (2) est remplacée par la suivante

$$(5) \quad (t-x)^2 + (u-y)^2 + 2\,(t-x)(u-y)\cos\theta = \overline{am}^2 = \text{const}^{\text{e}},$$

θ étant l'angle des axes coordonnés.

La différentiation de l'équation (5) donne

$$[t - x + (u-y)\cos\theta]\,dx + [u - y + (t-x)\cos\theta]\,dy = o.$$

De là résulte, en opérant comme tout à l'heure,

$$(u-y)\left[\left(\frac{dF}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\cos\theta\right] - (t-x)\left[\left(\frac{dF}{dy}\right) - \frac{dF}{dx}\cos\theta\right] = o,$$

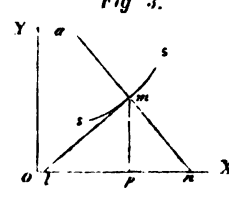


Fig 3.

et telle est l'équation de la normale dans un système quelconque d'axes coordonnés rectilignes.

56. Soient $T = mt$ et $N = mn$ les parties de la tangente et de la normale comprises entre le point m et l'axe des x. Les

parties de cet axe comprises entre la projection p du point m et chacun des deux points t et n prennent respectivement les noms de *sous-tangente* et de *sous-normale*. Nous les désignerons par les symboles ST, SN.

Cela posé, on parvient aisément aux formules suivantes, les axes étant rectangulaires,

$$T = mt = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}, \quad N = mn = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

$$ST = pt = -y\frac{dx}{dy}, \qquad SN = pn = y\frac{dy}{dx}.$$

On observera qu'en affectant du signe — l'expression de la sous-tangente, on indique le sens de sa direction à partir du point p.

Applications particulières.

57. Les formules établies ci-dessus s'appliquent au cas général où la courbe que l'on considère est donnée par son équation. Lorsqu'elle est définie géométriquement et qu'on peut déterminer la vitesse du point décrivant, soit d'une manière directe, soit par ses composantes, il est souvent plus simple de s'en tenir à cette méthode introduite pour la première fois par Roberval. Montrons, par quelques exemples, le parti que l'on peut tirer de ces diverses ressources.

Considérons d'abord les trois sections coniques et, pour les embrasser toutes trois dans une seule et même détermination, définissons-les comme le lieu des points dont les distances à un point et une droite fixes conservent entre elles un rapport constant.

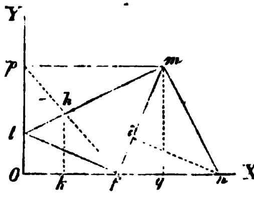
Prenons pour axe des y la droite fixe OY et pour axe des x la perpendiculaire OX abaissée sur cette droite du point fixe f.

Soit a la distance Of, m un point quelconque du lieu que l'on considère, mp la perpendiculaire abaissée du point m sur l'axe

des y, c le rapport constant qui subsiste, par hypothèse, entre le rayon vecteur fm et la distance mp.

On sait que le lieu des points m est une ellipse, une hyperbole ou une parabole selon que l'on a $c < 1$, $c > 1$ ou $c = 1$. L'équation générale des trois lignes est, d'ailleurs, ainsi qu'on le voit aisément,

Fig. 1.



$$(1) \quad . \quad . \quad y^2 + (x - a)^2 = c^2 x^2.$$

De là résulte, pour l'équation de la tangente en m,

$$(2) \quad . \quad . \quad y'(y - x') + [(1 - c^2)x' - a](x - x') = o\ ^*,$$

x', y' étant les coordonnées du point m.

Soit t le point où cette tangente vient couper l'axe des y. On a, pour ce point,

$$x = o, \quad y = y' + \frac{x'[(1 - c^2)x' - a]}{y'} = \frac{a(x' - a)}{y'}.$$

Il s'ensuit que l'équation de la droite tf se réduit à

$$y = -\frac{x' - a}{y'}(x - a),$$

et, comme celle de la droite fm est

$$y = \frac{y'}{x' - a}(x - a),$$

on voit que *les droites* mf, ft, *sont rectangulaires.*

* Pour obtenir cette équation, il suffit de différentier l'équation (2) et de remplacer x par x', y par y', dx par $x - x'$, dy par $y - y'$.

L'équation de la normale au point m étant

$$[(1-c^2)x'-a](y-y')-y'(x-x')=o$$

si l'on désigne par n le point où cette normale vient couper l'axe des x, on en déduit, en posant $y=o$,

$$x=On=a+c^2x',$$

et, par suite,

$$fn=c^2x'.$$

On a, d'ailleurs,

(3). . . . . $mf=cx'.$

Il vient donc aussi

(4). . . . . $fn=c.mf.$

L'équation (4) exprime la propriété suivante :

Il existe, entre la distance du foyer f *au point où la normale coupe l'axe des* x *et le rayon vecteur* fm, *le même rapport qu'entre ce rayon vecteur et la distance du point* m *à la droite fixe* OY.

Des points m et n abaissons deux perpendiculaires, l'une mq sur OX, l'autre ni sur fm. La similitude des triangles mfq, nfi donne, d'abord,

$$\frac{fi}{fn}=\frac{fq}{mf},$$

et, eu égard à l'équation (4),

$$fi=c.fq=c(x'-a).$$

De là résulte, eu égard à l'équation (3),

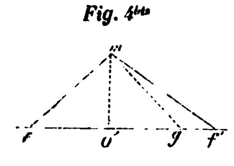
(5). . $mi=mf-fi=cx'-c(x'-a)=a.c=\text{const}^{te}.$

La propriété exprimée par l'équation (5) peut s'énoncer comme il suit :

Dans les sections coniques la projection de la normale sur le rayon vecteur est une quantité constante *.

* Dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole on trouve aisément, pour l'abscisse λ du centre,

Fig. 4bis



$$\lambda = \frac{a}{1 - c^2},$$

et, pour l'équation rapportée au centre,

$$y^2 + (1 - c^2)x^2 = \frac{a^2c^2}{1 - c^2}.$$

Soient a', b' les axes principaux et c' l'excentricité, on a

$$c'^2 = a'^2 - b'^2, \quad a' = \frac{ac}{1 - c^2}, \quad b' = \frac{ac}{\sqrt{1 - c^2}}, \quad c' = \frac{ac^2}{1 - c^2} = a'.c,$$

et inversement

$$c = \frac{c'}{a'}, \qquad a = \frac{a'^2 - b'^2}{c'} = \frac{b'^2}{c'}.$$

Soit O' le centre; m' le sommet placé sur l'axe b'; $m'g$ la perpendiculaire élevée en m' sur le rayon recteur fm'. On a

$$O'g = \frac{b'^2}{c'} = a.$$

Si l'on désigne par $\mathfrak{C}$ l'angle que fait avec la normale en m le rayon vecteur fm, on a généralement, comme on le verra plus loin, n° 62, page 173,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos^2 \mathfrak{C} = \frac{a^2}{a^2 + y^2}.$$

Soient f, f' les deux foyers, et r, r' les rayons vecteurs conjugués fm, $f'm$. On a

$$r = cx,$$

$$r' = c(2a + 2c' - x) = c\left(2a + \frac{2ac^2}{1 - c^2} - x\right) = \frac{c}{1 - c^2}(2a - x + c^2x).$$

S'agit-il ensuite des longueurs désignées par les lettres T, N, ST, SN, au numéro précédent? On trouve

$$T = \frac{cy'\sqrt{x'[2a - (1 - c^2)x']}}{(1 - c^2)x' - a}, \quad N = c\sqrt{a^2 + y'^2}$$

$$ST = \frac{y'^2}{a - (1 - c^2)x'}, \quad SN = (1 - c^2)x' - a.$$

De là résulte

$$rr' = \frac{c^2}{1 - c^2}[c^2x^2 + 2ax - x^2] = \frac{c^2}{1 - c^2}(u^2 + y^2),$$

et, par suite,

(2). . . . . . $rr' \cos^2 \mathcal{C} = \frac{a^2c^2}{1 - c^2} = \text{cons}^{\text{te}} = b'^2.$

La propriété exprimée par l'équation (2) peut s'énoncer comme il suit, en ce qui concerne l'ellipse et l'hyperbole :

Le produit des projections des rayons vecteurs sur la normale est le même en chaque point. Il a pour mesure le carré du demi-axe perpendiculaire à la ligne des foyers.

Dans le cas de la parabole, il est aisé de voir qu'au lieu de l'équation (2), l'on a plus simplement

$$r \cos^2 \mathcal{C} = \frac{a}{2} = \text{cons}^{\text{te}}.$$

Dans ce cas, en effet, les longueurs mf, mp étant égales (fig. 4, page 156), la tangente mt est bissectrice de l'angle fmp.

Il suit de là qu'en désignant par h le point d'intersection des droites mt, fp et par k la projection de ce point sur Of, on a les conséquences suivantes :

Les points h et k sont les milieux respectifs des segments fp, fO. Les angles pfm, mpf, pfO sont égaux entre eux et à l'angle désigné ci-dessus par $\mathcal{C}$.

Les triangles fhm, fhk, tous deux rectangles, l'un en h, l'autre en k, donnent les relations

$$fh = r \cdot \cos \mathcal{C}, \qquad kf = fh \cdot \cos \mathcal{C}.$$

De là résulte, en remplaçant kf par $\frac{a}{2}$,

$$fh \cdot \cos \mathcal{C} = r \cos^2 \mathcal{C} = \frac{a}{2}.$$

58. Conservons les notations précédentes et procédons par voie géométrique.

Lorsque le point *m* sort du lieu qu'il occupe, la droite *fm* tournant autour du point *f* et la droite *mp* se déplaçant sans changer de direction, un rapport constant subsiste, *par hypothèse,* entre les longueurs que le point *m* décrit simultanément sur chacune de ces droites. Il s'ensuit que ce même rapport s'établit entre les vitesses simultanées qui animent le point *m*, l'une suivant *fm*, l'autre suivant *mp*. On sait d'ailleurs que ce rapport est précisément le même que celui de la longueur *fm* à la longueur *mp*. La conséquence est que si l'on prend la longueur *mf* pour représenter en direction, sens et grandeur la vitesse actuelle du point *m* sur la droite *fm,* on doit prendre en même temps la longueur *mp* pour représenter en direction, sens et grandeur la vitesse du point *m* suivant la droite *mp*.

Cela posé, le point *m* étant considéré d'abord comme restant sur la droite *fm,* il est visible que sa vitesse totale a pour composantes rectangulaires : 1° la vitesse de glissement mentionnée tout à l'heure et représentée par *mf;* 2° une vitesse de circulation normale à la première et, par conséquent, parallèle à la droite *ft* menée par le point *f* perpendiculairement à *fm*. Concluons en premier lieu que le segment de droite, qui représente en direction, sens et grandeur la vitesse totale du point *m,* aboutit quelque part sur la droite *ft*.

Si maintenant nous considérons le point *m* comme restant sur la droite *mp,* le même raisonnement nous fait conclure que le segment de droite, qui représente en direction, sens et grandeur la vitesse totale, du point *m,* aboutit quelque part sur la droite *p*O menée par le point *p* perpendiculairement à la droite *mp*. Il s'ensuit que, située à la fois sur chacune des droites *ft, p*O, l'extrémité de ce segment ne peut être qu'en *t,* à leur intersection. *C'est donc suivant* mt *qu'est dirigée la vitesse actuelle du point* m *et, par conséquent aussi, la tangente en ce point.*

On observera que, pour parvenir à ce résultat, nous aurions pu nous borner à invoquer la règle générale du quadrilatère des vitesses, règle exposée à la page 42 de la 1re partie, n° 14.

Cette première propriété des sections coniques fournit un tracé très-simple de la tangente en un point quelconque m.

On élève en f *sur le rayon vecteur* fm *une perpendiculaire que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre en* t *avec la droite* OY. *La droite* tm *est la tangente cherchée.*

Les angles mpt, mft étant droits, le quadrilatère $mptf$ est inscriptible dans la circonférence de cercle ayant mt pour diamètre. Il s'ensuit que si l'on tire la droite fp, le triangle fmp est semblable au triangle nfm, mn étant la normale au point m. En effet, les angles mfn, pmf sont égaux comme alternes internes. D'un autre côté, les angles mpf, fmn sont égaux entre eux, puisqu'ils le sont à un même troisième ftm, le premier comme ayant même mesure dans le cercle $ftpm$, le second comme compris entre des côtés respectivement perpendiculaires à ceux de l'angle ftm. De là résulte immédiatement

$$(1). \quad \ldots\ldots \quad fn = fm \cdot \frac{fm}{mp} = c \cdot fm.$$

Le reste s'achève comme au n° 57, page 157, par voie purement géométrique et donne, en conséquence,

$$(2). \quad \ldots\ldots \quad mi = c \cdot a = \text{cons}^{\text{te}}.$$

On peut observer, d'ailleurs, qu'en abaissant du point n sur m la perpendiculaire ni, on forme deux triangles rectangles, l'un nim semblable au triangle mft, l'autre nif semblable au triangle fOt. La comparaison des deux premiers donne

$$\frac{mi}{in} = \frac{ft}{fm},$$

celle des deux seconds,

$$\frac{in}{fn} = \frac{Of}{ft} = \frac{a}{ft};$$

De là résulte, en multipliant membre à membre,

$$\frac{mi}{fn} = \frac{a}{fm},$$

et, eu égard à l'équation (1),

(3). . . . . $mi = c.a = \text{cons}^{\text{te}}$.

Les équations (1) et (3) fournissent les énoncés suivants applicables aux trois sections coniques:

1° *Le rayon vecteur du point* m *est moyenne proportionnelle entre la distance de ce point à la droite* OY *et la distance du point* f *au pied de la normale;*

2° *La projection de la normale* mn *sur le rayon vecteur* fm *est une quantité constante.*

59. Considérons encore les sections coniques, mais séparément et en adoptant pour chacune sa définition ordinaire. Pour plus de simplicité nous procéderons exclusivement par voie géométrique.

S'agit-il d'abord de la parabole? Elle est définie: le lieu des points équidistants d'une droite et d'un point tous deux fixes. Dès lors rien ne change dans la solution précédente, si ce n'est que l'égalité des longueurs mf, mp implique celle des triangles mft, mpt, et par conséquent aussi celle des angles fmt, pmt. De là résultent plusieurs propriétés dont il suffit que nous énoncions les suivantes:

Sans rien changer aux notations précédentes, transportons l'axe des y en A milieu de Of et sommet de la parabole; prolongeons la tangente mt jusqu'à sa rencontre en s avec l'axe principal fAO pris pour axe des abscisses:

Fig. 5.

1° La tangente mt est dirigée suivant la bissectrice de l'angle pmf. Elle est parallèle à la bissectrice de l'angle mfq;

2° Le triangle smf est isocèle: il donne $fm = fs$. De là, et eu

égard à $fm = mp$, résulte d'abord $fs = mp = Oq$, et ensuite $Aq = As$. *La sous-tangente* sq *est donc double de l'abscisse* Aq;

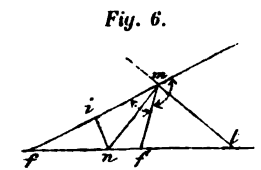
3° La normale étant dirigée suivant la bissectrice du supplément de l'angle pmf, il s'ensuit que la sous-normale nq est égale à la projection mi de la normale mn sur le rayon vecteur fm, et qu'en conséquence elle est constante et égale à $Of = a$.

S'agit-il ensuite de l'ellipse? Elle est définie : le lieu des points dont les distances à deux points fixes, nommés foyers, forment ensemble une somme constante.

Soit m un point de l'ellipse; f, f', les foyers. Tirons les rayons vecteurs fm, $f'm$.

Dans la description de l'ellipse le point m peut être considéré comme glissant sur l'un ou l'autre des deux rayons vecteurs fm, $f'm$, tandis que ce même rayon tourne autour du foyer qui lui correspond. Il s'ensuit que sa vitesse totale a pour composantes : 1° la vitesse de glissement du point m sur le rayon vecteur que l'on considère; 2° une vitesse de circulation perpendiculaire à ce même rayon. Cela posé, puisque les deux rayons vecteurs forment ensemble une somme constante, il est aisé de voir que les vitesses de glissement du point m sur ces rayons sont égales et de signe contraire. De là résultent, conformément à la règle du quadrilatère des vitesses, les conséquences suivantes :

Fig. 6.



1° *La vitesse totale du point* m *et, par conséquent, la tangente en* m *à l'ellipse sont dirigées suivant la bissectrice de l'angle que l'un des rayons vecteurs fait avec le prolongement de l'autre;*

2° *La normale en* m *est dirigée suivant la bissectrice de l'angle que font entre eux les deux rayons vecteurs aboutissant en ce point.*

Soit n le point où la normale en m vient couper la droite ff'. L'égalité des angles fmn, $f'mn$, donne la proportion

$$\frac{fn}{f'n} = \frac{fm}{f'm}.$$

En désignant par $2a'$ la somme des rayons vecteurs, on en déduit cette autre proportion

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{fm}{fn} = \frac{2a'}{ff'} = \text{cons}^{\text{te}}.$$

L'équation (1) montre que *le rapport des longueurs* fm, fn *demeure invariable* et que, par conséquent, *ce même rapport subsiste entre les vitesses de glissement du point* m *sur* fm *et du point* n *sur* ff'.

Désignons par v la première de ces vitesses, et par u la seconde. On a d'abord

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad v = u \cdot \frac{fm}{fn}.$$

Du point n abaissons sur fm la perpendiculaire ni et considérons les déplacements simultanés des points m et i sur la droite fm, le point m restant sur l'ellipse, la droite fm tournant autour du point f, le point n glissant sur ff' et entraînant avec lui la droite ni assujettie à rester perpendiculaire au rayon vecteur fm.

Soit ω la vitesse angulaire de la droite fm autour du point f. La vitesse de circulation du point m est $\omega.fm$. Soit ζ l'angle fmn. Cet angle est égal à celui que la vitesse totale du point m, dirigée suivant la tangente mt, fait avec la perpendiculaire élevée en m sur fm. C'est d'ailleurs suivant cette perpendiculaire qu'est dirigée la vitesse de circulation $\omega.fm$. On a donc, ainsi qu'on le voit aisément,

$$\frac{\omega \cdot fm}{v} = \cot \zeta = \frac{mi}{in}\ *.$$

On déduit de là, eu égard à l'équation (2),

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \omega \cdot in = u \cdot \frac{mi}{fn}.$$

* La vitesse totale du point m ayant pour composantes rectangulaires les vitesses v et $\omega \cdot fm$, le rapport de la première de ces composantes à la seconde n'est autre chose que la tangente de l'angle ζ que la vitesse totale du point m fait avec la composante $\omega \cdot fm$.

Observons ici que la droite *in*, assujettie à rester perpendiculaire au rayon vecteur *fm*, tourne autour du point *n* avec la vitesse ω et communique, en conséquence, au point *i* une vitesse $\omega.in$ dirigée suivant *fm*. La droite *in* est animée, en outre, d'une translation dirigée suivant *ff'* pour le point *n* et représentée par *u*. La vitesse qui résulte de cette translation pour le glissement du point *i* sur *fm* est évidemment $u \cos\alpha$, α étant l'angle *mfn*. On a, d'ailleurs,

$$(4). \quad \ldots\ldots\ldots \quad u\cos\alpha = u\,\frac{fi}{fn}.$$

De là résulte, pour la vitesse totale de glissement du point *i* sur la droite *fm*,

$$\omega.in + u.\cos\alpha,$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux équations (2), (3), (4),

$$(5). \quad \ldots\ldots \quad u.\frac{mi}{fn} + u.\frac{fi}{fn} = u.\frac{fm}{fn} = v.$$

L'équation (5) montre que les vitesses des points *m* et *i* sur la droite *fm* sont égales et de même sens. De là se déduit la conclusion suivante :

La projection de la normale mn *sur les rayons vecteurs* fm, f'm *est constante.*

S'agit-il enfin de l'hyperbole? Elle est définie : le lieu des points dont les distances à deux points fixes, nommés foyers, diffèrent entre elles d'une quantité constante. Les déductions sont les mêmes que pour l'ellipse. Le seul changement consiste en une inversion des directions respectives affectées par la tangente et par la normale.

La tangente en m *est dirigée suivant la bissectrice de l'angle que font entre eux les deux rayons vecteurs aboutissant en ce point.*

La normale en m *est dirigée suivant la bissectrice de l'angle que l'un des rayons vecteurs fait avec le prolongement de l'autre.*

Les propriétés signalées pour l'ellipse subsistent et se démontrent de la même manière pour l'hyperbole.

Dans le cas de la parabole ayant pour équation

$$y^2 = 2px,$$

le calcul donne, pour équation de la tangente,

$$yy' = p(x + x')$$

et, pour la sous-tangente et la sous-normale,

$$\text{ST.} = 2x', \qquad \text{SN} = p = \text{cons}^{\text{te}}.$$

Dans le cas de l'ellipse ou de l'hyperbole ayant pour équation

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = a^2b^2,$$

le calcul donne pour équation de la tangente

$$a^2yy' \pm b^2xx' = a^2b^2.$$

60. Considérons, en dernier lieu, les deux courbes connues, l'une sous le nom de *logarithmique*, l'autre sous celui de *cycloïde*.

Soit d'abord la logarithmique ayant pour équation

$$(1). \quad \ldots \ldots \ldots \quad x = a \,.\, \log \frac{y}{m},$$

ou, ce qui revient au même,

$$y = me^{\frac{x}{a}}.$$

Le calcul donne :

1° pour équation de la tangente,

$$y - y' = \frac{m}{a} e^{\frac{x'}{a}} (x - x') = \frac{y'}{a}(x - x');$$

2° pour équation de la normale,

$$y - y' = -\frac{a}{y'}(x - x');$$

3° pour la sous-tangente et la sous-normale,

$$\mathrm{ST} = -a = \text{cons}^{\text{te}}., \qquad \mathrm{SN} = \frac{x'^2}{a}.$$

Soit ensuite la cycloïde. Elle est engendrée par un point d'une circonférence de cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe et qui s'y développe ainsi tout entière.

Fig. 7.

Soit m une position quelconque du point générateur.

Représentons par nmb le cercle roulant, et par OX la droite fixe suivant laquelle il se développe.

Soit n le point où le cercle et la droite se touchent. Si nous prenons la longueur On égale à l'arc mn, le point O sera l'origine de la cycloïde. Plaçons en ce point l'origine des coordonnées, les axes étant rectangulaires et dirigés respectivement suivant les droites OY, OX.

Du point m abaissons sur le diamètre ncb la perpendiculaire mq. En désignant par r le rayon cm du cercle roulant, par x l'abscisse Op du point m, on a, pour équation de la cycloïde,

$$x = \mathrm{O}n \mp pm = r \arccos\frac{r - y}{r} \mp \sqrt{2ry - y^2}.$$

Lorsque le point m sort du lieu qu'il occupe en restant sur la cycloïde, c'est par rotation autour du point n que son mouvement commence. Il suit de là que les droites mb, mn sont, l'une la tan-

gente, l'autre la normale en m. La sous-tangente est pt, la sous-normale pn. Partant de ces données géométriques, on trouve :

1° pour équation de la tangente,

$$y - y' = \pm \sqrt{\frac{2r - y'}{y'}} \cdot (x - x');$$

2° pour équation de la normale,

$$y - y' = \mp \sqrt{\frac{y'}{2r - y'}} \cdot (x - x').$$

On a de même

$$\mathrm{T} = y' \sqrt{\frac{2r}{2r - y'}}, \qquad \mathrm{N} = \sqrt{2ry'},$$

$$\mathrm{ST} = y' \sqrt{\frac{y'}{2r - y'}}, \qquad \mathrm{SN} = \sqrt{2ry' - y'^2}.$$

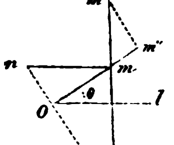
Ces résultats s'accordent avec ceux que fournit l'application des formules générales établies précédemment.

Extension des résultats précédents au cas des coordonnées polaires.

61. Proposons-nous de résoudre pour le cas des coordonnées polaires les questions traitées ci-dessus pour un système de coordonnées rectilignes.

Soit m un point quelconque d'une ligne S. Les coordonnées qui déterminent le point m dans le système polaire sont au nombre de deux :

Fig. 8.



L'une est la distance du point m à un point fixe O désigné sous le nom de pôle. Cette distance est ce qu'on nomme le rayon vecteur du point m. Nous la représentons par r.

L'autre est l'angle que le rayon vecteur Om fait avec une droite fixe Ol désignée sous le nom

d'axe polaire, ou simplement d'axe, et menée par le point O. Nous représentons cet angle par θ.

Cela posé, l'équation de la ligne S exprimée en coordonnées polaires est nécessairement de la forme

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad F(r, \theta) = o.$$

Soit mm' la vitesse du point m au sortir du lieu qu'il occupe sur la ligne S. Du point m' abaissons sur Om la perpendiculaire $m'm''$. Le point m glissant sur la droite Om, tandis que cette droite tourne autour du point O, les composantes de la vitesse mm' sont respectivement, l'une la vitesse de glissement

$$mm'' = \dot{r} = dr,$$

l'autre la vitesse de circulation

$$m'm'' = r\dot{\theta} = r.d\theta.$$

Désignons par γ l'angle $m'mm''$ que la vitesse mm' fait avec le prolongement du rayon vecteur Om. On a tout d'abord

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \operatorname{tg} \gamma = r.\frac{d\theta}{dr}.$$

On sait, d'ailleurs, que la tangente en m à la ligne S est dirigée suivant la vitesse mm'.

Par le point O menons une droite nOt perpendiculaire au rayon vecteur Om, et prolongeons, jusqu'à leur rencontre avec cette droite, d'une part la tangente $m'mt$, d'autre part la droite mn, supposée normale en m à la ligne S.

Les longueurs que l'on désigne ici sous les noms de tangente, normale, sous-tangente et sous-normale, et que l'on représente comme ci-dessus par les lettres T, N, ST, SN, sont les suivantes,

$$T = mt, \quad N = mn, \quad ST = Ot, \quad SN = On.$$

Il en résulte, ainsi qu'on le voit aisément sur la figure,

$$(3). \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \dfrac{r}{\cos\gamma} = r\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma} = r\sqrt{1+r^2\left(\dfrac{d\theta}{dr}\right)^2}, \\ N = \dfrac{r}{\sin\gamma} = \dfrac{r}{\operatorname{tg}\gamma}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma} = \sqrt{r^2+\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}, \\ ST = r\operatorname{tg}\gamma = r^2\dfrac{d\theta}{dr}, \qquad SN = r\cot\gamma = \dfrac{dr}{d\theta}, \end{array} \right.$$

et la valeur du rapport $\frac{d\theta}{dr}$ se déduit de l'équation différentielle

$$(4). \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{dF}{dr}\right) dr + \left(\frac{dF}{d\theta}\right) d\theta = o.$$

Si, dans cette équation, on désigne par r', θ' les coordonnées du point m, et qu'on remplace les différentielles dr, $d\theta$ par les différences qu'elles expriment, il vient

$$(5). \quad \ldots \quad (r - r')\,F'_r(r',\ \theta') + (\theta - \theta')F'_{\theta'}(r',\ \theta') = o,$$

c'est-à-dire l'équation de la courbe connue sous le nom de *spirale d'Archimède.*

Lorsque l'on substitue l'équation (5) à l'équation (4), en conservant aux dérivées partielles $F'_r\,(r',\theta')$, $F'_{\theta'}\,(r',\theta')$ ainsi qu'aux grandeurs r', θ' les valeurs qu'elles affectent au point m, on n'altère en rien les composantes de la vitesse mm'. Il s'ensuit que l'équation (5) exprime, en général, celle des spirales d'*Archimède* qui touche en m la ligne S *, et pour laquelle les accroissements simul-

* Quel que soit le système de coordonnées que l'on considère, l'équation qu'on obtient en différentiant celle d'une ligne quelconque est toujours l'équation linéaire correspondante à ce système. Elle exprime ainsi, parmi les lignes que l'équation linéaire représente, celle qui touche la ligne donnée au point pris pour origine commune des accroissements.

tanés Δr, $\Delta\theta$, conservent entre eux un seul et même rapport, celui qui s'établit entre les vitesses $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, au point m de la ligne donnée.

Applications particulières.

62. Appliquons à quelques cas particuliers les formules établies ci-dessus.

Soit d'abord la spirale d'Archimède. Ramenée à sa forme la plus simple, l'équation de cette ligne est

$$r = a\theta.$$

De là résulte

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{r}{a} = \theta, \qquad SN = a.$$

Il s'ensuit que la sous-normale est constante et que l'angle γ, nul pour $\theta = o$, croît constamment avec θ, de manière à converger vers la limite $\frac{\pi}{2}$ à mesure que l'angle θ devient de plus en plus grand.

Soit, en second lieu, la spirale hyperbolique ayant pour équation

$$r = \frac{a}{\theta}.$$

De là résulte

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{a}{r} = -\theta, \qquad ST = -a.$$

Ici donc c'est la sous-tangente qui demeure invariable. L'angle γ subit d'ailleurs, au signe près, les mêmes conditions que dans le cas de la spirale d'Archimède.

La spirale hyperbolique offre l'exemple d'une courbe qui se rapproche indéfiniment d'un point, en tournant autour de ce point et sans jamais l'atteindre.

Soit, en troisième lieu, la spirale logarithmique ayant pour équation

$$r = m \cdot e^{\frac{\theta}{a}}.$$

Il vient

$$\operatorname{tg}\gamma = a, \mathrm{T} = r\sqrt{1+a^2}, \mathrm{N} = r\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}, \quad \mathrm{ST} = r.a., \ \mathrm{SN} = \frac{r}{a}.$$

On voit ainsi que cette spirale coupe en chaque point, sous un seul et même angle, le rayon vecteur correspondant.

Les valeurs de la sous-tangente et de la sous-normale font voir en outre que les extrémités t et n de ces lignes (voir la figure du numéro précédent, page 168), sont situées respectivement sur des spirales identiques avec la première. Pour obtenir ces spirales dans leurs vraies positions, il faut faire tourner la première autour du pôle pris pour origine, le déplacement angulaire étant égal à l'angle $-a \log a$ s'il s'agit du point t, et à $+a \log a$ s'il s'agit du point n. Dans le cas particulier où la quantité a est égale à l'unité, les trois spirales se confondent.

Lorsque l'on attribue à l'angle θ des valeurs négatives de plus en plus grandes, le rayon vecteur converge vers zéro. Il s'ensuit que la spirale logarithmique est, comme la spirale hyperbolique, une courbe qui tourne autour d'un point, en s'en rapprochant toujours et sans jamais l'atteindre.

Soit, pour dernier exemple, les trois sections coniques. Les notations restant les mêmes qu'au n° 57, page 155, si l'on prend le point f pour pôle et OX pour droite fixe, on peut écrire immédiatement, comme équation générale des trois sections coniques,

$$r = c\,(a + r\cos\theta),$$

ou, ce qui revient au même,

$$r = \frac{a \cdot c}{1 - c\cos\theta}.$$

De là résulte

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{a}{r\sin\theta},$$

ou, désignant par y la perpendiculaire abaissée du point m sur la droite OX,

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tg}\gamma = -\frac{a}{y}.$$

On voit ainsi que dans les sections coniques, le produit de la perpendiculaire abaissée d'un point sur la ligne des foyers par la tangente de l'angle que la touchante en ce point fait avec le rayon vecteur est une quantité constante.

Soit ζ l'angle que fait avec la normale en m le rayon vecteur fm. Les angles ζ, γ étant compléments l'un de l'autre, on a

$$\cos\zeta = \sin\gamma,$$

et, eu égard à l'équation (1),

$$(2). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \cos^2\zeta = \frac{a^2}{a^2 + y^2}.$$

Ainsi se trouve établie la relation dont nous avons fait usage au n° 57 (voir la 2me note qui se rapporte à ce numéro, page 158), et qui nous a conduit, pour l'ellipse et l'hyperbole, à l'équation générale

$$(3). \quad \ldots \quad r.r' \cos^2\varphi = \frac{a^2 c^2}{1 - c^2} = \text{cons}^{\text{te}} = b'^2.$$

Des assymptotes considérées comme positions limites des tangentes dont le point de contact s'éloigne indéfiniment.

63. Lorsqu'une courbe a des branches qui s'étendent à l'infini, s'il arrive en même temps qu'elles se rapprochent indéfiniment de quelques droites, on désigne en général ces droites sous le nom

d'*assymptotes.* A ce point de vue l'on peut dire aussi des assymptotes qu'elles sont les limites des tangentes dont le point de contact s'éloigne au delà de toute distance assignable.

Soit

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F(x, y) = o,$$

l'équation d'une courbe susceptible d'avoir une ou plusieurs assymptotes et rapportée, par hypothèse, à un système quelconque d'axes coordonnés rectilignes.

L'équation générale d'une tangente à cette courbe étant

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad (t - x)\left(\frac{dF}{dx}\right) + (u - y)\left(\frac{dF}{dy}\right) = o\,^{*},$$

la question se réduit à chercher ce que devient, eu égard à l'équation (1), la droite représentée par l'équation (2), lorsque l'on attribue à l'une ou l'autre des variables x, y une valeur indéfiniment croissante. Si cette droite ne cesse pas d'être réelle, et qu'elle tende vers une ou plusieurs positions déterminées, chacune de ces positions fournit une assymptote.

On observera qu'il ne suffit pas toujours d'éliminer de l'équation (2) l'une des variables x, y et d'attribuer à l'autre une valeur infiniment grande. S'il existe une assymptote parallèle à l'axe de même nom que la variable éliminée, elle échappe à la recherche faite dans ces conditions et, pour la mettre en évidence, il faut répéter l'opération, en éliminant à son tour celle des deux variables que l'on avait d'abord conservée.

Nous avons supposé tout à l'heure que la courbe dont on cherchait les assymptotes était rapportée à des axes coordonnés rectilignes. Supposons maintenant que son équation soit exprimée en coordonnées polaires. Les directions des assymptotes sont déterminées par les limites vers lesquelles l'angle θ peut converger lorsqu'on attribue au rayon vecteur r des valeurs indéfiniment

* Dans cette équation t et u sont les coordonnées courantes de la tangente, x et y celles du point de contact.

grandes. Soit α l'un de ces angles limites. La perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la courbe sur la droite menée par le pôle sous l'angle $\theta = \alpha$ a pour expression générale.

$$r \sin (\theta - \alpha).$$

La limite vers laquelle cette expression peut converger lorsque l'on donne à r des valeurs indéfiniment croissantes détermine la distance de l'assymptote au pôle et sa position relative.

Applications particulières.

64. Recherchons, pour exemple, les assymptotes de quelques courbes.

Soient d'abord les sections coniques ayant pour équation, comme au n° 57, page 156,

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y^2 + (x - a)^2 = c^2 x^2.$$

L'équation générale de la tangente devient, après réduction,

$$(2) \quad \ldots \quad yy' + x[(1 - c^2)x' - a] + a(a - x') = o.$$

Passant à la limite, les équations (1) et (2) donnent respectivement, la première,

$$\lim \frac{y'}{x'} = \pm \sqrt{c^2 - 1},$$

la seconde,

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x(1 - c^2) \pm y\sqrt{c^2 - 1} = a.$$

On voit ainsi que c'est uniquement dans l'hypothèse $c > 1$, c'est-à-dire dans le cas de l'hyperbole, que les sections coniques admettent des assymptotes. Ces assymptotes, représentées par l'équation (3) sont au nombre de deux; elles se coupent sur l'axe des x au point dont l'abscisse est $-\frac{a}{c^2 - 1}$ et sont disposées symétriquement par rapport à cet axe.

Si l'on prend, au lieu de l'équation (1), l'équation polaire du n° 62, page 172,

$$1 - c\cos\theta = \frac{ac}{r},$$

l'on en déduit

$$\lim(1 - c\cos\theta) = o,$$

ce qui exige comme tout à l'heure que l'on ait $c > 1$ et ce qui donne, en désignant par α la limite de θ,

$$\cos\alpha = \frac{1}{c},$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{c^2 - 1}.$$

Si l'on opère ensuite sur le produit

$$r\sin(\theta - \alpha) = r[\sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta],$$

on trouve

$$\lim r.\sin(\theta - \alpha) = \pm\frac{ac}{\sqrt{c^2 - 1}},$$

ce qui exclut la valeur $c = 1$ et s'accorde avec les résultats précédents.

Soit encore la logarithmique représentée, comme au n° 60, page 166, par l'équation

$$y = m.e^{\frac{x}{a}},$$

On a, pour équation générale de la tangente,

$$y - y' = \frac{y'}{a}(x - x'),$$

ou, ce qui revient au même,

$$y = m e^{\frac{x'}{a}}\left(1 + \frac{x}{a}\right) - \frac{mx'}{a} e^{\frac{x'}{a}}.$$

Passant à la limite pour des valeurs de x' supposées négatives et indéfiniment grandes, on trouve, pour asymptote,

$$y = o.$$

Ce résultat est d'ailleurs évident *à priori*.

Soit, en dernier lieu, la spirale hyperbolique représentée au n° 62, page 171, par l'équation

$$\theta = \frac{a}{r}.$$

Il vient

$$\lim \theta = o.$$

On a ensuite

$$\lim r \sin \theta = \lim . r \left(\frac{a}{r} - \frac{1}{1.2.3} \frac{a^3}{r^3} + \text{etc.}\right) = a.$$

On voit donc que cette courbe a pour asymptote une droite parallèle à l'axe et située au-dessus de cet axe à la distance a.

Terminons ce sujet par une remarque touchant la courbe

$$y = a \sin \frac{b}{x}.$$

Cette courbe a l'axe des x pour asymptote. Elle présente en outre l'exemple singulier d'une ligne qui se rapproche indéfiniment de l'axe des y sans jamais l'atteindre, sans cesser d'osciller toujours entre les limites $y = +a$, $y = -a$.

CHAPITRE III.

DIFFÉRENTIELLES DE L'ARC ET DE L'AIRE D'UNE COURBE PLANE.

Rectifications et quadratures.

65. Soit MM′ une courbe plane. Supposons d'abord qu'elle soit rapportée à des axes coordonnés rectangulaires OX, OY, et désignons par s la longueur d'un arc quelconque Mm mesuré sur la courbe à partir du point M.

Fig. 9.

Soit μ un point mobile assujetti à décrire la ligne MM′ et sortant du lieu m à l'instant que l'on considère. La vitesse actuelle du point μ est dirigée suivant la droite mt tangente en m à la ligne MM′. Représentons cette vitesse par le segment mm', et du point m' abaissons les perpendiculaires $m'p$, $m'q$ sur les droites mp, mq menées par le point m parallèlement aux axes OX, OY. Les segments mp, mq sont les composantes orthogonales de la vitesse mm'; on a, d'ailleurs, par définition,

$$mp = \dot{x} = dx;$$

$$mq = \dot{y} = dy;$$

$$mm' = \dot{s} = ds.$$

Le triangle $mm'p$ rectangle en p donne, en conséquence,

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

De là résulte

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

et, par suite,

$$(3) \ldots \quad \Delta s = \Delta x \, M_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Dans la description de la courbe MM' par le point μ, ce point glisse sur la tangente, et la tangente tourne autour de ce même point, tous deux simultanément. La rotation de la tangente n'a d'autre effet que de changer incessamment la direction du point μ : elle n'altère en rien la vitesse de ce point considérée comme grandeur, ni par conséquent l'étendue linéaire décrite en vertu de cette même vitesse. Cela posé, tandis que le point μ décrit la courbe MM', concevons un autre point μ' mobile sur une droite fixe, et animé d'une vitesse qui passe à chaque instant par les mêmes degrés de grandeur que celle du point μ. Il est visible que les longueurs décrites simultanément de part et d'autre, l'une par le point μ, l'autre par le point μ', sont constamment égales. Concluons qu'il suffit de considérer la vitesse ds déterminée par l'équation (2) comme étant celle d'un point qui se meut en ligne droite, pour obtenir au moyen de l'équation (3) la rectification de l'arc décrit par le point μ sur la courbe MM' dans le même intervalle.

Veut-on préciser davantage? Tout se réduit à considérer le mouvement simultané de deux points qui décrivent en même temps des segments rectilignes, l'un avec la vitesse constante dx, l'autre avec la vitesse incessamment variable

$$(4) \ldots \ldots \quad ds = dx \, . \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Le premier de ces points est la projection du point m sur l'axe OX. Le second est le point μ'. Tandis que le premier passe de l'abscisse quelconque $x = a$ à l'abscisse $a + \Delta x$ et décrit ainsi la longueur Δx, le second décrit une longueur égale à celle de l'arc Δs compris entre les points de la courbe MM' qui correspondent respectivement aux deux abscisses a et $a + \Delta x$. La vitesse de ce

second point dépend à chaque instant de la position du premier, c'est-à-dire de l'abscisse x qui détermine en même temps cette position et la valeur correspondante de la quantité $\frac{dy}{dx}$. On a d'ailleurs, en général,

$$(5) \ldots \quad \Delta s = \Delta x \, \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Soient α, 6 les angles que la tangente en m fait avec les axes OX, OY; la simple inspection du triangle $mm'p$ donne immédiatement

$$(6) \ldots \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos 6 = \frac{dy}{ds}.$$

66. Supposons en second lieu que la ligne MM' soit rapportée à un système de coordonnées polaires, ayant le point O pour pôle et la droite OX pour axe. Supposons, en outre, qu'on prenne pour composantes orthogonales de la vitesse mm', d'une part, la vitesse de glissement du point μ sur le rayon vecteur Om, d'autre part, la vitesse de circulation de ce même point autour du pôle O. L'une de ces vitesses étant $dr = mp$, et l'autre, $rd\theta = m'p$, on a évidemment *

Fig. 10.

$$(1) \ldots \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

De là résulte

$$(2) \ldots \quad ds = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2},$$

et, par suite,

$$(5) \ldots \quad \Delta s = \Delta \theta \, \mathrm{M}_\theta^{\theta+\Delta\theta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

* On désigne ici par θ l'angle que le rayon vecteur Om fait avec l'axe OX.

La rectification s'obtient ici, comme tout à l'heure, en considérant deux points qui décrivent simultanément des segments rectilignes, l'un avec la vitesse constante $d\theta$, l'autre avec la vitesse incessamment variable

$$ds = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2};$$

sur la droite à décrire par le premier point on fixe une origine correspondante à $\theta = o$. Cela posé, tandis qu'il passe de la position θ' à la position $\theta' + \Delta\theta$ et qu'il décrit ainsi la longueur $\Delta\theta$, le second point décrit une longueur égale à celle de l'arc Δs compris entre les points de la courbe MM' qui correspondent respectivement aux deux angles θ' et $\theta' + \Delta\theta$. La vitesse de ce second point dépend à chaque instant de la position du premier, c'est-à-dire, de l'angle θ qui détermine en même temps cette position et la valeur correspondante de la quantité $r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$. On a d'ailleurs, en général,

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta s = \Delta\theta \, . \, \mathrm{M}_{\theta'}^{\theta' + \Delta\theta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2},$$

Soient α, et γ les angles que la tangente en m fait avec l'axe OX et le rayon vecteur Om, on a

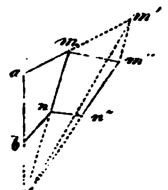
$$\operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \operatorname{tg} . \gamma = \frac{r d\theta}{dr}.$$

et, par suite,

$$\alpha = \theta + \operatorname{arc} \operatorname{tg} r . \frac{d\theta}{dr}.$$

67. Soit Oam un triangle limité par deux droites fixes Oa, am et par une droite Om mobile autour du point O.

Fig. 11.



U étant la surface du triangle Oam, h la perpendiculaire abaissée du point O sur la base ma, et x cette base, on a généralement

$$\mathrm{U} = \frac{hx}{2}.$$

De là résulte

$$dU = \frac{h}{2}\,dx.$$

Représentons par mm' la vitesse $\dot{x}$ ou dx du point m et achevons le triangle $mm'm''$ dont les côtés mm'', $m'm''$ sont respectivement dirigés, l'un perpendiculairement, l'autre parallèlement à la droite Om. Si nous tirons les droites Om', Om'', il est visible que les triangles Omm', Omm'' sont équivalents, puisqu'ils ont même base Om, et leurs sommets m', m'' situés sur une même droite parallèle à cette base. De là résulte en premier lieu la déduction suivante :

La différentielle dU *ayant pour expression numérique le produit* $\frac{hdx}{2}$ *on peut la représenter indifféremment par l'aire de l'un ou l'autre des deux triangles* Omm', Omm''.

Prenons pour expression de la différentielle dU l'aire du triangle Omm'', et observons que dans ce triangle la base mm'' est la vitesse de circulation communiquée au point m par la rotation de la droite Om autour du point O.

Soit Obn un second triangle limité comme le premier, avec cette seule différence que la droite am soit remplacée par la droite bn : nn'' étant la vitesse de circulation communiquée au point n par la rotation de la droite Om autour du point O, son extrémité n'' aboutit nécessairement à la droite Om'' ; et la différentielle de l'aire Obn est représentée par le triangle Onn'' en même temps et de la même manière que celle de l'aire Oam est représentée par le triangle Omm''.

Concluons qu'en désignant par A l'aire du quadrilatère $amnb$ on a, pour expression de la différentielle dA, l'aire du trapèze $mm''n''n$.

Ce résultat est indépendant des directions suivies par les points m et n à l'origine de leur déplacement simultané. La conséquence est qu'il subsiste en général et qu'il s'étend ainsi de lui-même au cas où les droites am, bn seraient remplacées par des lignes quelconques situées dans un même plan et passant, l'une par le point

m, l'autre par le point *n*. Voici d'ailleurs l'énoncé qu'il fournit, sous forme de théorème :

La différentielle de l'aire engendrée par un segment de droite qui se meut dans un plan entre deux lignes quelconques est égale au produit de ce segment par la vitesse de circulation de son point milieu.

Cet énoncé général comprend le cas particulier où la droite mobile se meut par translation. On peut d'ailleurs prendre ce cas à part, et le traiter directement ou par la réduction à l'absurde. Suivons de préférence ce second procédé qui offre l'avantage d'être en même temps très-simple et d'une application générale à tous les cas analogues.

Soit z une ordonnée mobile dans un plan et limitée par deux droites fixes *ab*, *cd*. L'ordonnée z, représentée par *mn* conserve par hypothèse une direction constante ; elle engendre ainsi l'aire trapézoïdale *amnc*. Soient A cette aire, et *li* une droite menée par le point *m* parallèlement à *cd*.

Fig. 12.

L'ordonnée z croît ou décroît selon qu'elle va de gauche à droite ou de droite à gauche au sortir du lieu quelconque *mn*. Dans le premier cas, la différentielle dA ne peut être inférieure à $z\dot{u}$, $\dot{u}$ étant la vitesse de circulation commune à tous les points de la droite *mn*. Elle est donc égale ou supérieure à ce produit. *Supposons-la représentée par*

$$(z+\eta)\dot{u}.$$

Il en résulte évidemment que, dans le second cas, elle est représentée en grandeur par

$$(z-\eta)\dot{u}.$$

Cela posé, imaginons qu'après avoir fait croître l'aire A d'une quantité quelconque ΔA, on la fasse décroître de cette même quantité, l'ordonnée z et la vitesse $\dot{u}$ repassant *en sens inverse* par

les mêmes valeurs. *L'hypothèse admise* implique la conséquence absurde exprimée par l'équation

$$\Delta A = \Delta u M_u^{u+\Delta u}(z + \eta) = \Delta u M_u^{u+\Delta u}(z - \eta),$$

et consistant, au point de vue des équivalents numériques, en ce que les longueurs décrites simultanément par deux points animés respectivement, l'un d'une vitesse plus grande $(z + \eta)\, u$, l'autre d'une vitesse plus petite $(z - \eta)\, u$, seraient égales entre elles. Concluons qu'on a nécessairement

$$\eta = 0,$$

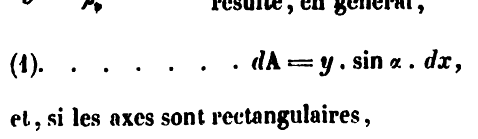
et, par suite,

$$dA = zu.$$

Ce résultat subsiste indépendamment des directions suivies par les points m et n à l'origine de leur déplacement simultané. Il est donc tout à fait général et s'étend ainsi de lui-même au cas où le segment mn est intercepté entre deux lignes quelconques. Cette remarque suffit: elle montre que le théorème formulé ci-dessus s'applique à tous les cas possibles, la direction du segment mn pouvant être constante ou bien incessamment variable.

68. Considérons l'aire A engendrée par l'ordonnée y d'une courbe plane MN rapportée à deux axes OX, OY. Soient mp cette ordonnée, α l'angle XOY, et dx la vitesse du point p sur l'axe OX. La vitesse de circulation commune à tous les points de l'ordonnée y est évidemment $dx . \sin \alpha$. De là résulte, en général,

Fig. 13.



(1). . . . . $dA = y . \sin \alpha . dx,$

et, si les axes sont rectangulaires,

(2). . . . . $dA = y . dx.$

On a d'ailleurs, dans le premier cas,

(3). . . . . . . $\Delta A = \Delta x . \sin \alpha . M_x^{x+\Delta x} y,$

et, dans le second,

(4). . . . . $\Delta A = \Delta x M_x^{x+\Delta x} y$.

On voit par les formules (3) et (4) que l'aire comprise entre une courbe plane, l'axe des abscisses et deux ordonnées quelconques, est équivalente à celle du parallélogramme ayant pour base l'intervalle Δx compris entre les ordonnées extrêmes, et pour côté adjacent l'ordonnée moyenne intermédiaire.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une aire A engendrée par le rayon vecteur d'une courbe plane rapportée à des coordonnées polaires. En désignant, comme ci-dessus, par r, le rayon vecteur, et par θ, l'angle compris entre ce rayon et l'axe, la vitesse de circulation du point milieu du rayon r est évidemment $\frac{r}{2} d\theta$. On a donc

(5). . . . . $dA = \frac{r^2}{2} d\theta$.

et, par suite,

(6). . . . . $\Delta A = \frac{1}{2} \Delta\theta \,.\, M_\theta^{\theta+\Delta\theta} r^2$.

On voit par la formule (6) que l'aire comprise entre une courbe plane et deux rayons vecteurs est équivalente au secteur circulaire que ces rayons comprennent entre eux et dont le rayon a pour carré la moyenne arithmétique des valeurs affectées par r^2 dans l'intervalle $\Delta\theta$. On peut dire aussi qu'elle équivaut au rectangle ayant pour hauteur cette moyenne et pour base la moitié de l'arc qui mesure l'angle $\Delta\theta$ dans le cercle ayant l'unité pour rayon.

La substitution à des aires quelconques d'autres aires équivalentes et susceptibles d'être transformées directement en carrés constitue ce qu'on nomme, en général, *la quadrature des aires.*

69. Au lieu de procéder comme nous l'avons fait, dans les deux numéros qui précèdent, il est plus simple d'emprunter le secours du théorème suivant:

La différentielle d'une fonction ne change point, en général, de grandeur, mais seulement de signe, lorsque la différentielle de la variable change de signe sans changer de grandeur.

On pourrait croire, au premier abord, que ce théorème, en quelque sorte évident, est *toujours* la conséquence immédiate et nécessaire de l'équation fondamentale

$$dy = f'(x) . dx;$$

ce serait aller trop loin. La dérivée $f'(x)$ peut prendre *accidentellement* deux déterminations différentes, selon qu'à partir de l'origine fixée par la valeur particulière attribuée à x, cette variable change en croissant ou en décroissant; c'est ainsi, par exemple, que si, sans cesser d'être continue, la fonction $y = f(x)$ représente le contour d'un polygone quelconque, la dérivée $f'(x)$ affecte en général deux valeurs distinctes pour tous les sommets de ce polygone. Les points susceptibles de fournir ainsi des valeurs multiples sont nécessairement séparés les uns des autres par des intervalles plus ou moins grands. La discontinuité qui se manifeste en ces points n'est que l'interruption accidentelle de la continuité qui subsiste en dehors.

Considérons l'équation générale

$$y = f(x),$$

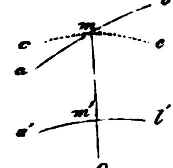
comme représentant une ligne s rapportée à deux axes coordonnés rectangulaires et décrite par un point mobile μ.

Le rapport des vitesses dy et dx, égal à la dérivée $f'(x)$ n'est autre chose que la tangente de l'angle que la directrice du point μ fait avec l'axe des x. Il peut arriver pour certaines positions du point μ que la directrice change brusquement de direction. Il est évidemment absurde et impossible qu'il en soit ainsi *constamment* sur une étendue quelconque de la ligne décrite. Il faut donc nécessairement que cette direction soit, *en général*, constante ou bien continûment variable. Dans un cas, comme dans l'autre, la directrice n'affecte jamais pour une même position du point μ qu'une

seule et même détermination applicable à la fois aux deux sens suivant lesquels le point μ peut se mouvoir dans la description de la ligne s. Il s'ensuit que la dérivée $f'(x)$ ne comporte, en général, pour chaque valeur de x qu'une seule et même valeur, indépendante du sens dans lequel s'effectue la génération que l'on considère. De là résulte comme conséquence le théorème formulé ci-dessus. Voici, d'ailleurs, les solutions très-directes et très-simples fournies par ce théorème pour les cas traités précédemment. Elles sont un exemple des ressources qu'il offre dans les différents cas d'application.

Soit U l'aire engendrée par le rayon vecteur Om qui tourne autour du point O et dont l'extrémité se meut sur la ligne amb.

Fig. 14.



Du point O comme centre, avec le rayon O$m = r$, décrivons l'arc de cercle cme. Si le point m se déplaçait en restant sur cet arc, on aurait évidemment

$$\Delta U = \frac{r^2}{2}\Delta\theta,$$

et par conséquent aussi

(1). . . . . $$dU = \frac{r^2}{2}d\theta.$$

Cela posé, lorsque le point m sort du lieu qu'il occupe en restant sur la ligne amb, selon qu'il va de m vers b ou de m vers a, il est visible que la différentielle dU ne peut être, ni moindre dans le premier cas, ni plus grande dans le second, que la quantité $\frac{r^2}{2}d\theta$. Or, en général, *elle a même valeur absolue dans chacun de ces deux cas*. Il faut donc nécessairement qu'elle soit égale à $\frac{r^2}{2}d\theta$. On voit ainsi que l'équation (1), établie d'abord dans l'hypothèse $r =$ cons^{te}, subsiste, en général, pour le cas où le rayon vecteur Om varie incessamment.

Désignons par r' la partie du rayon vecteur Om limitée à la ligne

$a'm'b'$ et par U′ l'aire qu'engendre le segment r'. On a, comme tout à l'heure,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dU' = \frac{r'^2}{2} d\theta.$$

De là résulte, en désignant par A l'aire engendrée par le segment mm',

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad dA = \frac{r^2 - r'^2}{2} d\theta . = (r - r') \frac{r + r'}{2} d\theta.$$

L'équation (3) a pour traduction l'énoncé suivant, déjà formulé n° 67, page 183 :

La différentielle de l'aire engendrée par un segment de droite qui se meut dans un plan entre deux lignes quelconques est égale au produit de ce segment par la vitesse de circulation de son point milieu.

Cet énoncé n'est pas restreint au cas où la droite mobile se meut en changeant de direction, et par conséquent en tournant autour de son centre instantané de circulation *; il s'étend de lui-même au cas particulier où cette droite se déplace en conservant une direction constante. On peut d'ailleurs procéder, pour ce cas et pour tous les cas analogues, en suivant toujours la même marche.

Soit A l'aire engendrée par le segment mn supposé mobile dans un plan, et compris entre la droite cd et la ligne amb. Par le point m menons la droite lmi parallèle à cd et désignons par y le segment mn, par α l'angle constant mnd, par x la distance cn. Si le point m restait sur la droite li, on aurait évidemment

Fig. 13.

$$\Delta A = y \,.\, \Delta x \,.\, \sin \alpha,$$

* La substitution du centre instantané de circulation au centre instantané de rotation n'a d'autre effet que de supprimer le glissement de la droite mobile sur elle-même. La suppression de ce glissement n'altère en rien l'étendue décrite par le segment que l'on considère.

et, par conséquent aussi,

$$dA = ydx \, . \sin \alpha.$$

Cela posé, puisque le point m sort du lieu qu'il occupe en restant sur la ligne amb, selon qu'il va de m vers b ou de m vers a, il est visible que la différentielle dA ne peut être moindre, dans le premier cas, ni plus grande, dans le second, que la quantité $ydx \sin \alpha$. Or, en général, elle a même valeur absolue dans chacun de ces deux cas. Il faut donc nécessairement que l'on ait, en général,

(4). . . . . $dA = ydx \, . \sin \alpha$,

la quantité y n'étant plus assujettie à demeurer constante comme elle l'était dans l'hypothèse où nous avons d'abord raisonné.

Partant de là, il est aisé de voir comment l'équation (4) est directement applicable au cas où l'on remplacerait la droite cd par une courbe quelconque située dans le plan de la ligne amb.

70. Montrons, par quelques exemples, comment, en certains cas, la quadrature des aires planes et la rectification des courbes peuvent s'effectuer sans autre secours que celui des notions précédemment acquises.

Supposons, en premier lieu, que la courbe MN du n° 68, page 184, étant représentée par une équation de la forme

$$y = \varphi(x),$$

la fonction $\varphi(x)$ soit la dérivée d'une fonction connue $f(x)$, de telle façon que l'on ait

$$f'(x) = \varphi(x).$$

De là résulte

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x),$$

et, par conséquent,

$$\Delta A = \Delta x \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} \varphi(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

L'hypothèse que nous venons de faire se réalise toutes les fois que la fonction $\varphi(x)$ est la dérivée d'une fonction élémentaire. De là une série d'applications dont il suffit d'indiquer les suivantes.

La dérivée de la fonction $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ étant, en général, x^m, il s'ensuit que dans le cas d'une courbe MN représentée par l'équation

$$y = x^m$$

il vient immédiatement

$$(1).\quad \ldots \quad \Delta A = \Delta x M_x^{x+\Delta x} x^m = \frac{(x+\Delta x)^{m+1} - x^{m+1}}{m+1}.$$

Soit m positif. La quadrature prise entre les limites o et x donne

$$\Delta A = \frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{xy}{m+1}.$$

Désignons par X la valeur $x + \Delta x$ et par Y la valeur correspondante $(x + \Delta x)^m$; l'équation (1) se réduit à la forme très-simple

$$\Delta A = \frac{XY - xy}{m+1}.$$

Lorsque m est négatif et égal à 1, la formule (1) tombe en défaut. Cela tient à ce que ce n'est plus une fonction algébrique, mais bien la fonction logarithmique Lx, qui a pour dérivée $\frac{1}{x}$. En ce cas on a, d'une part,

$$y = \frac{1}{x},$$

et, d'autre part,

$$\Delta A = \Delta x M_x^{x+\Delta x} \frac{1}{x} = L\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Les dérivées des fonctions $\sin x$ et e^x étant respectivement

cos x et e^x, il s'ensuit que dans le cas d'une courbe MN représentée par l'une ou l'autre des deux équations

$$y = \sin x, \qquad y = e^x.$$

On a, pour le premier cas,

$$\Delta A = \sin(x + \Delta x) - \sin x,$$

et, pour le second,

$$\Delta A = e^{x+\Delta x} - e^x = Y - y.$$

71. Supposons, en second lieu, que la courbe MN soit définie géométriquement. Il est alors des cas où la solution peut s'obtenir d'une manière directe et très-simple.

Considérons d'abord la ligne MN comme étant une cycloïde, c'est-à-dire la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe.

Soient amb une position quelconque du cercle roulant; LP la droite sur laquelle ce cercle roule sans glisser; ab le diamètre aboutissant au point de contact a; QR une parallèle à la droite LP passant par le point b.

Le point décrivant étant par hypothèse en m, sa vitesse actuelle résulte de la rotation qui s'établit autour du centre instantané a. Il s'ensuit qu'elle est dirigée suivant mb et qu'on peut prendre ce segment pour la représenter en direction, sens et grandeur. Du point m abaissons deux perpendiculaires, l'une $y = mp$ sur la droite QR, l'autre $x = mq$ sur le diamètre ab. La première décrit l'aire A comprise entre la cycloïde et la droite QR, la seconde décrit en même temps le demi-cercle amb, représenté par B.

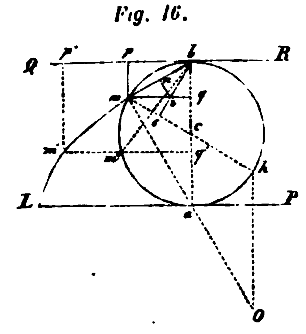


Fig. 16.

Cela posé, il est visible que les composantes de la vitesse mb, respectivement perpendiculaires aux droites ab, QR, sont l'une mq, l'autre mp.

On a donc, en même temps,

$$dA = y \,.\, mq = mp \,.\, mq, \qquad dB = x \,.\, mp = mq \,.\, mp.$$

De là résulte

$$dA = dB,$$

et, eu égard à l'égalité constante de ces deux vitesses simultanées,

$$\Delta A = \Delta B.$$

On voit ainsi qu'en désignant par m, m' deux points de la cycloïde, et par p, p', q, q' les projections de ces points sur les droites QR et ab, il y a toujours équivalence entre l'aire $mm'p'p$ et la portion du demi-cercle amb qui se trouve interceptée par les droites mq, $m'q'$.

S'agit-il de l'aire totale comprise entre la cycloïde et la droite LP pour une révolution tout entière du cercle roulant? Le rectangle construit sur le développement de ce cercle pris pour base, et sur le diamètre $ab = 2r$ pris pour hauteur, a pour surface $4\pi r^2$. Il faut d'ailleurs en soustraire la surface du cercle amb égale à πr^2. Il reste donc pour l'aire cherchée $3\pi r^2$, c'est-à-dire trois fois celle du cercle roulant.

Sans rien changer à ce qui précède, représentons-nous le cercle amb comme demeurant fixe, tandis que le point m décrit la cycloïde et sort de sa position actuelle avec la vitesse mb.

Le point m entraînant par hypothèse la droite mq, soit μ le point où cette droite coupe la demi circonférence amb. Les points m et μ sont actuellement en m: dans leur mouvement simultané l'un décrit la cycloïde, l'autre la demi-circonférence amb; tous deux d'ailleurs restent sur la droite mq qui se meut avec le point m, sans changer de direction. Il suit de là que la vitesse du point μ se projette sur ab comme celle du point m, c'est-à-dire en qb. Tirons le rayon cm et, du point b, abaissons sur cm la perpendiculaire be, qui coupe en i la droite mq. Dirigée suivant la tangente en m au cercle amb, la vitesse du point μ est parallèle à be. Nous

savons, en outre, que sa projection sur ba est égale à qb. Concluons que cette vitesse est représentée par ib. Cela posé, considérons le point μ comme glissant sur la corde mb, tandis que cette corde tourne autour du point b. La perpendiculaire abaissée du point i sur bm étant in, la vitesse de glissement du point μ sur mb est nb. Mais, d'un autre côté, le triangle mcb est isocèle; et les droites mq, be sont respectivement perpendiculaires, l'une au rayon cb, l'autre au rayon cm. On voit donc que le point n est le milieu de la corde mb et que la vitesse de glissement du point μ sur mb est *précisément la moitié de la vitesse du point* m *sur la cycloïde.*

Soit m'' le point où la droite $m'q'$ vient couper la demi-circonférence amb. On voit, par ce qui précède, que *l'arc cycloïdal* m′m *a, pour longueur rectifiée, le double excès de la corde* m″b, *sur la corde* mb. On déduit aisément de là que la cycloïde a pour demi-longueur $4r$, et $8r$ pour longueur totale.

Au lieu de procéder, comme nous venons de le faire, en ce qui concerne la rectification de la cycloïde, on peut poser

$$ds = mb = \sqrt{2ry}, \qquad dy = bq = y.$$

De là résulte

$$ds = \sqrt{2r} \, . \, y^{-\frac{1}{2}} \, . \, y = \sqrt{2r} \, . \, y^{-\frac{1}{2}} \, . \, dy$$

et par suite, la rectification étant faite entre les limites $y = o$, $y = bq$,

$$\Delta s = bq \, . \, \sqrt{2r} \, . \, \mathrm{M}_o^{bq} \, y^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2ry} = 2mb\ ^*.$$

* La formule (1) du n° 70, page 190 donne, en général,

$$\mathrm{M}_o^y \, y^m = \frac{y^m}{m+1}.$$

De là résulte, pour $m = -\frac{1}{2}$,

$$\mathrm{M}_o^y \, y^{-\frac{1}{2}} = 2y^{-\frac{1}{2}}.$$

Les résultats auxquels nous sommes parvenus pour le cas où la ligne MN est une cycloïde peuvent se résumer d'une manière très-simple.

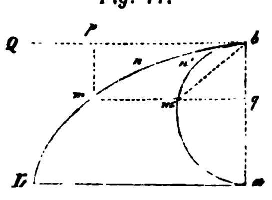


Fig. 17.

Soit b le sommet, ou ce qui revient au même, le point milieu de la cycloïde. Traçons le cercle roulant dans la position où le point décrivant se trouve en b, et menons par ce point la tangente bQ et le diamètre ba.

Cela posé, m étant un point quelconque de la cycloïde, si de ce point on abaisse deux perpendiculaires mp, mq sur les droites bQ, ba et qu'on désigne par m' le point où la droite mq vient couper le demi-cercle $am'n'b$, on a les énoncés suivants :

L'aire pbnm *est équivalente à l'aire* bn'm'q.

L'arc bnm *est égal en longueur au double de la corde* bm'.

72. Prenons pour ligne MN la courbe connue sous le nom de *Limaçon de Pascal.*

Soient c le centre d'un cercle au rayon $cO = a$, h un point quelconque de la circonférence de ce cercle, hm la tangente en ce point, m le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur la tangente hm. *La courbe,* dont il s'agit, *est le lieu des points* m.

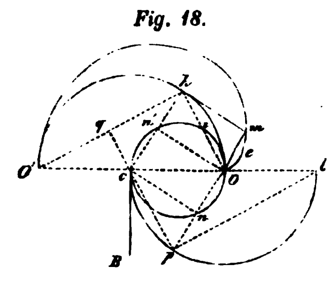


Fig. 18.

Prenons, pour pôle, le point O, et pour axe, le prolongement du rayon cO. Traçons deux circonférences de cercle, l'une ayant cO pour diamètre, l'autre ayant son centre en O et cO pour rayon. Soient n et p les points où le prolongement du rayon vecteur mO vient couper ces deux circonférences. Par le point c élevons sur cO une perpendiculaire cB.

Le rayon vecteur mO étant représenté par r, et l'angle mOb par θ, l'équation polaire du limaçon est très-simplement

$$(1).\quad . \quad . \; r = mn - On = a(1 - \cos\theta) = 2a \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot$$

On a d'ailleurs, pour la quadrature, conformément à la formule (5) du n° 68, page 185,

$$dA = \frac{r^2}{2} d\theta,$$

et, pour la rectification, conformément à la formule (2) du n° 66, page 180,

$$ds = d\theta \, . \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

L'équation (1) donne

$$r^2 = 4a^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} = 4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - a^2 \sin^2 \theta.$$

Tirons les droites pb, pc, cn. Les angles cOp, cbp sont respectivement égaux, l'un à θ, l'autre à $\frac{\theta}{2}$. De là résulte, d'abord,

$$cp = 2a \sin \frac{\theta}{2}, \qquad cn = a \sin \theta,$$

puis, substituant,

$$dA = \frac{1}{2}\left(\overline{cp}^2 - \overline{cn}^2\right) d\theta.$$

Observons ici que les angles Bcp, Bcn sont respectivement égaux, l'un à $\frac{\theta}{2}$, l'autre à θ. Si donc il s'agissait des aires décrites par les rayons vecteurs cp, cn (le point c étant pris pour pôle et la droite cB pour axe) on aurait en désignant ces aires l'une par A′, l'autre par A″,

$$dA' = \frac{1}{2} \overline{cp}^2 \frac{d\theta}{2}, \qquad dA'' = \frac{\overline{cn}^2}{2} \cdot d\theta.$$

La conséquence évidente est que l'on peut écrire

$$dA = 2\, dA' - d \, . A'',$$

et, par suite,

$$\Delta A = 2\,\Delta A' - \Delta A''.$$

Partons de $\theta = o$. L'aire du limaçon comprise entre le rayon vecteur Om et l'arc qu'il sous-tend, est égale à deux fois le segment circulaire intercepté par la corde cp dans le cercle cpb, moins une fois le segment circulaire intercepté par la corde cn dans le cercle cnO.

Allons de $\theta = o$ à $\theta = \pi$. On a πa^2 pour le double du premier segment et $\frac{\pi a^2}{4}$ pour le second. Il s'ensuit que l'aire totale comprise entre le limaçon et son axe OO' est égale à $3\,\frac{\pi a^2}{4}$, c'est-à-dire, à trois fois la surface du cercle cnO. L'aire correspondante du demi-cercle OhO' étant $2\frac{\pi a^2}{4}$, on voit que l'aire comprise entre le limaçon et le contour de ce demi-cercle est précisément égale à la surface du cercle cnO.

On a généralement, ainsi qu'il est aisé de le voir sur la figure,

$$\Delta A' = a^2\frac{\theta - \sin\theta}{2}, \qquad \Delta A'' = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{2\theta - \sin 2\theta}{2}.$$

Il vient donc, en substituant

$$\Delta A = a^2\left[\frac{3\theta}{4} - \sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{8}\right].$$

S'agit-il maintenant de la rectification? On a

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = 2a^2(1 - \cos\theta) = 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

De là résulte

$$ds = 2a\sin\frac{\theta}{2}\,.\,d\theta.$$

On a d'ailleurs, en désignant par z l'excès du diamètre cb sur la corde bp,

$$z = 2a\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right),$$

et, par suite,

$$dz = a \sin\frac{\theta}{2} \cdot d\theta.$$

Il vient donc aussi,

$$ds = 2dz,$$

et, conséquemment,

$$\Delta s = 2\Delta z.$$

Concluons que l'arc Oem a pour longueur rectifiée le double excès du diamètre $2a$ sur la corde bp. Cela revient à dire que l'arc de limaçon compris entre le point O′ et le point m est égal en longueur au double de cette corde. Il s'ensuit que le développement total de l'arc OmO′ a $4a$ pour longueur.

Les résultats obtenus successivement, en ce qui concerne la cycloïde et le limaçon de Pascal, offrent une analogie remarquable. Nous verrons plus loin, ainsi que nous l'avons déjà signalé dans un travail purement géométrique *, que l'analogie s'étend jusqu'aux développées de ces courbes.

On observera qu'en désignant par n' le point où la droite ch vient couper la circonférence du cercle cnO, l'on peut substituer les cordes n'O, Oh, O′h aux cordes cn, cp, bp, et s'en tenir au tracé des deux circonférences O′hO, cn'O, pour figurer et exprimer les solutions précédentes. La droite ch, parallèle au rayon vecteur Om, suffit pour déterminer les deux points n' et h. Le reste est d'ailleurs très-facile. S'agit-il, par exemple, de l'arc O′m? On voit qu'il a pour longueur rectifiée le double de la corde O′h.

* Voir les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2me série, tome V, n° 6.

La rectification de l'arc $O'm$ s'obtient directement de la manière suivante :

Lorsque le point m sort du lieu qu'il occupe, c'est en restant sur les droites Om, hm qui sont rectangulaires et qui tournent avec une même vitesse angulaire, l'une autour du point O, l'autre autour du point h. Prenons cette vitesse angulaire égale à l'unité. Il s'ensuit que la vitesse actuelle du point m a pour composantes orthogonales deux vitesses représentées en grandeur, l'une par Om, l'autre par hm, et qu'en conséquence elle-même est représentée en grandeur par l'hypoténuse Oh. Mais, d'un autre côté, la vitesse du point h (lorsqu'on la fait tourner d'un angle droit) se trouve représentée en direction, sens et grandeur, par le rayon ch. Si donc on abaisse du point c sur la corde $O'h$ une perpendiculaire cq, il est visible que la vitesse de glissement du point h sur la corde $O'h$ est représentée en grandeur par cq *. Cela posé, la vitesse cq est évidemment moitié de la vitesse Oh. De là donc résulte immédiatement l'énoncé formulé ci-dessus.

La quadrature de l'aire $hmeO$ comprise entre la tangente hm, l'arc de limaçon meO et l'arc de cercle Oh s'obtient plus simplement encore que la rectification de l'arc $O'm$. Il suffit d'observer que le segment hm reste toujours égal et parallèle au segment cn. La conséquence évidente est qu'il y a constamment équivalence entre l'aire $hmeO$ et le segment sous-tendu dans le cercle Onc par la corde cn. Cette déduction s'accorde avec la mesure trouvée plus haut pour l'aire du limaçon.

* Le point h peut être considéré comme glissant sur la corde $O'h$, en même temps que cette corde tourne autour du point O'.

CHAPITRE IV.

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'OSCULATION DES COURBES PLANES.

De la courbure proprement dite.

CERCLE OSCULATEUR. — DÉVELOPPÉES ET DÉVELOPPANTES.

73. Soit S une courbe plane; μ un point assujetti à décrire la courbe S; m le lieu du point μ à l'instant que l'on considère.

La ligne S étant courbe, il s'ensuit que, dans la description de cette ligne, le glissement du point μ sur sa directrice est accompagné en général d'une rotation de cette droite autour du point μ. De là résulte la courbure : elle est d'autant plus prononcée que la vitesse angulaire de la directrice est plus grande pour une même vitesse linéaire du point décrivant. Lorsqu'un rapport constant subsiste entre ces deux vitesses simultanées, la courbure demeure invariable et réciproquement. Ce cas se présente toutes les fois que la ligne S est une circonférence de cercle. En dehors de ce cas, le rapport qui s'établit, pour chaque position du point μ, entre la vitesse angulaire de la directrice de ce point et sa propre vitesse, varie incessamment. Considérons la valeur affectée par ce rapport à l'instant précis où le point μ sort du lieu m, et représentons-nous la circonférence de cercle qui se substitue à la ligne S, *dans l'hypothèse* où cette valeur persiste sans changement ultérieur. La courbure de la ligne S au point m n'est autre chose que la courbure uniforme présentée par cette circonférence en chacun de ses points : *elle se manifeste en cessant de varier : elle devient sensible, en même temps qu'elle est rendue permanente.*

De là résulte la définition suivante :

La courbure en un point d'une courbe a pour mesure le rapport qui s'établit, au sortir de ce point, entre la vitesse angulaire de la directrice et la vitesse du point décrivant.

On peut ajouter :

Elle a, pour type sensible, la courbure du cercle où ce même rapport subsiste invariablement.

74. Précisons davantage.

Soit v la vitesse du point μ au sortir du lieu m, et w la vitesse angulaire simultanée de la directrice.

Considérons la droite mn, normale en m à la courbe s, et supposons qu'entraînée par le point décrivant, elle glisse avec ce point le long de la directrice en lui restant perpendiculaire. Il est visible qu'en se déplaçant ainsi, la normale mn sort du lieu qu'elle occupe dans les conditions suivantes :

Fig. 19.

1° Elle glisse tout entière avec la vitesse v rendue commune à tous ses points.

2° Elle tourne autour du point m avec la vitesse w.

On sait d'ailleurs que la vitesse v est dirigée suivant la droite mt, tangente en m à la ligne s.

De là résultent pour le point quelconque o situé sur la normale mn à la distance mo du point décrivant deux vitesses actuelles et simultanées, l'une égale à v, l'autre au produit $mo.w$. Ces deux vitesses ont une seule et même direction perpendiculaire à la normale. Elles sont d'ailleurs de même sens, ou de sens contraire, selon que l'arc décrit, à partir du lieu m, commence par être convexe ou concave du côté du point o, c'est-à-dire, suivant qu'il se projette d'abord sur le prolongement du segment om, ou sur ce segment. Supposons le point o pris du côté de la concavité. Dans cette hypothèse, la vitesse du point o est représentée en grandeur par la différence

$$v - mo . w.$$

Considérons, en particulier, la position que prend le point o, lorsque sa distance au point m est déterminée par l'équation de condition,

$$mo = \frac{v}{w}.$$

En ce cas, on a évidemment

$$v - mo \cdot w = o.$$

De là résultent les conséquences suivantes :

1° *Lorsque le point décrivant entraîne avec lui la normale à la ligne décrite, il est un point de la normale dont la vitesse est nulle. Ce point est situé du côté de la concavité, à une distance du point décrivant exprimée, pour chaque position de la normale, par la valeur correspondante du rapport* $\frac{\text{v}}{\text{w}}$.

2° *Deux cas sont possibles selon que le rapport* $\frac{\text{v}}{\text{w}}$ *demeure invariable sur la courbe décrite, ou qu'au contraire il varie incessamment d'un point à un autre.*

Dans le premier cas, le point de la normale dont la vitesse est nulle reste toujours le même. Il s'ensuit qu'il est fixe et que la ligne décrite en est équidistante. Cette ligne est donc une circonférence de cercle ayant son centre en ce point.

Dans le second cas, le point de la normale dont la vitesse est nulle est le centre du cercle qui se substituerait à la courbe décrite si, sans rien changer d'ailleurs, l'on conservait au rapport $\frac{\text{v}}{\text{w}}$ *la valeur qu'il affecte à l'instant que l'on considère. Ce cercle prend par rapport à la courbe le nom de* CERCLE OSCULATEUR. *Son rayon est dit* RAYON DE COURBURE. *En désignant par* ρ *ce rayon, on a généralement,*

$$\rho = \frac{v}{w}.$$

75. Soit m une position quelconque du point μ ; o le centre de

courbure qui correspond à cette position; μ' un point mobile assujetti à glisser sur la normale de manière à coïncider toujours avec le centre o du cercle osculateur.

Le rayon ρ étant, par hypothèse, incessamment variable, il s'ensuit que, dans le passage d'une position quelconque de la normale aux positions suivantes, le point μ' s'écarte ou se rapproche du point μ * en glissant sur la normale avec une certaine vitesse. Soit u cette vitesse; elle est déterminée par la variation correspondante du rapport $\frac{v}{w}$, c'est-à-dire par le degré de rapidité avec laquelle ce rapport augmente ou diminue. Il est visible d'ailleurs qu'elle constitue à elle seule la vitesse totale du point μ'.

Affectons à la courbe donnée S le nom de *développante* et au lieu géométrique de ses centres de courbure celui de *développée*. Les considérations qui précèdent ont, pour conséquences immédiates, les déductions suivantes :

1° *Pendant que le point μ décrit la développante avec la vitesse* v, *le point μ' décrit la développée avec la vitesse*

$$u = d\left(\frac{v}{w}\right) = \frac{wdv - vdw}{w^2}.$$

2° *Dans la description de la développée le point μ' glisse sur la normale avec la vitesse* u, *et, en même temps, la normale tourne autour de ce point avec la vitesse* w.

3° *Toute normale à la développante est tangente à la développée, et réciproquement toute tangente à la développée est normale à la développante.*

4° *Dans le passage d'une position à une autre la normale à la développante s'applique sur la développée par voie d'enroulement continu* **.

* Le point μ est le point qui décrit la ligne S. Il est supposé fixe sur la normale qu'il entraîne avec lui.

** En désignant par s' l'arc de la développée, on a évidemment

$$ds' = d\rho,$$

et par suite,

$$\Delta s' = \Delta\rho.$$

5° *L'arc de développée, compris entre deux rayons de courbure de la développante, a pour longueur rectifiée la différence de ces mêmes rayons.*

6° *Le rayon de courbure de la développée est représenté, pour le point* o, *par le rapport* $\frac{u}{w}$, *en même temps que celui de la développante l'est, pour le point* m, *par le rapport* $\frac{v}{w}$.

7° *Lorsque les vitesses* u *et* w *varient dans un rapport constant, la développée est une circonférence de cercle et réciproquement.*

8° *Les développantes de cercle sont les seules lignes pour lesquelles les vitesses* u *et* w *conservent entre elles un rapport invariable.*

La théorie, qui fournit d'elle même ces déductions si simples et si directes, suffit, ainsi qu'on va le voir, à toutes les applications.

Détermination analytique du rayon de courbure, du centre du cercle osculateur et de la développée.

76. Soit

(1). . . . . $y = f(x)$,

l'équation de la ligne S *, dans un système d'axes coordonnés rectangulaires.

Désignons par x, y, les coordonnées du point m, et par α l'angle que la touchante en ce point fait avec l'axe des x.

Le rayon de courbure ayant pour expression générale

(2). . . . . $\rho = \frac{v}{w}$,

* Si l'équation de la ligne S était donnée sous la forme

$$F(x, y) = o.$$

on en déduirait aisément les valeurs des dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$ qui figurent dans les formules suivantes.

c'est-à-dire le rapport de la vitesse du point décrivant à la vitesse angulaire de la directrice, l'équation (2) revient à

$$(3). \quad \ldots \ldots \ldots \quad \rho = \frac{ds}{d\alpha}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\alpha = \text{arc tg } f'(x),$$

et, par suite,

$$d\alpha = \frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2} dx.$$

De là résulte, en substituant cette valeur à $d\alpha$, et en remplaçant ds par $dx\sqrt{1 + f'(x)^2}$,

$$(4). \quad \ldots \ldots \ldots \quad \rho = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

En général, on désigne, par p, la dérivée première $f'(x)$, et par q, la dérivée seconde $f''(x)$. L'équation (4) peut ainsi s'écrire sous cette autre forme

$$(5). \quad \ldots \ldots \ldots \quad \rho = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}.$$

Lorsque la variable x est prise pour variable indépendante et assujettie à croître ou décroître avec uniformité, il est permis de substituer à q le rapport de la différentielle d^2y au carré de la différentielle dx. S'il en est autrement et qu'on veuille exprimer le rayon de courbure en fonction des différentielles correspondantes, on le peut, soit au moyen des formules établies au n° 32 de la deuxième partie (page 136), soit en procédant comme il suit:

On a, généralement,

$$\alpha = \text{arc tg} \frac{dy}{dx}.$$

Il vient donc

$$d\alpha = \frac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2 + dy^2}.$$

On a, d'ailleurs,

$$dx^2 + dy^2 = ds^2.$$

De là résulte

(6). . . . $\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds^3}{dxd^2y - dyd^2x}.$

77. Considérons le cas des coordonnées polaires. Les formules du n° 66, page 180, donnent d'abord

$$ds = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}, \qquad \alpha = \theta + \text{arc tg}\, r \cdot \frac{d\theta}{dr},$$

et, par suite,

$$d\alpha = d\theta + \frac{d\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)}{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}.$$

De là résulte, en général,

(1). . . . $\rho = \frac{\left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + \frac{1}{d\theta} \cdot d\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)},$

et, pour le cas particulier où la variable θ croît ou décroît uniformément, la vitesse angulaire $d\theta$ étant supposée constante,

(2). . . . . $\rho = \frac{\left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)}.$

78. Plaçons-nous de nouveau dans les conditions du n° 76. L'équation de la normale au point m est, ainsi qu'on l'a vu au n° 55, page 154,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (t-x)dx + (u-y)dy = o.$$

Lorsque le point μ sort du lieu m en restant sur la ligne S, la normale tourne autour du centre de courbure comme s'il était fixe. Il s'ensuit que, si l'on considère les coordonnées générales t et u comme étant celles du centre de courbure, et qu'on différencie l'équation (1) dans cette hypothèse, on doit regarder ces coordonnées comme constantes.

De là résulte,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad (t-x)d^2x + (u-y)d^2y = dx^2 + dy^2.$$

Les équations (1) et (2) déterminent les coordonnées du centre de courbure. Elles donnent, pour l'abscisse de ce centre,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad t = x - \frac{dy(dx^2+dy^2)}{dxd^2y - dyd^2x},$$

et, pour l'ordonnée correspondante,

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad u = y + \frac{dx(dx^2+dy^2)}{dxd^2y - dyd^2x},$$

La valeur du rayon de courbure déduite de ces formules est

$$(5). \quad . \quad \rho = \sqrt{(t-x)^2 + (u-y)^2} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

L'équation de la développée s'obtient, d'ailleurs, en éliminant les variables x et y entre l'équation de la courbe et les équations (1) et (2).

Supposons qu'on prenne la variable x pour variable indépendante, et que l'on ait

$$y = f(x).$$

Les équations (3) et (4) deviennent

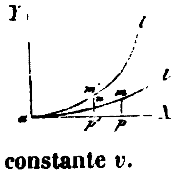
$$t = x - \frac{f'(x)[1 + f'(x)^2]}{f''(x)}, \qquad u = f(x) + \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)},$$

et il suffit d'éliminer x entre ces deux dernières équations pour obtenir l'équation de la développée.

Propriétés et caractères distinctifs du cercle osculateur.

79. Soient al, al', deux courbes passant par le point a et ayant, en ce point, même tangente aX, même normale aY.

Fig. 20.



Soient μ, μ', deux points mobiles assujettis à partir en même temps du lieu a et à décrire simultanément, l'un la courbe al, l'autre la courbe al', tous deux avec une même vitesse constante v.

On suppose les points l, l' assez rapprochés du point a pour que dans la description des arcs al, al' les directrices des points μ, μ' tournent toujours dans le même sens et que leur rotation totale soit inférieure à 90°.

Désignons par m, m' deux positions conjuguées des points μ,μ' et par α, α' les angles dont les directrices ont tourné simultanément dans la description des arcs am, am'.

Les coordonnées du point m étant (x,y) et celles du point m', $(x'\ y')$, on a, d'une part,

$$(1)\ldots\ldots dx = v\cos\alpha, \qquad dy = v\sin\alpha,$$

et, d'autre part,

$$(2)\ldots\ldots dx' = v\cos\alpha', \qquad dy' = v\sin\alpha'.$$

Les équations (1) montrent que l'ordonnée y croit avec l'ab-

scisse x *. Supposons l'angle α' toujours plus grand que l'angle α dans l'intervalle que l'on considère. La comparaison des équations (1) et (2) donne $dx > dx'$ et en même temps $dy' > dy$. Il s'ensuit que, dans la description simultanée des arcs am, am', la projection p' reste en arrière de la projection p, et que néanmoins l'ordonnée $m'p'$ l'emporte en grandeur sur l'ordonnée mp. On a donc $ap' < ap$ et $m'p' > mp$.

Soit n le point de l'arc am situé sur l'ordonnée $m'p'$. Le point p' étant en arrière du point p, on a

$$mp > np'.$$

Il vient donc, *à fortiori*,

$$m'p' > np'.$$

De là résulte le théorème suivant :

Lorsque deux courbes ont en un point commun même tangente, celle dont la courbure, au sortir de ce point, est ou devient plus grande que la courbure de l'autre, s'écarte davantage de la tangente commune.

Ce théorème est en quelque sorte évident *à priori*. Si nous l'avons démontré, c'est uniquement afin de procéder toujours avec une entière rigueur.

80. Considérons une courbe S, et son cercle osculateur en un point quelconque m.

La courbure de la courbe S est, par hypothèse, incessamment variable. Il s'ensuit qu'*en général*, elle est croissante d'un côté du point m et décroissante de l'autre côté. Du côté où la courbure augmente au sortir du point m, elle devient plus grande que celle

* On a

$$dy = dx \,.\, \text{tg}\, \alpha.$$

Il s'ensuit que les vitesses dy et dx sont et restent de même signe pour toute valeur de α comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$.

du cercle osculateur : du côté où elle diminue elle devient plus petite. Dans le premier cas, la courbe S s'écarte plus que le cercle osculateur de la tangente commune; dans le second, elle s'en écarte moins. De là résulte immédiatement cette première déduction :

En général le cercle osculateur coupe la courbe au point d'osculation.

S'agit-il d'un autre cercle ayant son centre sur la normale du côté de la concavité et touchant la courbe S au point *m* ? Selon que ce cercle est moindre ou plus grand que le cercle osculateur, sa courbure, au sortir du point *m*, est, en même temps et des deux côtés à la fois, plus grande ou plus petite que celle de la courbe S. Dans le premier cas, il s'écarte plus que la courbe S de la tangente commune, en deçà comme au delà du point *m*. Dans le second cas, c'est précisément l'inverse. De là résulte, en conséquence, cette deuxième déduction :

Le cercle osculateur est la limite séparative des cercles qui touchent la courbe au point d'osculation, les uns intérieurement, les autres extérieurement.

Observons que les cercles qui touchent la courbe S au point *m*, les uns intérieurement, les autres extérieurement, touchent en même temps et de la même manière le cercle osculateur. Il n'est donc aucun de ces cercles qui puisse passer entre le cercle osculateur et la courbe S. De là résulte cette troisième déduction :

Le cercle osculateur est parmi tous les cercles menés par le point d'osculation celui qui se rapproche le plus de la courbe dans le voisinage de ce point.

Remarque sur les courbes osculatrices.

80[bis] Lorsque deux courbes S, S′ ont en un point commun même direction * et même courbure, celle qui s'écarte le plus de la tangente commune, au sortir du point d'osculation, ne s'en écarte pas autant que toute autre courbe ayant même tangente et une courbure plus grande; celle qui s'en écarte le moins, s'en écarte plus que toute autre courbe ayant même tangente et une courbure plus petite. De là résulte évidemment la conséquence suivante :

Entre deux courbes qui ont, en un point commun, même direction et même courbure, on n'en peut faire passer aucune de courbure plus grande ou plus petite.

La courbure supposée la même au point d'osculation des deux courbes S,S′ est, en général, pour chacune de ces courbes croissante d'un côté et décroissante de l'autre. Si d'un côté la courbure de la courbe S devient d'abord plus grande que celle de la courbe S′, l'inverse a lieu de l'autre côté. Il suit de là que *ces courbes se coupent au point d'osculation.* Cette conséquence subsiste *en général.* Elle est en défaut pour le cas particulier où les courbures, affectées par les courbes S, S′ au point d'osculation, sont toutes deux des *maxima* ou des *minima.*

Indication générale des procédés à suivre pour la détermination des centres et rayons de courbure des courbes planes.

81. Nous avons établi dans les numéros 76, 77 et 78 les formules qui permettent de déterminer par le calcul les centres et rayons de courbure ainsi que les développées des courbes dont on a l'équa-

* On entend par direction d'une courbe en un point celle de la tangente en ce point, ou mieux encore celle de la directrice.

tion, soit en coordonnées rectangulaires, soit en coordonnées polaires. L'emploi direct de ces formules constitue un procédé général, applicable à tous les cas et n'offrant aucune difficulté, si ce n'est, quelquefois, la longueur et la complication des calculs. C'est là, sans aucun doute, un avantage précieux. Toutefois il y a lieu d'observer que l'introduction d'un système de lignes auxquelles on rapporte celles que l'on considère, sans qu'il existe entre les unes et les autres aucun lien naturel, doit avoir très-souvent pour effet de présenter les propriétés les plus simples sous des formes complexes qui les voilent et les dissimulent. L'habitude du calcul, les artifices qu'elle suggère, remédient plus ou moins à cet inconvénient, mais il faut pour cela quelque effort d'invention. Que cet effort, du moment où il devient nécessaire, s'applique à des transformations analytiques, ou à des recherches de géométrie pure, peu importe, s'il est le même de part et d'autre. Cette remarque suffit pour motiver, en certains cas, la combinaison des diverses ressources dont on dispose et l'abandon plus ou moins complet de la voie analytique pour la voie géométrique.

Le rayon de courbure est exprimé par le rapport de la vitesse du point décrivant à la vitesse angulaire simultanée de la directrice. On peut se donner arbitrairement l'une de ces deux vitesses, et dès lors tout se réduit à déterminer l'autre. De là résulte un procédé général, susceptible d'être appliqué de diverses façons pour toute courbe définie géométriquement.

Le centre de courbure est le point de la normale dont la vitesse est nulle à l'instant que l'on considère. Cela revient à dire qu'il se confond avec le centre instantané de rotation. C'est donc en commençant par tourner autour du centre de courbure que la normale sort du lieu qu'elle occupe. A ce point de vue, tout se ramène à déterminer les vitesses de circulation de deux points de la normale. On peut se donner la vitesse du point qui décrit la courbe; il ne reste plus qu'à chercher, pour un autre point quelconque de la normale, la vitesse simultanée qui correspond à celle du point décrivant. La droite qui joint les extrémités de ces deux vitesses va couper la normale au centre de courbure. Tel est le procédé très-simple qui réussit le mieux dans la plupart des cas, et que

l'on peut d'ailleurs appliquer, soit en s'en tenant aux ressources offertes par la géométrie, soit en combinant ces ressources avec celles que fournit l'analyse.

Applications particulières.

1° Sections coniques.

82. Reprenons l'équation générale donnée pour les sections coniques au n° 57, page 156,

$$y^2 + (x - a)^2 = c^2 x^2,$$

On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - (1 - c^2) x}{y} = p,$$

et

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{a^2 c^2}{y^3} = q.$$

De là résulte

$$1 + p^2 = \frac{c^2 x}{y^2} (2 a - [1 - c^2] x) = c^2 \frac{a^2 + y^2}{y^2},$$

et par suite

$$(1) \; \rho = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \frac{c^3 x^{\frac{3}{2}} (2 a - [1 - c^2] x)^{\frac{3}{2}}}{a^2 c^2} = c \frac{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}.$$

On sait, d'ailleurs, que la longueur de la normale désignée par N au n° 57, page 159, a pour expression

$$\mathrm{N} = c \sqrt{x (2a - (1 - c^2) x)} = c \sqrt{a^2 + y^2}.$$

On peut donc écrire aussi

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \rho = \frac{\mathrm{N}^3}{a^2 c^2}.$$

Soit R le rayon de courbure qui correspond au sommet situé sur l'axe des x et pour lequel $y=o$; l'équation (1) donne

(3) . . . . $R=a.c.$

Il vient donc, en général, pour un point quelconque des trois sections coniques

(4). . . . . $\rho=\frac{N^3}{R^2}$.

Procédons par voie géométrique, en poursuivant les déductions du n° 58, page 160.

La vitesse du point m suivant la courbe est représentée par mt, en même temps que sa vitesse de glissement suivant le rayon vecteur fm est représentée par mf. On sait de plus qu'il existe un rapport constant entre les longueurs fn, fm, n étant le point où la normale en m vient couper la droite Of. Il s'ensuit que *la vitesse du point* n *sur* Of *est représentée par* fn. Par les points f et n menons deux droites, l'une fe parallèle à la normale mn, l'autre neh parallèle à la tangente mt.

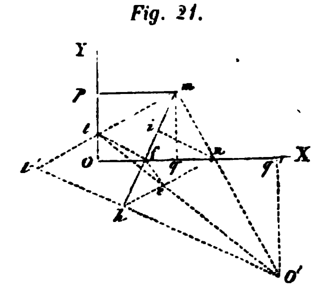


Fig. 21.

Il est visible que le segment ne représente, par rapport à la normale mn, la vitesse de circulation du point n.

Les segments mt, ne pouvant être pris comme vitesses simultanées des points m et n de la normale, il suffit de tirer la droite te pour avoir en O', à la rencontre des droites te, mn, le centre de courbure qui correspond au point m.

Si l'on prenait nh, au lieu de ne, pour vitesse de circulation du point n, il faudrait augmenter, dans le rapport de nh à ne, ou ce qui revient au même, de mh à mf, chacune des deux vitesses mf, mt. La vitesse mf serait ainsi remplacée par mh et la vitesse mt par mt', t' étant le point où la perpendiculaire * élevée en h

* On sait que les droites ft, fm sont rectangulaires.

sur mh vient couper la tangente mt. Cela posé, l'on conclurait, comme tout à l'heure, que le centre de courbure, cherché pour le point m, est en O', à la rencontre des droites $t'h$ et mn.

Arrêtons-nous à cette dernière déduction qui fournit, pour la construction des centres et rayons de courbure des sections coniques, le procédé suivant :

Tirer le rayon vecteur et la normale qui aboutissent au point m *donné sur la courbe. Déterminer le point* n *où la normale vient couper l'axe* Of. *Par ce point élever sur la normale une perpendiculaire et la prolonger jusqu'à sa rencontre en* h *avec le rayon vecteur. Par le point* h *élever sur le rayon vecteur une perpendiculaire et la prolonger jusqu'à sa rencontre en* O' *avec la normale.* Le point O' ainsi déterminé est le centre de courbure qui correspond au point m.

Désignons par $\mathfrak{C}$ l'angle fmn; et rappelons-nous que la projection mi de la normale mn sur le rayon vecteur fm est une quantité constante, égale au produit $c.a$. On a,

$$mi = mn \cdot \cos \mathfrak{C},$$
$$mn = mh \cdot \cos \mathfrak{C},$$
$$mh = mO' \cdot \cos \mathfrak{C}.$$

En multipliant ces trois équations, membre à membre, on en déduit

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \; mO' = \rho = \frac{mi}{\cos^3 \mathfrak{C}} = \frac{c \cdot a}{\cos^3 \mathfrak{C}} \cdot$$

L'angle $\mathfrak{C}$ étant évidemment nul lorsque le point m est pris sur l'axe Of, l'équation (5) donne, comme ci-dessus,

$$R = c \cdot a.$$

Il vient donc aussi

$$\rho = \frac{R}{\cos^3 \mathfrak{C}} \cdot$$

83. L'équation

$$\cos C = \frac{mi}{mn},$$

lorsqu'on y remplace mi par $c.a$, et mn par $c\sqrt{a^2+y^2}$ *, donne

$$\cos C = \frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}, \qquad \sin C = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}},$$

et, par conséquent,

$$\operatorname{tg} C = \frac{y}{a}.$$

Il s'ensuit qu'il y a égalité constante entre l'angle C et l'angle pfO que fait avec l'axe OX la droite menée du point f à la projection du point m sur l'axe OY.

Cette propriété curieuse des sections coniques se reconnaît à la simple inspection de la figure 4, page 156. En effet, l'angle fmn ou son égal flm ayant pour mesure la moitié de l'arc fm dans la circonférence circonscrite au quadrilatère $fmpO$, il est visible qu'il ne diffère pas de l'angle fpm, ni, par conséquent, de son égal pfO.

Cela posé, si l'on désigne par y' l'ordonnée du point O', et que l'on considère les triangles semblables mqn, $O'q'n$, on a

$$\frac{y+y'}{y} = \frac{\rho}{mn} = \frac{1}{\cos^2 C} \;{}^{**},$$

et, par suite,

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{tg}^2 C = \frac{y^2}{a^2}.$$

* C'est la valeur trouvée pour la normale aux numéros 57 et 82, pages 159 et 212.

** On a

$$\rho = \frac{R}{\cos^3 C},$$

et

$$mn = \frac{R}{\cos C}.$$

De là résulte

$$y' = \frac{y^3}{a^2},$$

ou, tenant compte des signes,

$$y' = -\frac{y^3}{a^2}.$$

Cette relation très-simple, entre l'ordonnée d'un point quelconque de la courbe et celle du centre de courbure qui correspond à ce point, peut s'énoncer comme il suit :

Dans les sections coniques, il existe un rapport constant entre le cube de l'ordonnée d'un point quelconque et l'ordonnée du centre de courbure qui correspond à ce point. Ce rapport est égal au carré du paramètre a.

Il est bien entendu que les ordonnées dont il s'agit sont prises par rapport à l'axe principal OX *.

84. Considérons l'ellipse rapportée à ses axes principaux. Si

* A une même valeur quelconque du paramètre a correspondent deux séries, l'une d'hyperboles, l'autre d'ellipses, et, entre ces deux séries, une parabole intermédiaire. On obtient ces lignes en attribuant successivement à c toutes les valeurs possibles à partir de zéro. Considérons un de ces systèmes. Les courbes qu'il comprend étant toutes coupées par une même droite parallèle à l'axe OX, les angles que les normales aux points d'intersection font avec les rayons vecteurs qui aboutissent aux mêmes points sont tous égaux entre eux. Les centres de courbure qui correspondent à ces mêmes points sont tous situés sur une seule et même droite parallèle à la première.

S'agit-il exclusivement d'une ellipse ou d'une hyperbole ? L'angle que font entre eux les rayons vecteurs partant des foyers et aboutissant à un même point est divisé en deux moitiés par la normale. Il s'ensuit que cet angle, dans le cas de l'ellipse, et son supplément, dans le cas de l'hyperbole, sont respectivement égaux au double de l'angle pfO. En substituant ce dernier angle à l'angle des rayons vecteurs, on peut se rendre aisément compte des variations qu'ils subissent simultanément.

nous désignons par a', b' les demi axes et par c' l'excentricité $\sqrt{a'^2 - b'^2}$, on trouve aisément

$$a = \frac{b'^2}{c'}.$$

On a d'ailleurs, pour équation de la courbe,

$$(1). \quad \ldots\ldots \quad \frac{y^2}{b'^2} + \frac{x^2}{a'^2} = 1.$$

et, pour ordonnée du centre de courbure qui correspond au point (x, y),

$$(2). \quad \ldots\ldots \quad y' = -\frac{y^3}{a^2} = -\frac{y^3 c'^2}{b'^4}.$$

Soit x' l'abscisse de ce même centre. Eu égard à la symétrie *, on peut écrire immédiatement

$$(3). \quad \ldots\ldots \quad x' = \frac{x^3 c'^2}{a'^4}.$$

Les équations (2) et (3) donnent

$$y^2 = \frac{y'^{\frac{2}{3}} b'^{\frac{8}{3}}}{c'^{\frac{4}{3}}}, \qquad x^2 = \frac{x'^{\frac{2}{3}} a'^{\frac{8}{3}}}{c'^{\frac{4}{3}}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on a, pour équation de la développée de l'ellipse,

$$(b'y')^{\frac{2}{3}} + (a'x')^{\frac{2}{3}} = c'^{\frac{4}{3}}.$$

Dans le cas de l'hyperbole, on a de même pour la développée,

$$(b'y')^{\frac{2}{3}} - (a'x')^{\frac{2}{3}} = -c'^{\frac{4}{3}},$$

le signe de la quantité b'^2 étant changé.

* L'équation (1) étant composée symétriquement, d'une part en y et b', d'autre part en x et a', il est clair que si l'on procède, par voie de calcul, à la détermination des coordonnées y', x', elles ne peuvent différer que par la substitution des quantités x et a' à leurs correspondantes y et b'.

Dans le cas de la parabole, on a, comme ci-dessus,

$$y^2 = a^{\frac{4}{3}} y'^{\frac{2}{3}},$$

et l'on trouve aisément, c étant égal à l'unité,

$$x = x' - a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}}\right).$$

Ces deux valeurs substituées dans l'équation de la parabole

$$y^2 = 2ax - a^2,$$

donnent, pour équation correspondante de la développée,

$$a^{\frac{1}{3}} y'^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} x' - a.$$

2° Roulettes.

85. Reprenons la cycloïde définie au n° 71. La tangente au point m étant dirigée suivant la droite mb, on a d'après la figure 16, page 191,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bq}{mq} = \frac{mq}{aq} = \sqrt{\frac{2r}{y} - 1} = p.$$

De là résulte

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{r}{y^2} = q.$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = 2\sqrt{2ry} = 2 \, . \, ma.$$

On voit par là que dans la cycloïde le rayon de courbure est égal en grandeur au double de la normale *.

* Soit O le centre de courbure situé sur le prolongement de la normale *ma*,

86. Considérons le cas général des courbes dites *roulettes*.

Soient S′ et S deux lignes situées dans un même plan, l'une fixe, l'autre mobile, celle-ci roulant sans glisser sur la première, et entraînant avec elle un point m situé dans son plan. Le lieu des positions que le point m occupe successivement est celui que nous désignons, en général, sous le nom de *roulette*.

Cela posé, plaçons-nous à un instant quelconque déterminé et nommons:

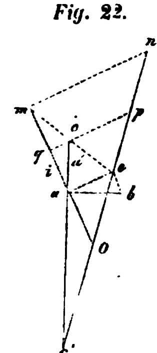
m le lieu actuel du point qui décrit la roulette.

a le point de contact des lignes S, S′.

c, c' les centres de courbure qui correspondent au point a sur la ligne S et sur la ligne S′.

Tirons la droite mc et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en e avec la perpendiculaire élevée en a sur am.

Fig. 22.



La vitesse du point a est dirigée suivant la tangente commune aux deux lignes S, S′. Représentons-la par ab, b étant le point où la droite eb menée par le point e parallèlement à am vient couper cette tangente.

La droite $c'c$ tourne autour du point c', comme s'il était fixe *, et, par hypothèse, cette rotation communique au point a la vitesse ab. Il s'ensuit qu'en désignant par u la vitesse de circulation du point c autour du centre c', on a

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad u = ab \cdot \frac{c'c}{c'a} = ab \cdot \frac{cp}{ae},$$

à la distance aO $= am$. Prolongeons le rayon mc jusqu'à sa rencontre en h avec la circonférence amb. Les points h et O se trouvent sur une même droite hO égale à $2r$ et perpendiculaire à LP. Il s'ensuit que le lieu des points O s'obtient en abaissant celui des points h de la quantité $2r$. Concluons que la développée de la cycloïde se compose de deux demi-cycloïdes identiques à la première et disposées par rapport à celle-ci d'une façon qu'il est très-facile de reconnaître. (Voir fig. 16, page 191)

* Il suffit de substituer aux deux lignes S, S′ leurs cercles osculateurs pour reconnaître immédiatement l'exactitude de cet énoncé.

la droite qcp étant parallèle à ae et limitée à la rencontre de la droite $c'e$.

Les points m et c peuvent être considérés comme tournant tous deux à la fois autour du centre instantané a. Soit v la vitesse du point m. Elle est dirigée tout entière suivant la droite mn perpendiculaire en m au rayon vecteur am, et il existe, entre elle et la vitesse u, le même rapport qu'entre les longueurs am, ac. On peut donc écrire

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad v = u \cdot \frac{am}{ac} = ab \cdot \frac{cp}{ae} \cdot \frac{am}{ac} \cdot$$

Les triangles semblables abe, acq donnent

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{ab}{ae} = \frac{ac}{aq},$$

et, par suite,

$$v = cp \cdot \frac{am}{aq} \cdot$$

Le point n de la droite mn étant pris sur le prolongement de la droite $c'e$, on a, comme on le voit aisément sur la figure,

$$\frac{am}{aq} = \frac{en}{ep} = \frac{mn}{cp} \cdot$$

Il vient donc aussi

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad v = mn.$$

Mais, d'un autre côté, la vitesse du point de la normale am qui coïncide actuellement avec le point a est représentée par la composante ae de la vitesse ab. Il s'ensuit que la droite $c'en$ passe par les extrémités des vitesses qui animent en même temps les points m et a de la normale am. De là résulte la déduction suivante :

Le centre de courbure cherché pour le point m *est situé en* O *à la rencontre des droites* ma *et* c'c.

La droite ma est donnée d'avance. Le point e se détermine en tirant la droite mc et élevant en a une perpendiculaire sur am. Cela fait, il ne reste plus qu'à joindre le point c' au point e par la droite $c'e$. La solution est, comme on le voit, très-simple et purement géométrique. Traduisons-la en nombres.

Désignons par R, R′ les rayons de courbure ac, ac'; par r le rayon vecteur qm; par ϵ l'angle mac. On a, d'après ce qui précède,

$$u = ab \cdot \frac{c'c}{c'a} = ab\,\frac{R + R'}{R'}$$

et, en même temps,

$$r = u\,\frac{am}{ac} = \frac{ru}{R} = mn.$$

On déduit de là

$$mn = r \cdot ab \cdot \frac{R + R'}{RR'},$$

et posant

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad h = \frac{RR'}{R + R'},$$

il vient

$$mn = \frac{r \cdot ab}{h}.$$

On a d'ailleurs, d'après la figure,

$$\rho = mO = \frac{am \cdot mn}{mn - ae}.$$

De là résulte, en substituant,

$$\rho = \frac{r^2}{r - h\,\dfrac{ae}{ab}};$$

puis, remplaçant le rapport $\frac{ae}{ab}$ par son égal $\frac{aq}{ac} = \cos \mathcal{C}$,

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \rho = \frac{r^2}{r - h\cos \mathcal{C}}.$$

Portons sur ac la longueur aa' égale à h, et telle que l'on ait

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad aa' = h = \frac{RR'}{R + R'}.$$

Si l'on désigne par i le pied de la perpendiculaire abaissée du point a' sur le rayon vecteur am, on a,

$$h \cos \mathcal{C} = ai.$$

La formule (6) peut, en conséquence, s'écrire sous la forme très-simple

$$(8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \rho = \frac{r^2}{mi}.$$

Si le centre de courbure c' était situé par rapport au point a du même côté que le centre de courbure c, les formules (5), (7) et (8) ne cesseraient pas d'être applicables. Il faudrait seulement y mettre $-R'$ au lieu de $+R'$.

Sagit-il, en particulier, des épicycloïdes proprement dites, les lignes S, S' étant des cercles, et le point générateur étant pris sur la circonférence du cercle mobile? En désignant par m le rapport du rayon R' au rayon R et remplaçant R' par mR, il vient

$$h = \frac{m}{m+1} R.$$

On a, d'ailleurs, et évidemment,

$$R \cos \theta = \frac{r}{2}.$$

De là résulte, en substituant,

$$(9) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \rho = 2 \cdot \frac{m+1}{m+2} r.$$

Cette formule s'applique au cas où les cercles S, S' sont extérieurs l'un à l'autre. S'ils étaient placés l'un dans l'autre, toutes choses égales d'ailleurs, on trouverait de même

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \rho = 2 \cdot \frac{m-1}{m-2} r.$$

87. On observera que, dans la rotation simultanée des deux droites *am*, *ac*, autour du point *a*, les vitesses communiquées aux points *a'* et *m* sont entre elles dans le même rapport que les longueurs *aa'* et *am*. Si donc on désigne la première par *u'*, en même temps que la seconde est représentée par *mn*, il vient

$$u' = mn \cdot \frac{aa'}{am} \cdot$$

Or, on a trouvé ci-dessus

$$mn = r \cdot ab \cdot \frac{\mathrm{R} + \mathrm{R}'}{\mathrm{RR}'} = \frac{am}{aa'} \cdot ab.$$

Il s'ensuit donc que l'on a très-simplement

$$u' = ab.$$

Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante:

La ligne S *entraînant avec elle tous les points de son plan, le point* a' *est celui dont la vitesse est précisément égale à celle du centre instantané* a.

Il est d'ailleurs entendu que cette égalité implique, de part et d'autre, l'identité de direction, sens et grandeur.

La vitesse *ab* détermine ainsi qu'on l'a vu la vitesse *ae*. Si l'on suppose que la vitesse *mn* soit donnée en même temps que la vitesse *ab*, il s'ensuit que le centre O de courbure est absolument déterminé. Cela posé, imaginons que, sans rien changer d'ailleurs,

ou substitue, d'une part à la ligne S, la circonférence de cercle ayant son centre en a', et aa' pour rayon; d'autre part, à la ligne S', la tangente commune ab: il est visible qu'en roulant sur cette droite le cercle aa' communique au point m ainsi qu'au centre instantané de rotation a leurs vitesses respectives mn, et ab, ou ce qui revient au même, d'autres vitesses conservant entre elles le même rapport*. Rien donc n'est changé par là dans la détermination du centre de courbure cherché pour le point m. En se plaçant à ce point de vue, on peut désigner le point a' sous le nom de *centre instantané de roulement*. Il suffit ensuite de faire la substitution indiquée pour ramener la question générale à ses termes les plus simples, la courbe fixe étant remplacée par une droite et la courbe mobile par le cercle de roulement qui lui correspond à l'instant que l'on considère.

Lorsqu'on ramène le cas général des roulettes à celui d'un cercle roulant sur une droite D, la construction du n° 86, page 221, *se réduit* aux termes suivants :

Soient ab la droite D; a le centre instantané de rotation; a' le centre du cercle roulant; m le point qui décrit la roulette; e le point de rencontre de la droite ma' avec la perpendiculaire élevée en a sur le rayon vecteur am. Cela posé,

Fig. 23.

Le centre de courbure cherché pour le point m *est en* O *à la rencontre du rayon vecteur* ma *et de la perpendiculaire abaissée du point* e *sur la droite* ab.

Élevons en m, sur am, la perpendiculaire mt. Par le point a' menons la droite sg parallèle à ma, et tirons la droite ts. Il est aisé de voir que

* Soit ab la vitesse du centre instantané a. Cette vitesse est en même temps celle du centre a'. De là résulte évidemment pour la vitesse v du point m

$$v = ab \cdot \frac{am}{aa'} = mn.$$

si l'on représente par mt la vitesse du point m, celle qui anime en même temps le point de la normale situé actuellement en a est représentée par as. La conséquence est que le prolongement de la droite ts passe nécessairement par le centre O de courbure déjà déterminé. Cette déduction se vérifie d'ailleurs sans difficulté. En effet, soit i la projection du point a' sur le rayon vecteur am; on a d'abord, conformément à la formule (8) du n° 86, page 222,

$$\frac{\rho}{r} = \frac{r}{mi}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1) \dots\dots\dots \quad \frac{m\text{O}}{am} = \frac{am}{mi}.$$

S'agit-il ensuite du point O, considéré comme l'intersection des droites ts, ma? Il vient

$$\frac{m\text{O}}{gs} = \frac{mt}{gt} = \frac{am}{ga'}$$

ou, remplaçant gs par am, et ga' par mi,

$$(2) \dots\dots\dots \quad \frac{m\text{O}}{am} = \frac{am}{mi}.$$

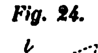
La simultanéité des équations (1) et (2) prouve la proposition énoncée ci-dessus. Elle fournit, en outre, un second moyen de construire le centre de courbure cherché pour le point m.

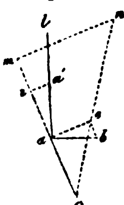
Prolongeons la droite $a'a$ d'une longueur aa'' précisément égale à aa'. Il est visible qu'au lieu de procéder comme tout à l'heure, on pourrait faire précisément l'inverse, c'est-à-dire substituer, d'une part, à la ligne S une droite, d'autre part, à la ligne S' la circonférence de cercle ayant son centre en a'' et aa'' pour rayon.

88. Les résultats obtenus dans les numéros 86 et 87 peuvent s'établir directement en procédant de la manière suivante :

Considérons une figure plane et de forme invariable qui se déplace dans son plan d'un mouvement continu.

Soient a le centre instantané de rotation qui correspond à une





position donnée de la figure mobile F; ab le segment de droite qui représente en direction, sens et grandeur la vitesse actuelle d'un point mobile assujetti à coïncider constamment avec le centre instantané a; ω la vitesse angulaire avec laquelle la figure F tourne autour du point a à l'instant que l'on considère.

Si l'on élève en a sur ab une perpendiculaire al et qu'on désigne par a' le point de cette droite qui emprunte à la rotation établie autour du centre a une vitesse précisément égale à ab, on a

$$(1) \ldots\ldots\ldots \quad \omega = \frac{ab}{aa'}$$

Soit mn la vitesse qu'emprunte à cette même rotation un point quelconque m lié à la figure mobile et entraîné par elle. On a, en même temps,

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad mn = \omega \,.\, am.$$

Projetons le point b en e sur la droite ae menée par le point a perpendiculairement à am. La vitesse ab aura pour composante perpendiculaire à am la vitesse ae.

On sait que le centre de courbure de la trajectoire du point m est en O, à la rencontre des droites ma, ne. De là résulte immédiatement

$$\rho = m\mathrm{O} = \frac{mn \,.\, am}{mn - ae}$$

Soit i le pied de la perpendiculaire abaissée du point a' sur am. La comparaison des triangles semblables abe, $aa'i$ donne

$$ae = ab \,.\, \frac{ai}{aa'} \,.= \omega \,.\, ai.$$

De là résulte, en remplaçant mn, ae par leurs valeurs respectives $\omega . am$, $\omega . ai$,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \rho = \frac{\overline{am}^2}{am - ai} = \frac{\overline{am}^2}{mi}.$$

La combinaison des équations (1) et (2) donne, d'ailleurs,

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{mn}{ab} = \frac{am}{aa'}.$$

L'équation (4) montre que les choses se passent comme si la figure F était une circonférence de cercle ayant son centre en a', touchant en a la droite ab, et roulant sans glisser sur cette même droite. De là le nom de *cercle de roulement* donné à ce cercle, et celui de *centre instantané de roulement* donné à son centre a'.

La valeur fournie par l'équation (3) devient avec les notations du n° 86, page 221,

$$\rho = \frac{r^2}{mi} = \frac{r^2}{r - aa' \cos \varphi}.$$

Désignons par ω' la vitesse angulaire avec laquelle la droite cc' tourne autour du centre c' (fig. 22, page 219) considéré comme fixe. La vitesse du point c devant être la même, soit qu'elle s'emprunte à cette rotation, soit qu'on la fasse résulter de la rotation ω établie autour du centre instantané a, on a évidemment

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (R + R')\,\omega' = R\omega.$$

On a de même, en ce qui concerne la vitesse ab,

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ab = R'\omega'.$$

La combinaison des équations (1), (5), (6) donne

$$ab = \frac{RR'}{R + R'}\,\omega = aa' . \omega.$$

Il vient donc, comme au numéro 86, page 221,

$$au' = h = \frac{RR'}{R + R'},$$

et, par conséquent,

$$(7). \quad \ldots\ldots \quad \rho = \frac{r^2}{r - h \cos \theta}.$$

L'inspection de la figure fournit encore la déduction suivante:

Le centre O *de courbure est placé par rapport au point* m *du même côté que le point* i.

89. Supposons ρ connu pour le point m, il vient en général

$$(1). \quad \ldots\ldots \quad mi = \frac{\overline{am}^2}{\rho} = \frac{r^2}{\rho}.$$

Cette formule peut servir en certains cas à la détermination directe du centre instantané de roulement. Voici d'ailleurs plusieurs énoncés qui résument les résultats précédents:

1° *Le centre instantané de roulement est situé sur la normale à la trajectoire décrite par le centre instantané de rotation de la figure mobile.*

2° *La distance comprise entre ces deux centres étant exprimée par* h, *la vitesse du centre instantané de rotation par* u′, *la vitesse angulaire de la figure mobile par* ω, *l'on a généralement*

$$h = \frac{u'}{\omega}.^*$$

3° *Le point* i *étant pris sur un rayon vecteur quelconque* am = r

* C'est l'équation (1) du n° 88, page 226. On entend, par vitesse du centre instantané de rotation, la vitesse d'un point mobile assujetti à coïncider constamment avec ce centre.

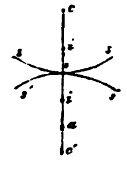
et la distance mi $= \frac{r^2}{\rho}$ *étant portée, à partir du point* m, *dans le sens fixé par la position relative du centre de courbure, la perpendiculaire élevée en* i *sur* am *passe par le centre instantané de roulement.*

90. Plaçons-nous dans l'hypothèse où la ligne S est une ligne quelconque entraînée par la figure mobile, la ligne S′ étant une autre ligne quelconque, supposée fixe et touchée constamment par la ligne S.

Désignons par e le point de contact des lignes S, S′, à l'instant que l'on considère; par c, c' les centres de courbure qui correspondent au point e pour chacune de ces courbes; par R, R′ les rayons de courbure ce, $c'e$; par a le centre instantané de rotation.

Il est visible que les points e, c, c', a sont situés sur une même droite normale en e aux lignes S, S′ et que la trajectoire décrite par le point c de la figure mobile a son centre actuel de courbure en c' *.

Fig. 25.



Soit i la projection du centre instantané de roulement sur la droite ca. On a, en général, et conformément à ce qui précède

$$(1) \ldots \ldots \quad ci = \frac{\overline{ac}^2}{R + R'}, \text{ **}$$

Cela posé, différents cas peuvent se présenter. En établissant,

* La droite cc' étant perpendiculaire à la vitesse actuelle du point e, il s'ensuit qu'elle contient le centre instantané a.

On peut substituer aux lignes S, S′ leurs cercles osculateurs. Cela posé, lorsque le cercle ce roule avec ou sans glissement sur le cercle $c'e$, le centre c reste équidistant du centre c' et décrit, en conséquence, la circonférence de cercle ayant cc' pour rayon.

** Lorsque la ligne S roule, sans glisser, sur la ligne S′, le point a se transporte en e et il vient

$$ci = \frac{R^2}{R + R'}.$$

On en déduit comme au n° 86, page 221,

$$aa' = R - ci = R - \frac{R^2}{R + R'} = \frac{RR'}{R + R'}.$$

ainsi que l'a fait M. Bresse, pour chacun de ces cas, la règle particulière qui lui correspond, on facilite beaucoup certaines applications *.

Supposons, en premier lieu, que la ligne S' soit droite. Il vient, en ce cas,

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ci = o,$$

et voici la conséquence :

Le centre instantané de roulement est situé sur la droite menée par le centre c *parallèlement à la droite* S'

REMARQUE. — *Lorsque la ligne* S *se réduit à un point parcourant une droite, cette droite passe par le centre instantané de roulement.*

Supposons en second lieu, que la ligne S' se réduise au point e. Il vient, en ce cas,

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ci = \frac{\overline{ac}^2}{R}.$$

On sait, d'ailleurs, que *le centre instantané de roulement se projette en* i *sur la droite* ce.

Supposons, en troisième lieu, que la ligne S se réduise au point e. Il vient, en ce cas,

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ei = \frac{\overline{ea}^2}{R'},$$

le point i étant par rapport au point e du même côté que le centre c'.

Supposons, en dernier lieu, que la ligne S soit droite. On a, généralement,

$$c'i = R + R' - \frac{\overline{ac}^2}{R+R'} = \frac{(R+R')^2 - \overline{ac}^2}{R+R'} = c'a\left(1 + \frac{ca}{R+R'}\right).$$

* Voir le *Journal de l'École polytechnique*, trente-cinquième cahier.

Il vient donc à la limite

(5). . . . . $c'i = 2c'a$.

Si la ligne S' se réduit, en outre, au point e, ce point se confond avec le centre c' et la formule (5) devient

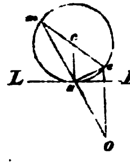
(6). . . . . $ei = 2ea$.

La solution consiste à joindre le centre c', ou, s'il y a lieu, le point e qui le remplace, au centre instantané a, puis à prolonger le segment $c'a$, ou ea d'une longueur égale à lui-même. *L'extrémité du dernier segment est la projection du centre instantané de roulement.*

91. Montrons, par quelques applications, l'usage qu'on peut faire des procédés établis dans les cinq numéros qui précèdent.

Cycloïde. — Soit c le centre du cercle qui roule, sans glisser, sur la droite fixe LP, et dont le point m décrit la cycloïde.

Fig. 26.



L'extrémité e du diamètre mce est le point de rencontre de ce diamètre avec la perpendiculaire élevée en a sur le rayon vecteur am. Le centre de courbure cherché pour le point m est en o, à la rencontre du rayon vecteur am avec la droite eo menée par le point e parallèlement à ca *. Or de même que le point c est le milieu du diamètre me, de même aussi le point a est le milieu du segment mo. De là résulte immédiatement

$$\rho = mo = 2 \, . \, am.$$

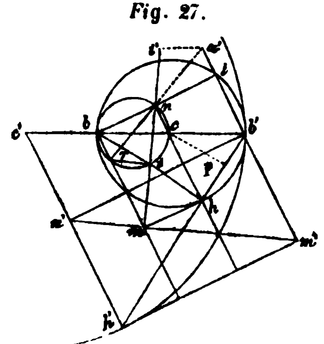
Il s'ensuit d'ailleurs, comme au n° 85, pages 218 et 219, que la développée de la cycloïde se compose de deux demi-cycloïdes égales à la première.

* Cette construction résulte de la solution géométrique obtenue pour le cas général des roulettes au n° 86, page 219. On peut d'ailleurs y parvenir directement sans la moindre difficulté ; il suffit d'opérer, pour ce cas, comme on l'a fait pour celui des roulettes.

Limaçon de Pascal. — Procédons d'abord en suivant la marche générale tracée pour la solution géométrique des questions de courbure.

Soient *c* le centre du cercle *bhb'*; *h* un point quelconque de la circonférence; *mh* la tangente en ce point; *m* le pied de la perpendiculaire abaissée du point *b* sur la tangente *mh*. On sait que le limaçon de Pascal est le lieu des points *m*.

Fig. 27.



Considérons cette courbe comme étant décrite d'un mouvement continu. Il suffit pour cela que le point *h* se déplace continûment sur la circonférence *bhb'*.

Lorsque le point *m* sort du lieu qu'il occupe, les droites *bm*, *hm* tournent simultanément l'une autour du point *b*, l'autre autour du point *h*, et comme elles sont assujetties à rester perpendiculaires entre elles, il en résulte qu'elles ont toutes deux même vitesse angulaire. Prenons cette vitesse angulaire égale à l'unité.

Il est visible que la vitesse totale du point *m* a pour composantes rectangulaires, 1° une vitesse dirigée suivant *mh* et représentée en grandeur par *bm*; 2° une vitesse dirigée suivant le prolongement de *bm* et représentée en grandeur par *mh*. Imaginons que ces deux composantes tournent, en même temps, autour du point *m*, de manière à décrire chacune un angle droit et à venir s'appliquer l'une sur *mh*, l'autre sur *mb*. Après cette rotation, la résultante est représentée en grandeur ainsi qu'en direction par la diagonale *mn* du rectangle *hmbn*, et, comme elle a tourné d'un angle droit, il s'ensuit que la diagonale *mn* est, pour le point *m* de la courbe décrite, la normale à cette courbe.

Observons que les diagonales *mn*, *bh* sont égales et que, par conséquent, l'une et l'autre représentent en grandeur la vitesse du point *m*.

Joignons le point *h* aux points *c*, *b'*. Le rayon *ch* est parallèle à la droite *bm*, et tourne par conséquent comme elle avec une

vitesse angulaire égale à l'unité. Il s'ensuit que la vitesse du point h, dirigée suivant la tangente mh, est représentée en grandeur par le rayon ch. Décomposons cette vitesse en deux autres dirigées respectivement, l'une suivant hb', l'autre suivant le prolongement de bh. Faisons tourner d'un angle droit la vitesse ainsi décomposée, de manière à l'appliquer sur hc, et du point c abaissons sur $b'h$ la perpendiculaire cp. Il est aisé de voir que cette perpendiculaire représente en grandeur la vitesse de glissement du point h sur la corde hb'. On a d'ailleurs

$$bh = 2 . cp.$$

Concluons que la vitesse du point m sur sa trajectoire est double de la vitesse du point h sur la corde hb', ce qui implique la déduction suivante à laquelle nous étions déjà parvenu n° 72, page 197:

L'arc de limaçon compris entre le point b' *et le point* m *est égal en longueur au double de la corde* b'h.

Prolongeons le diamètre $b'b$ d'une longueur bc' égale au rayon cb. Par les points c', b' menons les droites $b'm'$, $c'h'$ parallèles à bm et par conséquent à ch. Prolongeons la corde $b'h$ jusqu'à sa rencontre en h' avec la droite $c'h'$, et achevons le rectangle $h'm'b'n'$.

L'égalité des segments $b'c$, cb, bc' implique celle des segments interceptés par les parallèles $b'm'$, ch, bm, $c'h'$ sur les droites $b'h'$, $b'n'$, mh. Il en résulte que dans le rectangle $h'm'b'n'$, la diagonale $m'n'$ passe par le point m, comme la diagonale $b'h'$ passe par le point h et que l'on peut écrire immédiatement

$$hh' = mm'.$$

On a, d'ailleurs,

$$hh' = 2b'h.$$

Il vient donc aussi

$$mm' = 2b'h.$$

Cela posé, puisque la corde $b'h$ est la moitié de l'arc de limaçon compris entre les points b' et m, il s'ensuit que la longueur mm' est le développement de ce même arc.

L'angle *bhb'* est droit par construction. L'angle *nmn'* est évidemment égal à l'angle *bhb'*. Il est donc droit, et, puisque la droite *mn* est la normale en *m*, il s'ensuit que la tangente en ce point est la droite *mm'*.

La droite mm' *touchant en* m *le limaçon construit sur la circonférence de cercle* bhb' *et ayant pour longueur l'arc compris entre ce point et le point* b', *il en résulte que le point* m' *appartient à la développante qui prend son origine au point* b'.

D'un autre côté, la droite *c'h'* est, par construction, triple de *ch* et perpendiculaire à *m'h'*. Il suit de là que *la droite* m'h' *touche en* h' *la circonférence de cercle ayant son centre en* c' *et* c'b' = 3.cb *pour rayon.* Le point *m'* est d'ailleurs le pied de la perpendiculaire abaissée du point *b'* sur la tangente *m'h'*. Il s'ensuit donc que *le point* m' *appartient au limaçon construit sur la circonférence de cercle* b'h', b' *étant le point qu'on projette orthogonalement sur toutes les tangentes.*

On voit, par ce qui précède, que le point *m'* appartient à la fois au second limaçon et à la développante du premier. De là résultent les conclusions suivantes :

La développante du limaçon est un autre limaçon construit sur une circonférence de cercle trois fois plus grande que la première.

Le centre de courbure de la développante est en m *pour le point* m'. *Le rayon de courbure correspondant est les deux tiers de la diagonale* m'n'.

Réciproquement.

La développée du limaçon est un autre limaçon construit sur une circonférence de cercle trois fois plus petite que la première.

Le rayon de courbure qui correspond au point m *est égal aux deux tiers de la normale* mn.

Ces propriétés du limaçon complètent l'analogie déjà signalée

entre cette courbe et la cycloïde, les développées étant de part et d'autre de même nature que les développantes, semblables ou identiques, et ne différant d'ailleurs que par leur position relative.

92. Reprenons le cas du limaçon en opérant d'une autre manière.

Soit *bncr* la circonférence de cercle décrite avec *cb* pour diamètre; *r* étant le point où la droite *bm* vient couper cette circonférence, il est aisé de voir que la distance *rm* est égale à *ch* et par conséquent à *cb*. De là résulte la définition suivante :

Étant donné un point r *assujetti à décrire une circonférence de cercle* bncr, *si l'on porte sur la droite* br *une longueur* rm *égale au diamètre* cb, *le lieu des points* m *est le limaçon de Pascal.*

Partons de cette définition et considérons le point *r* comme fixe sur la droite mobile *br*. Il s'ensuit : 1° que le centre instantané de rotation de la droite *br* est en *n*, à la rencontre du diamètre *rn* avec la perpendiculaire élevée en *b* sur *br*; 2° que la droite *mn* est normale en *m* au limaçon.

Nous pouvons appliquer ici la formule (6) du n° 90, page 251 *. Prolongeons, en conséquence, *bn* jusqu'en *i* où l'on a $ni = bn$, et, par suite, $bi = 2bn$. La droite *b'i* menée par le point *i* perpendiculairement à *bi* contient le centre instantané de roulement. Ce centre est donc en *a'* à la rencontre de la droite *b'i* avec le prolongement du diamètre *rn* **.

Soit *i'* la projection du centre *a'* sur la normale *mn*. Le rayon

* Il suffit pour cela de considérer les lignes S, S' du n° 90 comme se réduisant, la première, à la droite *brm*, la seconde, au point *b*. L'équation $ei = 2ea$ donne, en conséquence, $bi = 2bn$.

** Le lieu des positions successives du centre instantané *n* étant la circonférence de cercle *bcn*, la perpendiculaire élevée en *n* sur la tangente n'est autre chose que le diamètre *rn*.

de courbure cherché pour le point m est donné par la formule

$$\rho = \frac{\overline{mn}^2}{mi'}.$$

Cela posé, le triangle mrn étant isocèle, et la droite rs perpendiculaire à la base mn, on a d'abord

$$ms = sn.$$

L'égalité des segments ni, bn implique celle des hypoténuses na', nr et, par conséquent aussi, la suivante

$$ni'' = sn.$$

De là résulte évidemment

$$mi' = 3 \,.\, sn = 3 \,.\, \frac{mn}{2},$$

et, par suite,

$$\rho = \frac{2}{3}\, mn.$$

93. Ellipse. — Considérons l'ellipse engendrée par un point d'une droite, de longueur constante, qui se meut en s'appuyant par ses extrémités sur les deux côtés d'un angle.

Soient bn, bn' les côtés de l'angle sur lesquels s'appuye la droite nn' de longueur constante, et m le point de cette droite qui décrit l'ellipse considérée.

Fig. 28.

Le centre instantané de rotation de la droite mn est en a, point de concours des droites na, $n'a$ respectivement perpendiculaires aux côtés bn, bn'. Le centre instantané de roulement est en b puisqu'en vertu de la règle exprimée par la formule (2) du n° 90, page 230 (voir la remarque), il doit être en même temps sur chacune des deux droites bn, bn' *.

* On peut considérer la ligne S du n° 90 comme se réduisant ici à l'un ou l'autre des points n, n'.

Tirons le rayon vecteur *am*; du point *b* abaissons sur ce rayon vecteur la perpendiculaire *bi*, et désignons par ρ le rayon de courbure de l'ellipse au point *m*. On a

$$\rho = \frac{\overline{am}^2}{mi},$$

et le centre de courbure est situé au delà du point *m* sur le prolongement de *am*.

Désignons par *r* la distance *am* et par λ, λ' les segments de longueurs constantes *mn*, *mn'*. La circonférence de cercle décrite sur *ba* comme diamètre passe par les points *n*, *n'*, *i*. De là résulte

$$am \,.\, mi = \lambda \,.\, \lambda'.$$

et, par suite,

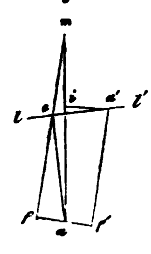
$$\rho = \frac{r^3}{\lambda\lambda'}.$$

C'est la formule à laquelle nous étions déjà parvenu en suivant une autre marche, dans notre théorie géométrique des rayons et centres de courbure.

Conchoïde. — Prenons pour dernier exemple la conchoïde d'Archimède, c'est-à-dire la courbe engendrée par un point d'une droite qui tourne en passant par un point fixe et de manière à ce que l'un de ses points décrive une autre droite.

Soient *m* le point générateur; *f* le point fixe; *mf* la droite mobile; *e* le point de cette droite assujetti à décrire la droite fixe *ll'*.

Fig. 29.



Les droites *fa*, *ea* étant respectivement perpendiculaires, l'une, à la droite mobile *fm*, l'autre, à la droite fixe *ll'*, leur point de concours *a* est le centre instantané de rotation de la droite *fm*. Prolongeons *af* d'une longueur *af'* égale à *fa* et par le point *f'* élevons sur *ff'* la perpendiculaire *f'a'*.

En vertu des règles exprimées par les formules (2) et (6) du n° 90, pages 230 et 231, le centre instantané de roulement est en a' à la rencontre des droites $f'a'$, ll'.

Joignons le point m au point a par la normale ma; du point a' abaissons sur cette normale la perpendiculaire $a'i$ et désignons par ρ le rayon de courbure cherché par le point m. On a

$$\rho = \frac{\overline{ma}^2}{mi}.$$

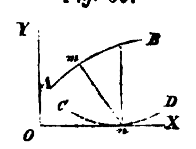
94. Les applications qu'on peut faire en s'appuyant sur les considérations précédentes comportent une extension qu'il convient d'indiquer. Cette extension repose sur le principe suivant :

Toute ligne plane peut être considérée généralement comme étant une roulette du genre cycloïdal, c'est-à-dire une roulette engendrée par un point lié à une courbe qui roule sans glisser sur une droite fixe.

Démontrons d'abord ce théorème.

Soient AB une ligne plane; OX une droite tracée dans le même plan; m un point quelconque de la ligne AB; mn la normale au point m.

Fig. 30.



Supposons le point m lié à une courbe S et cherchons à déterminer cette courbe par la condition qu'en roulant sans glisser sur la droite OX elle fasse décrire au point m la ligne AB.

La ligne S touche en n la droite OX et l'on a, conformément à la formule générale du n° 88, page 227,

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad R = \frac{r}{\cos \mathcal{C}} \cdot \left(1 - \frac{r}{\rho}\right),$$

r étant la normale mn; $\mathcal{C}$ l'angle de cette normale avec la perpendiculaire élevée en n sur OX; ρ et R les rayons de courbure qui correspondent, l'un au point m de la ligne AB, l'autre au point n de la courbe S.

Si l'on rapporte la ligne S aux axes rectangulaires OX, OY, et qu'on désigne par u l'abscisse du point n, on a d'abord

$$r = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},\quad \frac{1}{\cos \mathcal{C}} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},\quad \rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)},$$

et de là résulte, en premier lieu,

$$\mathrm{R} = y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2y}{dx^2}\right].$$

On a, ensuite,

$$u = x + y.\frac{dy}{dx},$$

et l'on en déduit

$$x = \mathrm{F}(u).$$

Par hypothèse, y est une fonction connue de la variable x, on peut donc exprimer y en fonction de x, puis x en fonction de u et parvenir à l'équation déterminée

$$\mathrm{R} = f(u).$$

Désignons par s l'arc de la courbe S qui s'est développé sur la droite OX à partir de l'origine jusqu'en n : on a évidemment $u = s$ et, par suite,

$$\mathrm{R} = f(s).$$

Remplaçons R par le rapport des deux vitesses v ou ds, w ou $d\alpha$. Il vient

(2). . . . . $w = \dfrac{v}{f(s)}$ ou $d\alpha = \dfrac{ds}{f(s)}$.

Donnons-nous arbitrairement la vitesse v, sa direction première et la position initiale d'un point μ supposé mobile avec la

vitesse v. Si nous prenons à chaque instant pour s la longueur décrite par le point μ depuis l'origine du mouvement, et pour vitesse angulaire de la directrice du point μ la quantité correspondante w, il est visible que la ligne S définie par l'équation (2) se trouve complétement déterminée, ce qui justifie l'énoncé précédent et fournit en outre le moyen de construire la courbe S.

95. Sans rien changer à ce qui précède, proposons-nous d'exprimer l'équation de la courbe S en coordonnées polaires et plaçons le pôle au point m.

Soit

$$(3) \ldots\ldots\ldots \quad x = \varphi(y),$$

l'équation de la ligne AB. En désignant par r le rayon vecteur mn, on a

$$x = s - r \sin \mathcal{C}, \qquad y = r \cos \mathcal{C}.$$

Il vient donc, d'abord,

$$(4) \ldots\ldots \quad s = r \sin \mathcal{C} + \varphi(r \cos \mathcal{C}).$$

Observons que l'angle désigné par $\mathcal{C}$ est l'angle que la normale en n à la ligne S fait avec le rayon vecteur mn, autrement dit l'angle que font entre elles la vitesse ds et sa composante $rd\theta$ *. De là résulte

$$(5) \ldots\ldots\ldots \quad ds = \frac{rd\theta}{\cos \mathcal{C}}.$$

La deuxième composante de la vitesse ds étant dr, on a de même

$$(6) \ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tg} \mathcal{C} = \frac{dr}{rd\theta}.$$

* On sait que, dans le système des coordonnées polaires, nous représentons par θ l'angle du rayon vecteur avec l'axe. Il s'ensuit que la quantité $d\theta$ est la vitesse angulaire de ce rayon, et $rd\theta$ la vitesse de circulation de son extrémité n.

La simultanéité des équations (4) (5) (6) permet d'éliminer les variables s, ds, 6, $d6$, et d'obtenir ainsi, pour la ligne S, une équation différentielle de la forme

$$F\left(r, \theta, \frac{dr}{d\theta}, \frac{d^2r}{d\theta^2}\right) = o.$$

Prenons, pour exemple, le cas où la ligne AB est droite et supposons d'abord qu'elle soit parallèle à l'axe OX. L'équation (1) du n° 94, page 238, se réduit, dans cette hypothèse, à

$$R = \text{cons}^{\text{te}}.$$

Cela donne un cercle, pour la courbe S, et le centre de ce cercle, pour point décrivant.

Supposons maintenant que la droite AB soit quelconque. L'angle 6 est l'angle que cette droite fait avec l'axe OX. De là résulte, conformément à l'équation (6) du présent numéro,

$$\frac{dr}{rd\theta} = \text{tg}\, 6 = \text{cons}^{\text{te}}.$$

Mais, d'un autre côté, 6 est le complément de l'angle désigné par γ au n° 61, page 169. Il vient donc ici, comme au n° 62, page 172,

$$(7). \quad \ldots\ldots \quad \text{tg}\, \gamma = \text{cons}^{\text{te}} = \frac{1}{\text{tg}\, 6}.$$

Ce résultat, évident *à priori* *, caractérise, ainsi qu'on l'a vu au n° 62, la spirale logarithmique

$$r = m . e^{\frac{\theta}{a}}.$$

La constante a est égale à la cotangente de l'angle 6. La con-

* Ce résultat exprime l'invariabilité de l'angle que font entre eux dans la ligne S le rayon vecteur représenté par mn et la tangente en n représentée par la droite OX.

stante m peut être quelconque. Dans tous les cas le pôle est le point décrivant.

96. Nous venons d'établir que toute ligne plane peut être considérée comme étant une roulette du genre cycloïdal. Indiquons deux des propriétés qui appartiennent à ce genre de courbes et qu'il peut être utile de connaître pour certaines applications.

Désignons par S la courbe à laquelle est lié le point décrivant et qui roule sans glisser sur la droite LP.

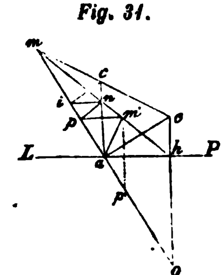


Fig. 31.

Soient m, a, c, trois positions quelconques occupées simultanément, la première par le point décrivant, la seconde par le point de contact des lignes S et LP, la dernière par le centre de courbure qui correspond au point a de la ligne S.

Tirons la droite mc et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en e avec la perpendiculaire élevée en a sur am. Du point e abaissons sur LP la perpendiculaire eh. Le point o où viennent se couper les prolongements des droites eh, ma, est le centre de courbure qui correspond au point m dans la roulette engendrée par ce point.

Soit i la projection du point c sur ma, et n celle du point i sur ac. On a d'abord cette première propriété :

Les points m, n, h, *sont en ligne droite.*

En effet, puisque le point h est la projection du point e sur LP, et que les triangles aeh, icn sont semblables, on a d'abord

$$\frac{ah}{in} = \frac{ae}{ic},$$

et, eu égard au parallélisme des droites ae, ic,

$$\frac{ah}{in} = \frac{ma}{mi}.$$

Cette dernière équation montre évidemment que la droite mn passe par le point h.

Considérons la section conique déterminée par la condition qu'elle ait un foyer en m, qu'elle passe par le point a et qu'elle ait en ce point même direction et même courbure que la ligne S. Si l'on se reporte à la construction du n° 82, page 214, on reconnaît immédiatement que la droite mn est l'axe principal de cette section conique. Veut-on d'ailleurs fixer les valeurs des paramètres désignés par les lettres c et a dans les numéros 57 et 82, pages 155 et 212? En nommant R le rayon de courbure ac, r le rayon vecteur am, et β l'angle mac, il vient, d'après la formule (5) du n° 82, page 214,

$$(1). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad a \, . \, c = \mathrm{R} \cos^3 \beta,$$

et, d'après la formule (1) du n° 58, page 161,

$$(2). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad c = \frac{mn}{r}.$$

On a d'ailleurs, ainsi qu'il est aisé de le voir sur la figure,

$$(3). \quad . \; . \; . \quad mn = \sqrt{r^2 + \mathrm{R}^2 \cos^4 \beta - 2r\mathrm{R} \cos^3 \beta}$$
$$= \sqrt{r^2 \sin^2 \beta + (r - \mathrm{R} \cos \beta)^2 \cos^2 \beta}.\ *$$

De là résulte

$$(4). \quad . \; . \quad c = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 \sin^2 \beta + (r - \mathrm{R} \cos \beta)^2 \cos^2 \beta},$$

et, par suite,

$$(5). \quad . \; . \; . \quad a = \frac{\mathrm{R} r \cos^3 \beta}{\sqrt{r^2 \sin^2 \beta + (r - \mathrm{R} \cos \beta)^2 \cos^2 \beta}}.$$

* La valeur de mn se déduit de la considération du triangle mna, dans lequel on a évidemment

$$an = \mathrm{R} \cos^2 \beta,$$

et

$$\overline{mn}^2 = r^2 + \overline{an}^2 - 2r \, . \, an \, . \cos \beta.$$

La condition $c < 1$ revient, d'après la valeur de c, à

(6). . . . . $R \cos \mathcal{C} < 2r$,

ou

$$ai < 2 . am.$$

Concluons que la section conique déterminée d'après les conditions qui précèdent est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que le rayon vecteur *am* est supérieur, inférieur ou égal à la moitié de la projection du rayon de courbure *ac*.

On peut dire aussi plus simplement que cette section conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que le rayon vecteur *am* est supérieur, inférieur ou égal à la distance *mn*, ou ce qui revient au même, selon que l'angle *mna* est supérieur, inférieur ou égal à l'angle *man*. Cela résulte de l'équation (2).

Par les points *a* et *n* menons les droites *am'*, *np* dirigées de manière à ce que les angles *pam'*, *m'np* ayent pour *bissectrice* la droite *an*, et respectivement limitées, la première à la droite *mh*, la seconde au rayon vecteur *am*. Il est visible que la droite *pm'* est parallèle à LP, que les segments *ap*, *am'* sont égaux et que l'on a

$$\frac{mn}{mm'} = \frac{mi}{mp} = \frac{ma}{ma + am'}.$$

On déduit de là

$$\frac{mi}{ma} = \frac{mp}{ma + am'} = \frac{ma - ap}{ma + am'},$$

ou, remplaçant par r le segment *ma*, et par r' le segment *am'* et son égal *ap*,

(7). . . . . $\frac{mi}{r} = \frac{r - r'}{r + r'}$.

Soit ρ le rayon de courbure *mo*. On a généralement,

$$\rho = \frac{r^2}{mi}.$$

De là résulte en substituant

$$(8). \quad \frac{r}{\rho} = \frac{r - r'}{r + r'},$$

et, par suite,

$$(9). \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = \frac{2}{r + r'}.$$

L'équation (9) exprime, en ce qui concerne les roulettes, une seconde propriété générale qu'on peut énoncer comme il suit :

La somme des valeurs inverses de la normale et du rayon de courbure est égale à deux fois la valeur inverse de la somme des rayons vecteurs r, r'.

97. Substituons à mi sa valeur $r - \mathrm{R}\cos 6$. L'équation (7) donne

$$\mathrm{R} = \frac{2rr'}{(r + r')\cos 6}.$$

Cette expression particulière du rayon de courbure des sections coniques peut s'obtenir directement, soit par le calcul, soit, comme nous l'avons fait ailleurs, * par voie géométrique. On reconnaît que le point m' est le second foyer placé sur l'axe principal mn, en remarquant que la droite ac, normale en a à la ligne S, divise en deux parties égales l'angle mam'. Il s'ensuit que les segments $r = ma$, $r' = m'a$ sont les rayons vecteurs partant des deux foyers pour aboutir au point a.

On observera que l'équation (9) implique la déduction suivante :

Lorsque la courbe roulante S *est une section conique, la roulette engendrée par le foyer de cette courbe est telle que la somme des*

* Théorie géométrique des rayons et centres de courbure.

valeurs inverses de sa normale et de son rayon de courbure est constante pour tous ses points *.

Prenons cette roulette pour ligne méridienne d'une surface de révolution autour de l'axe LP, et admettons, comme nous le ver-

(*) Veut-on exprimer en fonction des quantités r, r' et 6 les paramètres a et c qui déterminent cette section conique? on peut partir de l'équation

$$\frac{mn}{mm'} = \frac{ma}{ma + am'} = \frac{r}{r + r'}.$$

On a d'ailleurs, ainsi qu'on le voit aisément sur la figure,

$$mm' = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r \cdot r' \cdot \cos 26} = \sqrt{(r + r')^2 - 4rr' \cos^2 6}.$$

De là résulte

$$c = \frac{mn}{r} = \frac{mm'}{r + r'} = \sqrt{1 - \frac{4rr' \cos^2 6}{(r + r')^2}},$$

et, par suite,

$$a = \frac{R \cos^2 6}{c} = \frac{(r + r') R \cos^2 6}{\sqrt{(r + r')^2 - 4rr' \cos^2 6}}.$$

On parvient au même résultat en faisant usage de la valeur

$$c = \frac{1}{r} \sqrt{r^2 \sin^2 6 + (r - R \cos 6)^2 \cos^2 6},$$

et de l'équation

$$r - R \cos 6 = r \cdot \frac{r - r'}{r + r'}.$$

On reconnaît aisément que les valeurs des paramètres c et a sont constantes. En effet, puisqu'il s'agit d'une section conique, et que le produit $R \cos^2 6$ n'est autre chose que la projection de la normale an sur le rayon vecteur ma, on a d'abord

$$R \cos^2 6 = \text{const}^{\text{te}}.$$

Il vient ensuite, comme on l'a vu dans la note du n° 57, page 159 :

1° Pour le cas de l'ellipse et de l'hyperbole

$$rr' \cos^2 6 = b'^2 = \text{const}^{\text{te}};$$

2° Pour le cas de la parabole

$$r \cos^2 6 = \frac{a}{2} = \text{const}^{\text{te}}.$$

rons plus loin, que, dans les surfaces de révolution, la courbure moyenne soit mesurée en chaque point par la somme des valeurs inverses de la normale et du rayon de courbure de la section méridienne. La déduction formulée ci-dessus comporte cet autre énoncé :

Lorsque la courbe roulante S *est une section conique, la roulette engendrée par le foyer de cette courbe est la ligne méridienne d'une surface de révolution à courbure moyenne constante.*

Un certain intérêt s'attachant à la détermination des surfaces dont la courbure moyenne est constante, nous allons compléter ce dernier énoncé, en démontrant la réciproque.

Le problème à résoudre se pose dans les termes suivants :

La roulette décrite par le point m est, par hypothèse, la section méridienne d'une surface de révolution ayant la droite LP pour axe et présentant en chacun de ses points une même courbure moyenne. On doit avoir, en conséquence,

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = \text{cons}^{\text{te}}.$$

ou ce qui revient au même, en vertu de l'équation (9) du n° 96, page 245,

$$r + r' = \text{cons}^{\text{te}}.$$

Cela posé, il s'agit de déterminer ce que doit être la ligne roulante S pour donner la roulette cherchée.

Plusieurs cas sont possibles selon que l'angle mna est supérieur, inférieur ou égal à l'angle nam'.

Considérons en premier lieu le cas où l'angle mna est plus grand que l'angle nam', et où, par conséquent, les deux points m, m' sont situés d'un même côté de la droite LP.

La vitesse du point m peut se déduire indifféremment de chacune des deux rotations simultanées établies respectivement, l'une autour du centre instantané a, l'autre autour du centre o de courbure. Si l'on représente par ω la première de ces rotations et par w la seconde, on a, d'abord, et généralement,

$$r\omega = \rho . w,$$

A partir du point a portons sur ao * une longueur ap' égale à r' et tirons la droite $p'm'$. Il est visible que cette droite est perpendiculaire à l'axe LP et que les lieux des points m', p' sont disposés symétriquement par rapport à cet axe, l'un au-dessus, l'autre au-dessous. La conséquence est que les vitesses simultanées des points m', p' ont même grandeur et qu'elles sont dirigées symétriquement par rapport à la droite LP.

La distance mp', égale à la somme $r + r'$, étant, par hypothèse, constante, on voit aisément que, dans la rotation w établie autour du centre o de courbure, le point p' doit être considéré comme fixe sur le rayon om. Il s'ensuit que la vitesse de ce point est perpendiculaire à mo et qu'elle est représentée en grandeur par le produit

$$(\rho - [r + r'])\, w = \left(1 - \frac{r + r'}{\rho}\right) r\omega.$$

On a d'ailleurs, en vertu de l'équation (8) du n° 96, page 245,

$$\left(1 - \frac{r + r'}{\rho}\right) r\omega = r'\omega.$$

De là et de ce qui précède, eu égard à l'égalité des angles Pap', Pam', résulte la déduction suivante:

La vitesse du point m' est perpendiculaire au rayon vecteur am' et représentée en grandeur par le produit $r'\omega$.

On voit ainsi que la vitesse du point m' s'emprunte tout entière à la rotation ω établie autour du centre instantané a, et que, par conséquent, ce point demeure fixe dans le plan de la ligne roulante.

Les points m, m' *étant fixes dans le plan de la ligne* S, *et la somme de leurs distances aux différents points de cette ligne étant constante, il est visible que cette ligne se résout en une ellipse dont les points* m, m' *sont les deux foyers.*

* Voir la figure 31, page 242.

Remarque. — Si les points m, m' se confondaient en un point unique, on aurait $r = r'$, et l'on déduirait de l'équation (9) du n° 96, page 245,

$$\frac{1}{\rho} = 0.$$

L'ellipse S deviendrait un cercle, et la roulette engendrée par le point m une droite parallèle à LP.

Si le point m' se confondait avec le point a et restait ainsi sur la droite LP, on aurait $r' = 0$, et l'on déduirait de l'équation (9) du n° 96, page 245,

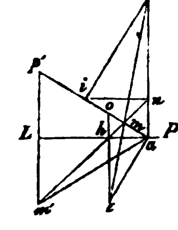
$$\rho = r = \text{cons}^{\text{te}}.$$

L'ellipse S se réduirait au segment rectiligne ma, et la roulette engendrée par le point m à une circonférence de cercle ayant son centre en a sur la droite LP.

Considérons en second lieu le cas où l'angle mna est plus petit que l'angle nam', et où, par conséquent, les points m, m' sont situés l'un au-dessus, l'autre au-dessous de la droite LP.

La disposition que prend la figure montre qu'il faut changer le signe des quantités r' et ρ, ce qui donne pour transformée de l'équation (8) du n° 96, page 245,

Fig. 32.



$$\frac{r}{\rho} = \frac{r' + r}{r' - r},$$

et, pour équation de condition,

$$r' - r = \text{cons}^{\text{te}}.$$

En opérant, comme on l'a fait tout à l'heure, on trouve pour vitesse du point p'

$$(r' - r - \rho)\,w = \left(\frac{r' - r}{\rho} - 1\right) r\omega = r'.\omega.$$

On voit d'ailleurs, de la même façon, que telle est aussi la vitesse du point m', celle-ci étant perpendiculaire au rayon vecteur am' comme la première l'est à la droite ap'.

Il suit de là que les points m, m' sont fixes dans le plan de la ligne S et que la différence de leurs distances aux différents points de cette ligne est constante. *La ligne* S *se résout donc nécessairement en une hyperbole dont les points* m, m′ *sont les deux foyers.*

Considérons en troisième et dernier lieu le cas où les angles mna, nam' sont égaux, et où, par conséquent, le parallélisme des droites mn, am' supprime le point m' en le transportant à l'infini. L'équation (9) du n° 96, page 245, devient, en ce cas,

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{\rho}=o.$$

et l'on en déduit

$$\rho=-r.$$

Il suit d'abord de là que les rotations w et ω sont égales et de sens contraire. La disposition que prend la figure, (le point m étant le milieu de oa) montre ensuite que les angles onm mon sont toujours égaux, et, par conséquent, que la rotation de la droite mn autour du point m n'est autre chose que la rotation ω transportée en ce point. *La conséquence évidente est que la droite* mn *est fixe dans le plan de la ligne* S.

Par le point a menons une parallèle à la droite nh et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en q avec la perpendiculaire abaissée du point m sur la droite LP. Par le point q menons la droite qq' perpendiculaire aux deux parallèles aq, nh.

Fig. 33.

Les points m et q sont disposés symétriquement par rapport à la droite LP. Il en est donc de même de leurs lieux respectifs et, par conséquent aussi, de leurs vitesses simultanées. Or, la vitesse du point m est perpendiculaire au rayon vecteur am. Il faut donc que celle du point q soit perpendiculaire à la droite aq, ce qui revient à dire qu'elle est dirigée suivant la droite qq'.

Concluons que le point q ne sort pas de la droite qq', supposée fixe dans le plan de la ligne S, et que l'on a constamment

$$am=aq.$$

Il suit de là que les différents points de la ligne S sont équidistants d'un point et d'une droite fixes, situés tous deux dans le plan de cette ligne et entraînés par elle dans son roulement sur la droite LP. *La ligne* S *est donc une parabole ayant son foyer au point m* *.

* La roulette décrite en ce cas par le point m est la courbe connue sous le nom de *chaînette.* Elle se caractérise ici par cette circonstance qu'en chacun de ses points il y a toujours égalité entre la normale ma et le rayon de courbure mo. On peut d'ailleurs, au moyen des données précédentes, en opérer très-simplement la rectification et la quadrature.

Soit b le milieu du segment mq, et bu, bu' deux perpendiculaires abaissées de ce point sur les droites ma, mh. On a, d'une part,

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad mu = mu' = \frac{mq'}{2},$$

et, d'autre part,

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad bu = bu' = \frac{qq'}{2}.$$

Or mq' n'est autre chose que le paramètre constant désigné par a aux numéros 37 et 82, pages 155 et 212. Il vient donc d'abord

$$mu = \frac{a}{2} = \text{cons}^{\text{te}}.$$

La propriété exprimée par cette équation peut s'énoncer comme il suit :

La projection de l'ordonnée sur la normale est constante. Elle a pour valeur la moitié du paramètre a, *ou ce qui revient au même, l'ordonnée de la chaînette à son sommet.*

On voit aisément que la vitesse d'écart des points q, q' est égale à deux fois la vitesse du point q ou son égale la vitesse du point m. Mais, d'un autre côté, en vertu de l'équation (2), la vitesse d'accroissement du segment bu est la moitié de celle du segment qq' : elle est donc précisément égale à celle du point m. Cela posé, voici la conséquence évidente :

L'arc de chaînette compris entre son sommet et le point m *a pour longueur rectifiée le segment* bu.

Soit y l'ordonnée mb, σ la longueur de l'arc de chaînette compris entre le

La démonstration qu'il s'agissait de faire se trouve ainsi complétée, et l'on peut dire, en conséquence :

Les roulettes décrites par le foyer de l'une ou l'autre des sections coniques sont les seules lignes qui, dans leur révolution autour d'une droite, puissent engendrer une surface à courbure moyenne constante.

sommet et le point m. Le triangle mbu, rectangle en u, donne immédiatement

$$(3). \quad \ldots \ldots \ldots \quad \sigma = \sqrt{y^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Passons à la quadrature. La vitesse d'accroissement de l'aire décrite par l'ordonnée mb a pour mesure le produit de cette ordonnée par la projection de la vitesse du point m sur la droite LP, ou ce qui revient au même (la vitesse du point m étant perpendiculaire au rayon vecteur am) le produit de cette vitesse par la longueur constante mu. De là résulte, en désignant par A l'aire dont il s'agit,

$$(4). \quad \ldots \ldots \ldots \quad \Delta A = mu \, . \, \Delta\sigma = \frac{a\,\Delta\sigma}{2},$$

et, si l'on preud pour origine le sommet de la chaînette,

$$A = \frac{a}{2}\sigma = \frac{a}{2}\sqrt{y^2 - \frac{a^2}{4}} = mu \, . \, bu.$$

La propriété exprimée par cette équation peut s'énoncer de la manière suivante :

L'aire décrite par l'ordonnée mb, *à partir du sommet de la chaînette jusqu'en* m, *a pour mesure la surface du quadrilatère* bumu'.

Désignons par ρ' le rayon de courbure qui correspond au point o dans la développée de la chaînette, et par v la vitesse du point o sur cette développée. On a d'abord

$$\rho' = \frac{v}{w}.$$

Or, en vertu de l'égalité qui subsiste entre le rayon ρ et la normale ma, il est

Transformation applicable au cas des coordonnées polaires.

98. Considérons, en particulier, le cas où la courbe, dont on cherche le centre et le rayon de courbure en un point quelconque déterminé, est rapportée à un système de coordonnées polaires.

Soit p le pôle; m le point décrivant; v la vitesse actuelle du point m sur la courbe qu'il décrit; mt la direction de cette vitesse. On a généralement

Fig. 34.

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \rho = \frac{v}{w}.$$

visible que la vitesse v est celle du point a sur oa dans la rotation w établie autour du centre o. De là résulte, ainsi qu'on le voit aisément,

$$v = \rho . w . \operatorname{tg} C = oc . w,$$

et, par suite,

$$\rho' = oc. \text{ *}$$

L'inspection du triangle coa donne, en conséquence,

$$R^2 = 4\rho^2 + \rho'^2.$$

Par le point c menons une parallèle à LP et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en k avec le rayon vecteur ao. En désignant par R' le rayon de courbure qui correspond au point c dans la développée de la parabole roulante, on démontre aisément l'égalité $R' = 3ck$. (Voir la note qui suit le n° 126.) Les triangles semblables Koc, coa donnent d'ailleurs

$$\frac{ck}{oc} = \frac{ca}{oa}.$$

De là résulte, en substituant, cette autre relation curieuse

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{3}{2}\,\frac{R}{R'}.$$

* Soit c' le centre de courbure qui correspond au point o dans la développée de la chainette. Le centre c' n'est pas en c, mais bien de l'autre côté du point o à la distance $oc' = oc$.

ρ étant le rayon de courbure cherché pour le point m et w la vitesse angulaire qui anime la directrice de ce point au sortir du lieu qu'il occupe.

Tandis que le point m, *supposé* fixe sur la droite pm, se meut suivant la courbe à décrire, la droite pm tourne autour du point p et glisse en même temps sur elle-même. Désignons par ω la vitesse angulaire qui correspond pour la droite pm aux vitesses actuelles v et w. Le centre instantané de rotation de cette droite est en a, à la rencontre des deux perpendiculaires élevées respectivement, l'une en m sur mt, l'autre en p sur pm. On a donc

$$v = am \, . \, \omega.$$

De là résulte, en désignant par N, comme au n° 61, page 169, la normale am,

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \rho = \frac{\omega}{w} \, . \, \mathrm{N}.$$

L'équation (2) fournit l'énoncé suivant:

Le rayon de courbure est égal au produit de la normale par le rapport des vitesses angulaires qui animent en même temps, l'une le rayon vecteur, l'autre la directrice du point décrivant.

Si d'ailleurs on désigne par r le rayon vecteur pm et par θ l'angle que ce rayon fait avec la normale en m à la courbe décrite, on peut écrire aussi

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \rho = \frac{\omega}{w} \, \frac{r}{\cos \theta}.$$

99. Montrons, par quelques applications, l'usage qu'on peut faire des formules précédentes.

Considérons, d'abord, les sections coniques et commençons par l'ellipse.

Si l'on prend l'un des foyers pour pôle et qu'on désigne par r' le rayon vecteur qui correspond à l'autre foyer, il est visible que

l'égalité, qui subsiste entre les vitesses de glissement du point m sur les deux rayons vecteurs r, r', implique celle des vitesses de circulation qui se composent avec la première pour donner la vitesse v. Il suit de là qu'en désignant par ω', pour le rayon vecteur r', la vitesse angulaire désignée par ω, pour le rayon vecteur r, on a nécessairement

$$(1) \ldots\ldots\ldots \quad r\omega = r'\omega'.$$

Soient f, f' les foyers; mn la normale au point m; θ, α et θ' les angles que les droites mf, mn, mf' font respectivement, d'un même côté avec la droite ff'. La normale mn étant dirigée suivant la bissectrice de l'angle $fmf' = 2\beta$, il vient

Fig. 35.

$$\theta = \alpha - \beta, \quad \theta' = \alpha + \beta.$$

On en déduit

$$\theta + \theta' = 2\alpha.$$

De là résulte évidemment

$$\omega + \omega' = 2w,$$

et, eu égard à l'équation (1),

$$w = \omega \cdot \frac{r + r'}{2r'}.$$

Concluons qu'on peut écrire, d'après l'équation (3) du n° 98,

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad \rho = \frac{2rr'}{(r + r')\cos\beta}.$$

Dans le cas de l'hyperbole, on trouve, en opérant de même,

$$(3) \ldots\ldots\ldots \quad \rho = \frac{2rr'}{(r - r')\cos\beta}.$$

Dans le cas de la parabole, si l'on prend le foyer pour pôle et qu'on trace l'axe principal, on voit immédiatement que l'angle de cet axe avec le rayon vecteur est double de l'angle du même axe avec la normale. On a donc

$$\omega = 2w,$$

et, par conséquent,

$$(4). \quad \dots\dots\dots \quad \rho = \frac{2r}{\cos \zeta}.$$

Il suit de là qu'on peut écrire, en général, pour les trois sections coniques,

$$(5). \quad \dots\dots\dots \quad \rho = \frac{2rr'}{(r + r')\cos \zeta},$$

le rayon r' devenant négatif ou infini, selon que l'on passe du cas de l'ellipse à celui de l'hyperbole ou à celui de la parabole.

En se reportant aux notations du n° 57, page 155, et observant que l'on a, en général,

$$rr' \cos^2 \zeta = \frac{a^2c^2}{1 - c^2}, \qquad r + r' = \frac{2a \cdot c}{1 - c^2},$$

la formule (5) devient

$$\rho = \frac{a \cdot c}{\cos^3 \zeta},$$

résultat identique avec la formule (5) du n° 82, page 214.

100. Spirale logarithmique. — Dans le cas de la spirale logarithmique, le pôle étant le centre autour duquel tourne le rayon vecteur, et l'angle de ce rayon avec la tangente demeurant invariable, on a évidemment

$$\omega = w.$$

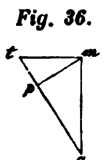
De là résulte, conformément à la formule (2) du n° 98, page 254,

$$\rho = \mathrm{N}.$$

On voit ainsi que le centre de courbure cherché pour le point *m* est précisément en *a* : ce résultat très-simple est évident *à priori*, puisque la directrice et le rayon vecteur constituent un système de forme invariable * et n'ont, en conséquence, à chaque instant, qu'un seul et même centre instantané de rotation.

Si l'on observe que la droite *am* touche en *a* la développée et fait avec le rayon vecteur *pa* un angle *map* toujours égal à l'angle constant *pmt*, on peut en conclure immédiatement que la développée de la spirale logarithmique n'est autre chose que cette même spirale déplacée, d'un certain angle, par rotation autour du pôle *p*. De là se déduit cette autre conséquence:

Fig. 36.



La longueur de l'arc de la spirale logarithmique, compris entre le point m *et le pôle asymptote, est égale à la tangente* mt **.

Il est clair, en effet, que l'arc de la développée compris entre le point *a* et le pôle *p* est égal en longueur à la normale *ma*, ce qui revient identiquement à l'énoncé qui précède.

Spirale d'Archimède. — Dans le cas de la spirale d'Archimède, si l'on désigne, par $u = dr$, la vitesse avec laquelle le rayon vecteur *pm* glisse sur lui-même, et, par γ, l'angle *qmt* que ce rayon fait avec la tangente en *m*, on a d'abord

Fig. 37.

$$\frac{\omega}{u} = \text{cons}^{\text{te}}, \qquad \gamma = \frac{\pi}{2} - \mathcal{C}.$$

* On ne perdra pas de vue qu'en procédant, ainsi qu'on l'a fait au n° 98, on doit considérer la directrice comme entraînée par le point *m* dans son glissement sur la courbe.

** On entend ici par tangente la partie de cette droite, qui se trouve interceptée entre le point *m* et la perpendiculaire élevée en *p* sur le rayon vecteur *pm*.

Il vient ensuite

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{qt}{qm} = r\frac{\omega}{u}.$$

De là résulte, pour la vitesse $d\gamma$ avec laquelle varie l'angle γ,

$$d\gamma = dr.\frac{\omega}{u}\cdot\cos^2\gamma = \omega\sin^2 6.$$

Mais, d'un autre côté, on a évidemment

$$w = \omega + d\gamma = \omega(1 + \sin^2 6).$$

Il vient donc, en dernier lieu,

$$\rho = \frac{N}{1 + \sin^2 6} = \frac{r}{(1 + \sin^2 6)\cos 6}.$$

CHAPITRE V.

1° THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES ENVELOPPES.

Cas général d'une droite ou d'une courbe mobile dans un plan.

101. Considérons d'abord une droite D supposée mobile dans un plan P′, et de direction incessamment variable.

Soient a, a' les positions qu'occupent, à un même instant quelconque, les centres instantanés de rotation et de circulation de la droite D *.

Le lieu des points a' prend le nom d'*enveloppe* par rapport aux positions successives de la droite mobile.

Soient μ, μ' deux points assujettis à coïncider constamment, le

* On sait que le centre a' est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre a sur la droite D.

premier avec le centre a, le second avec le centre a'. Il est visible que la vitesse du point μ' est dirigée tout entière suivant la droite D, le point glissant sur la droite et la droite tournant autour du point, tous deux incessamment. De là résultent les déductions suivantes :

1° *La tangente, en un point de l'enveloppe, n'est autre chose que la droite mobile prise dans la position qui correspond à ce point ;*

2° *Toute courbe peut être considérée comme l'enveloppe de ses tangentes ;*

3° *La développée d'une courbe est l'enveloppe des normales à cette courbe.*

On observera que la vitesse du point μ' résulte, en général, de deux composantes distinctes. L'une est la vitesse de circulation que le point a' emprunte à la rotation établie autour du centre instantané a; l'autre est la vitesse qui anime le point μ perpendiculairement à la droite aa'. Dans le cas particulier où l'enveloppe que l'on considère est celle des normales à une courbe donnée, les centres a, a' se confondent et, des deux composantes, il ne reste que la dernière.

Sans rien changer à ce qui précède, considérons, en second lieu, une courbe quelconque Σ, située dans le plan P', liée à la droite D, et participant avec elle à la rotation établie autour du centre instantané a.

Soit a'' le pied de la perpendiculaire abaissée du centre a sur la ligne Σ.

Le lieu des points a'' *prend le nom* D'ENVELOPPE *par rapport aux positions successives de la courbe mobile.*

Soit μ'' un point mobile, assujetti à coïncider constamment avec le point a''. La vitesse du point μ'' est dirigée tout entière suivant la tangente en a'' à la courbe Σ. De là l'énoncé suivant :

L'enveloppe de la ligne Σ est une ligne qui la touche dans toutes ses positions successives.

On observera que la vitesse du point μ'' résulte, en général, de deux composantes distinctes. Ces composantes sont les vitesses de circulation communiquées au point a'' dans les rotations établies, l'une autour du centre instantané a, l'autre autour du centre de courbure qui correspond au point a'' de la courbe Σ. Ce qui détermine cette deuxième rotation, c'est la condition qu'elle remplit de communiquer au point a la vitesse qui anime le point μ perpendiculairement à la droite aa'' *. On voit d'ailleurs, sans difficulté, que les composantes dont il s'agit proviennent de ce que la ligne Σ glisse et roule en même temps sur son enveloppe. La première composante exprime la vitesse de glissement; la seconde est celle qui résulte du roulement. Cette remarque est générale; elle s'applique au cas d'une droite mobile, comme à celui d'une courbe.

Cas général d'un plan mobile sur lui-même.

102. Imaginons que la droite D des numéros précédents soit liée à un plan P superposé au plan fixe P′, et qu'elle l'entraîne avec elle dans sa rotation autour du centre instantané a. Il y a lieu, en ce cas, de considérer séparément les traces du point μ sur le plan mobile P et sur le plan fixe P′. Soient S la première et S′ la seconde. La rotation établie autour du centre instantané a ne peut altérer en rien la vitesse qui anime le point μ dans le plan P′.

* Tous les points de la figure mobile participent en même temps à la rotation établie autour du centre instantané a.

De là résulte, pour la vitesse totale du point μ'', la première de ses deux composantes.

La droite $\mu\mu''$ est assujettie, en outre, à passer constamment par le point mobile μ et à rester normale à la courbe Σ. Il s'ensuit qu'elle tourne autour du centre de courbure qui correspond au point a'' de la courbe Σ, en empruntant à la vitesse linéaire du point μ la vitesse angulaire de cette rotation.

De là résulte, en conséquence, la deuxième des composantes mentionnée dans le texte.

Cette vitesse est donc aussi celle du point μ dans le plan P. De là résultent les déductions suivantes :

1° *La ligne* S′ *est l'enveloppe des positions successives de la ligne* S;

2° *Le mouvement du plan mobile* P *est le même que si la ligne* S *roulait sans glisser sur la ligne* S′.

Supposons que l'on ait tracé les deux lignes S, S′, et qu'on réalise le mouvement du plan P en faisant rouler la ligne S sur la ligne S′. Prenons égale à l'unité la vitesse angulaire de roulement, et désignons par u la vitesse correspondante avec lesquelles le point μ se meut sur les courbes S, S′.

Soient a la position actuelle du point μ,

a' celle du point μ' sur la droite D,

v la vitesse du point μ',

ab une longueur prise égale à la vitesse u et portée sur la normale commune aux deux lignes S, S′, du même côté que la droite D ou du côté opposé, selon que les deux composantes de la vitesse du point μ' sont de sens contraire ou de même sens.

Fig. 38.

La directrice du point μ' n'étant autre chose que la droite D, et celle-ci tournant, par hypothèse, avec une vitesse angulaire égale à l'unité, le rayon de courbure qui correspond au point a' de l'enveloppe décrite par le point μ' a, pour expression,

$$\rho = v.$$

S'agit-il ensuite des composantes de la vitesse v? Elles sont représentées *en grandeur*, l'une par aa', l'autre par la projection sur aa' de la longueur ab, c'est-à-dire par ae. La conséquence évidente est que le centre de courbure qui correspond au point a' de l'enveloppe se trouve en e sur la circonférence de cercle ayant ab pour diamètre. Ajoutons qu'en désignant par R, R′ les rayons de courbure qui correspondent au point a pour les lignes S, S′,

on a, comme au n° 88, page 227 (la vitesse désignée par ω dans ce numéro étant égale à l'unité),

$$ab = u = \frac{R.R'}{R + R'}.$$

De là résulte le théorème suivant :

Lorsqu'un plan se meut sur lui-même, les enveloppes des droites situées dans ce plan ont toutes à la fois leurs centres de courbure sur une même circonférence de cercle.

Soit a la position du centre instantané de rotation à l'instant que l'on considère, u la vitesse de ce centre au sortir du lieu qu'il occupe, ω la vitesse angulaire simultanée du plan mobile. On peut ajouter ce qui suit :

La circonférence dont il s'agit touche en a *la droite suivant laquelle est dirigée la vitesse* u. *Elle a pour diamètre le rapport* $\frac{u}{\omega}$.

Supposons le mouvement du plan mobile déterminé par celui d'un cercle au rayon R situé dans ce plan et roulant sans glisser sur un cercle fixe au rayon R'. Il vient alors

$$\frac{u}{\omega} = \frac{RR'}{R + R'},$$

et l'on a cet autre théorème :

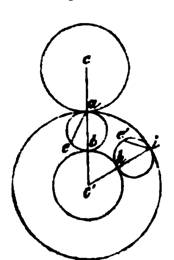
Les enveloppes des droites situées dans le plan mobile ont toutes pour développée une même épicycloïde, occupant une même position ou des positions différentes, selon que les droites considérées sont ou non parallèles.

Cette épicycloïde est engendrée par un point de la circonférence qui a pour diamètre $\frac{RR'}{R+R'}$ *et qui roule sans glisser sur un cercle fixe, concentrique au cercle* R', *et ayant lui-même pour rayon* $\frac{R'^2}{R+R'}$.

Ce second théorème peut se démontrer comme il suit :

Soient c, c' les centres des cercles aux rayons R, R'; a le point où le contact subsiste à l'instant que l'on considère; ab le diamètre de la circonférence sur laquelle les enveloppes des droites situées dans le plan P ont leurs centres de courbure; D une quelconque de ces droites; ae la perpendiculaire abaissée du point a sur la droite D.

Fig. 39.



On a, d'après ce qui précède,

$$ab = \frac{RR'}{R + R'}.$$

On sait, en outre, que le centre de courbure, situé sur la droite ae pour l'enveloppe des positions successives de la droite D, ou de toute autre droite de même direction, est en e à la rencontre de la circonférence décrite sur ab comme diamètre.

Soient i une deuxième position du point a; h la position correspondante du point b; ie', $c'i$ celles des droites ae, $c'a$. L'angle $ac'i$ a pour mesure $\frac{ai}{R'}$: celui dont les droites D et ae tournent simultanément, dans le passage de la première position à la seconde, est égale à la somme $\frac{ai}{R'} + \frac{ai}{R}$*. La différence de ces angles est $\frac{ai}{R}$: elle exprime l'excès de l'angle $e'ih$ sur l'angle eab. Il suit de là que l'arc he' est plus grand que l'arc be de la longueur

$$(1). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad ab \cdot \frac{aa'}{R} = aa' \cdot \frac{R'}{R + R'}$$

* Si le point a restait fixe sur le cercle mobile et qu'on le transportât en i, (le contact subsistant en i comme en a) le cercle mobile tournerait de l'angle $\frac{ai}{R'}$. Mais il y a roulement, sans glissement. Il faut donc que le point a supposé fixe sur le cercle mobile recule, relativement au point i, d'un arc égal en longueur à l'arc ai. De là résulte une deuxième rotation exprimée angulairement par $\frac{ai}{R}$.

Cela posé, décrivons la circonférence de cercle ayant son centre en c', et $c'b$ pour rayon. On a

$$(2) \quad . \quad . \quad c'b = R' - ab = R' - \frac{RR'}{R + R'} = \frac{R'^2}{R + R'} \cdot$$

et, par suite,

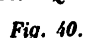
$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad bh = aa' \cdot \frac{c'b}{R'} = aa' \cdot \frac{R'}{R + R'} \cdot$$

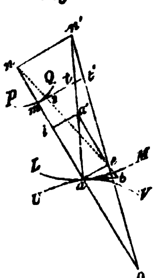
Les équations (1) et (3) montrent que le déplacement du point e s'effectue comme s'il était fixe sur la circonférence aeb, et que celle-ci roulât sans glisser sur la circonférence décrite du point c' comme centre avec $c'b$ pour rayon. De là résulte évidemment le théorème énoncé ci-dessus.

Rayon de courbure de l'enveloppe d'une courbe qui se meut dans son plan, sans changer de forme. Glissement de la courbe mobile sur son enveloppe.

103. Étant donnée une courbe quelconque Σ, supposée de forme invariable et mobile dans son plan, proposons-nous de déterminer le rayon de courbure de l'enveloppe et le mouvement relatif de la courbe mobile.

Soit PQ une position quelconque de la ligne Σ. Le mouvement de cette ligne peut être considéré comme résultant du roulement d'une courbe S, représentée par LM, sur une courbe S′ représentée par UV, la ligne Σ étant liée à la courbe mobile S et la courbe S′ étant fixe.


Fig. 40.



Soit a le centre instantané de rotation; ab la tangente commune aux courbes LM, UV; aa' la perpendiculaire élevée en a sur ab; a' le centre instantané de roulement; R, R′ les rayons de courbure des courbes LM et UV pour le point a.

L'on a, généralement *,

$$aa' = \frac{RR'}{R + R'}.$$

Abaissons du point a sur la courbe PQ une normale am, et prolongeons cette normale jusqu'en n, centre de courbure correspondant de la ligne PQ. L'enveloppe de la ligne Σ est le lieu des points m.

Par le point a' menons une parallèle à ma, et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en b avec la droite ab. En n élevons sur an une perpendiculaire et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en n' avec la droite aa'.

Dans la rotation établie autour du centre instantané a les vitesses simultanées des points a' et n sont respectivement proportionnelles aux rayons vecteurs aa', an. Il s'ensuit que si l'on prend ab pour grandeur de la première, la seconde est représentée par nn'. En effet, les triangles aba', $nn'a$ sont semblables et donnent, en conséquence,

$$\frac{ab}{nn'} = \frac{aa'}{an}.$$

La vitesse nn' est la vitesse totale du point n de la normale am**. D'un autre côté, nous avons vu (n° 87, page 223) que la vitesse ab du centre instantané de roulement coïncide en grandeur ainsi qu'en direction avec la vitesse du centre instantané a. Si donc on abaisse

* Si la courbe UV tournait sa concavité du côté de la ligne LM, on devrait changer le signe du rayon de courbure R' et écrire en conséquence

$$ab = \frac{RR'}{R' - R}.$$

** Le point n se distingue des autres points de la normale am en ce que sa vitesse s'emprunte tout entière à la rotation établie autour du centre instantané a. Pour les autres points, il faut tenir compte, en outre, de la rotation simultanée établie autour du centre de courbure n.

du point a sur $a'b$ la perpendiculaire ae, il est visible que cette perpendiculaire représente en direction, sens et grandeur la vitesse du point de la normale am qui se trouve actuellement en a.

Cela posé, il ne reste plus qu'à tirer la droite $n'e$ et qu'à prolonger cette droite ainsi que la normale ma jusqu'à leur rencontre en o.

Le point o *ainsi déterminé est en même temps le centre de courbure de la trajectoire du point* n *et de l'enveloppe décrite par le point* m.

Il est bien entendu qu'on comprend ici par *trajectoire du point* n, la trajectoire que ce point décrirait s'il devenait fixe par rapport à la ligne Σ et qu'il fût entraîné par elle dans son déplacement continu.

Par le point m menons la droite mtt' perpendiculaire à ma. La vitesse qui anime ce point sur l'enveloppe qu'il décrit est représentée par mt'. Celle qui anime le point de la ligne PQ actuellement en m est représentée par mt. Telle est donc aussi la vitesse actuelle du glissement de la courbe Σ sur son enveloppe. Il s'ensuit que la quantité tt' exprime la vitesse actuelle du point m sur la ligne PQ, ou, ce qui revient au même, la vitesse qui résulte pour le point m du roulement de la ligne PQ sur son enveloppe. Pour obtenir directement cette dernière vitesse, il suffit de tirer la droite ne. Le segment ms intercepté sur mt est précisément cette vitesse, ainsi que nous l'avons exposé au n° 101, page 260, et qu'on le voit d'ailleurs directement. On vérifie, sans difficulté, que l'on a, d'après la figure,

$$ms = tt'.$$

Soit i la projection du centre instantané de roulement sur le rayon vecteur am, et ρ' le rayon de courbure de la trajectoire du point n. On a, d'après la formule (3) du n° 88, page 227,

$$\rho' = \frac{\overline{an}^2}{ni}.$$

De là résulte, en désignant par ρ le rayon de courbure cherché pour le point *m* de l'enveloppe,

$$(1) \ldots\ldots\ldots \rho = \frac{\overline{an}^2}{ni} - mn.$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{ms}{ae} = \frac{mn}{an}, \qquad \frac{a'i}{mt} = \frac{ai}{am};$$

d'où, multipliant membre à membre, et observant que les longueurs *ae*, *a'i* sont égales,

$$(2) \ldots\ldots\ldots \frac{ms}{mt} = \frac{ai \,.\, mn}{an \,.\, am}.$$

Les équations (1) et (2) résolvent la question proposée.

Extension générale au cas d'une ligne qui change en même temps de position et de forme.

104. Soit E une courbe mobile dans son plan et de forme incessamment variable. Prenons un point quelconque *m*, *supposé fixe sur la ligne* E, et désignons par *mt* une droite assujettie à rester tangente en *m* à la courbe mobile.

Quels que soient, à un même instant quelconque, l'état de mouvement du point *m* et celui de la tangente *mt*, ils déterminent un centre instantané de rotation qui leur correspond, et si l'on distingue dans la ligne E le changement de forme du changement de position, *on peut considérer celui-ci comme résultant tout entier de la rotation établie autour de ce centre. Imaginons que l'on procède ainsi.* La ligne E subit deux modifications distinctes et simultanées. En vertu de la première, elle tourne autour du centre instantané, sans changer de forme et comme si elle était liée invariablement à la droite *mt* : en vertu de la seconde,

elle se déplace par rapport à la droite *mt* considérée comme fixe, et dans ce déplacement elle ne cesse pas de toucher cette droite au point *m*.

Cela posé, soit μ un point assujetti à se mouvoir sur la ligne E. Les données qui précèdent impliquent évidemment la déduction suivante :

Le point μ *sortant du lieu* m, *à l'instant que l'on considère, sa vitesse est la même que si la ligne* E *persistait dans sa forme actuelle.*

S'agit-il ensuite de la directrice du point μ? Elle tourne, par rapport à la tangente *mt*, avec une certaine vitesse angulaire. Cette vitesse, lorsqu'il n'y a pas de changement de forme, résulte exclusivement de la vitesse du point μ sur la ligne E et de la courbure affectée en *m* par cette ligne. Elle ne dépend, en aucune façon, de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle la courbure de la ligne E peut varier au delà du point *m*. Mais, d'un autre côté, s'il y a changement de forme, à partir de l'instant où le point μ sort du lieu *m*, ce changement n'a d'autre effet, par rapport aux parties de la courbe E situées au delà du point *m*, que de modifier la rapidité plus ou moins grande avec laquelle leur courbure varie à partir de ce point. Or, cette rapidité plus ou moins grande ne peut affecter en rien la vitesse qui anime la directrice du point μ au sortir du lieu *m*. De là donc résulte cette autre déduction :

Le point μ *sortant du lieu* m, *à l'instant que l'on considère, sa vitesse et la rotation de sa directrice sont les mêmes que si la ligne* E *persistait dans sa forme actuelle.*

Lorsqu'une ligne E, mobile dans son plan et de forme invariable, sort du lieu qu'elle occupe, il arrive, en général, pour un ou plusieurs de ses points, que leurs vitesses actuelles sont dirigées tangentiellement à ce lieu. Cette circonstance, qui nous est déjà connue, peut se présenter de la même manière lorsque la ligne E se déplace en changeant de forme. Raisonnons dans cette hypo-

thèse, et, s'il est plusieurs points qui satisfassent, en même temps, à la condition précédente, bornons-nous à considérer l'un d'entre eux en excluant les autres par la suppression des parties de la ligne E qui leur correspondent.

Plaçons-nous à un instant quelconque. En désignant par m le point de la ligne E que l'on considère et dont la vitesse actuelle est dirigée tangentiellement à cette ligne, on a la définition suivante :

Le lieu des points m *est l'enveloppe des positions successives de la ligne* E, *cette ligne étant mobile dans son plan, et de forme constante ou incessamment variable.*

Soit μ un point assujetti à coïncider constamment avec le point m. La vitesse du point μ résulte à chaque instant de deux composantes distinctes. La première de ces composantes est la vitesse du point m considéré comme fixe sur la ligne E : *elle est dirigée tangentiellement au lieu occupé par cette ligne à l'instant que* l'on considère. La seconde est la vitesse qui provient du déplacement du point m sur la ligne E : *elle est la même que si la ligne* E *persistait dans sa forme actuelle;* elle a donc même direction que la tangente en m. De là se déduisent immédiatement les conséquences suivantes :

La vitesse du point μ est dirigée tout entière suivant la tangente en m *à la ligne* E.

L'enveloppe de la ligne E *touche cette ligne dans toutes ses positions.*

Cette propriété de l'enveloppe est caractéristique. Elle suffit, dans tous les cas, à la détermination de cette ligne.

Imaginons qu'on connaisse, à un instant quelconque, le lieu occupé par la ligne E, la position du point m, la vitesse de ce point considéré comme fixe sur la ligne E, la vitesse angulaire correspondante de la tangente en m. Soient u la première de ces vitesses,

et ω la seconde. Le centre instantané qui leur correspond est situé sur la normale en m, à la distance

$$ma = \frac{u}{\omega}.$$

On voit d'ailleurs aisément dans quel sens il faut porter cette longueur, le point a devant être tel qu'en le prenant pour centre, la rotation établie autour de ce point communique au point m sa vitesse actuelle u.

Cela posé, si l'on distingue dans la ligne E le changement de forme du changement de position et qu'on détermine celui-ci comme résultant tout entier de la rotation ω établie autour du centre instantané a, on peut faire abstraction de l'autre en ce qui concerne la courbure de l'enveloppe au point m, et appliquer les déductions du n° 103, page 266, de la même manière que si la ligne E conservait en réalité la forme qu'elle affecte à l'instant que l'on considère. Cette conséquence se déduit immédiatement du principe énoncé ci-dessus, dans les termes suivants :

Le point μ sortant du lieu m, *à l'instant que l'on considère, sa vitesse et la rotation de sa directrice sont les mêmes que si la ligne* E *persistait dans sa forme actuelle.*

2° THÉORIE ANALYTIQUE DES ENVELOPPES.

—

105. Soit

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(x, y, \alpha) = 0,$$

l'équation d'une ligne plane Σ, rapportée à des axes coordonnés quelconques et dépendante d'un paramètre α dont on dispose entre certaines limites.

A chaque valeur du paramètre α correspond une détermination particulière de la ligne Σ, et, en outre, celle d'un point a'' situé

à la fois sur cette ligne et sur l'enveloppe de ses positions successives. Il suit de là que les coordonnées du point a'' sont fonction du paramètre α. Réciproquement le paramètre α est fonction de ces coordonnées, ce qui implique la conséquence suivante : *L'équation* (1) *peut être considérée comme représentant l'enveloppe, pourvu qu'on y remplace α par une fonction convenable des coordonnées* x *et* y.

Cela posé, suivant que le point a'' est pris sur la ligne Σ ou sur l'enveloppe, la tangente en ce point est déterminée par l'équation différentielle

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right) dy = o,$$

ou par cette autre équation

$$(3) \quad \ldots \quad \left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right) dy + \left(\frac{d\mathrm{F}}{d\alpha}\right) d\alpha = o.$$

Or, on sait que la ligne Σ doit toucher en a'' l'enveloppe de ses positions successives. Il faut donc que les équations (2) et (3) donnent une seule et même valeur pour le rapport $\frac{dy}{dx}$. De là résulte nécessairement

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha} = o.$$

L'équation (4) détermine la relation qui fait dépendre α des coordonnées x, y. Jointe à l'équation (1), elle représente l'enveloppe des positions successives de la ligne Σ, ce qui revient à dire que, pour avoir l'équation de cette enveloppe, il suffit d'éliminer α entre les équations (1) et (4).

On parvient au même résultat en procédant comme il suit :

Concevons un point μ'' assujetti à décrire la ligne Σ et sortant du lieu a'' à l'instant que l'on considère. Soient x, y les coordonnées de ce point. La direction de sa vitesse actuelle est donnée par l'équation (2), ou par l'équation (3), selon que la ligne Σ con-

serve une seule et même détermination, ou qu'au contraire elle passe d'une détermination à une autre.

Mais si le point a'' appartient à l'enveloppe des positions successives de la ligne Σ, la vitesse du point μ'' doit avoir même direction dans chacune des deux hypothèses précédentes. Il faut donc que les équations (2) et (3) subsistent en même temps. Cette conséquence conduit, comme tout à l'heure, à la solution cherchée.

106. Veut-on procéder directement, sans s'appuyer sur la théorie géométrique développée dans les numéros qui précèdent? Voici comment on peut s'y prendre.

Étant donnée l'équation

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F(x, y, \alpha) = o.$$

Elle représente une courbe qui change en général de forme et de position, en même temps qu'on fait varier le paramètre α. Soit Σ cette courbe; μ un point assujetti à la décrire; x, y les coordonnées de ce point.

La direction suivie par le point μ, à un instant quelconque, est détermine, par l'équation différentielle

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy = o,$$

ou par cette autre équation

$$(3) \quad \ldots \quad \left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) d\alpha = o,$$

selon que la ligne Σ persiste dans sa détermination actuelle, ou qu'au contraire elle passe de cette détermination à une autre.

Posons

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dF}{d\alpha} = o.$$

Les équations (1) et (4) subsistant ensemble, chaque valeur du

paramètre α fixe, en général *, la position d'un point déterminé de la ligne Σ. Soient a'' ce point et μ'' un point mobile assujetti à coïncider constamment avec le point a'', tandis que le paramètre α varie incessamment.

Le point a'' se déplace, en général, sur la ligne Σ en même temps que cette ligne change de forme et de position. Il s'ensuit que le point μ'' se meut sur cette ligne avec une certaine vitesse. D'après ce qui précède, la direction de cette vitesse est donnée par l'équation (3), ou ce qui revient au même, par l'équation (2), puisqu'en vertu de l'équation (4) les équations (2) et (3) fournissent une seule et même valeur pour le rapport $\frac{dy}{dx}$. Mais d'un autre côté, l'équation (2) fixe pour le point a'' la direction qu'affecte actuellement en ce point la tangente à la ligne Σ. On voit donc que le point μ'' se meut suivant la direction de cette tangente et qu'en conséquence il a pour trajectoire une ligne qui touche en a'' chacune des positions successives de la ligne Σ.

La trajectoire du point μ'' est le lieu des points a''. Considérée par rapport aux positions successives de la ligne Σ, elle prend le nom d'enveloppe. Son équation résulte de l'élimination du paramètre α entre les équations (1) et (4). Cela revient à dire que l'équation de l'enveloppe est

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(x, y, \alpha) = o,$$

le paramètre α étant une fonction des variables x, y, déterminée par l'équation de condition

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = o.$$

On ne perdra pas de vue que l'existence de l'enveloppe est subordonnée à la condition que les équations (1) et (4) fournissent, pour chacune des valeurs attribuées successivement au paramètre α, une détermination correspondante du point désigné par a''.

* Cette condition pourrait n'être pas remplie, comme on le voit, par exemple, dans le cas d'une droite qui se meut sans changer de direction. Les déductions suivantes cesseraient alors d'être applicables.

Applications.

107. Soit d'abord à déterminer l'enveloppe des normales à une courbe plane. Nous savons déjà que cette enveloppe n'est autre chose que la courbe désignée sous le nom de développée. On a, d'ailleurs, pour équation générale de la normale,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (t - x)\,dx + (u - y)\,dy = o.$$

De là résulte, en différenciant par rapport aux variables x, y, et considérant comme constantes les coordonnées courantes t et u,

$$(2). \quad . \quad . \quad (t - x)\,d^2x + (u - y)\,d^2y = dx^2 + dy^2.$$

Les équations (1) et (2) subsistant avec le même sens qu'au n° 78, page 206, il est clair qu'elles déterminent en même temps les centres de courbure de la courbe dont on considère les normales, et le lieu de ces centres, c'est-à-dire l'enveloppe des normales ou la développée.

Si l'on différencie l'équation (1) par rapport à toutes les variables qu'elle renferme, il vient, eu égard à l'équation (2),

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dtdx + du\,.\,dy = o.$$

En opérant de même sur l'équation

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \rho^2 = (t + x)^2 + (u - y)^2,$$

qui donne le rayon de courbure en fonction des coordonnées x, y, t, u, on a

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \rho d\rho = (t - x)\,dt + (u - y)\,du.$$

Désignons par σ l'arc de la développée et posons, en conséquence,

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad d\sigma = \sqrt{dt^2 + du^2} = dt\sqrt{1 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2}$$

La comparaison des équations (1) et (3) donne

$$\frac{du}{dt} = \frac{u-y}{t-x}.$$

Cette valeur transportée dans les équations (5) et (6) conduit, d'une part, à

$$d\rho = \frac{dt}{\rho} \frac{(t-x)^2 + (u-y)^2}{(t-x)} = \frac{\rho dt}{t-x},$$

d'autre part, à

$$d\sigma = dt \frac{\sqrt{(t-x)^2 + (u-y)^2}}{t-x} = \frac{\rho dt}{t-x}.$$

On a donc

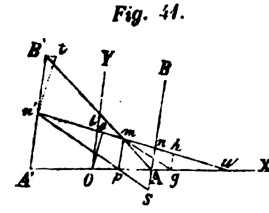
$$d\rho = d\sigma,$$

et, par suite, ainsi que nous le savions déjà,

$$\Delta\rho = \Delta\sigma.$$

108. Soient A, A′ deux points pris respectivement sur deux droites fixes et parallèles AB, A′B′; soit en outre nn' une transversale quelconque assujettie à la condition d'intercepter des segments An, A′n' dont le produit demeure invariable.

Fig. 41.



Plaçons l'origine en O, milieu de AA′, et prenons pour axes coordonnés, d'une part, la droite AA′, d'autre part, une parallèle aux droites AB, A′B′.

Si nous désignons par α le segment An, par b'^2 le produit An. A′n', supposé constant, et par a' la distance OA, il est aisé de voir que la transversale nn' a, pour équation générale,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{(\alpha^2 - b'^2)x + (\alpha^2 + b'^2)a'}{2\alpha a'}.$$

Cherchons l'enveloppe des droites représentées par l'équation (1). En égalant à zéro la dérivée du second membre, prise par rapport au paramètre α, l'on trouve

$$(2)\ldots\ldots\qquad \alpha^2 = \frac{a'-x}{a'+x}b'^2.$$

De là résulte

$$\alpha^2 - b'^2 = -2.\frac{b'^2x}{a'+x}, \qquad \alpha^2 + b'^2 = 2\frac{a'b'^2}{a'+x},$$

et, substituant,

$$a'\alpha y = b'^2(a'-x).$$

Élevons au carré et remplaçons α^2 par sa valeur. Il vient

$$(3)\ldots\ldots\qquad \frac{y^2}{b'^2} + \frac{x^2}{a'^2} = 1.$$

On voit, par là, que l'enveloppe cherchée est une ellipse rapportée à son centre et ayant pour diamètres conjugués les segments $2a'$, $2b'$ dirigés respectivement l'un suivant AA', l'autre parallèlement aux droites AB, A'B'.

Pour passer du cas de la figure à celui où le segment $A'n'$ serait porté en sens contraire, il suffit de changer le signe de la quantité b'^2. L'ellipse trouvée pour enveloppe, dans le premier cas, est remplacée, dans le second, par une hyperbole.

Soit λ l'angle des axes OX, OY, et 6 celui que la transversale nn' fait avec l'axe des x. On a, généralement,

$$\frac{\sin 6}{\sin(\lambda - 6)} = \frac{\alpha^2 - b'^2}{2\alpha a'}.$$

Différenciant et posant $\alpha = b'$ dans le résultat de la différenciation, on trouve

$$(4)\ldots\ldots\ldots\qquad d6 = \frac{\sin\lambda}{a'}d\alpha.$$

En opérant de même sur la valeur

$$x = \frac{b'^2 - \alpha^2}{b'^2 + \alpha^2} a',$$

qui se déduit de l'équation (2), on a

$$(5). \quad \ldots\ldots\ldots \quad dx = \frac{a'}{b'} d\alpha.$$

Désignons par ρ le rayon de courbure qui correspond au point de l'ellipse situé à l'extrémité du diamètre b'. On a, d'après ce qui précède, et comme il est aisé de le voir,

$$(6). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \rho = \frac{dx}{d6} = \frac{a'^2}{b' \sin \lambda}.$$

De là résulte

$$(7). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \rho \sin \lambda = \frac{a'^2}{b'}.$$

Or $\rho \sin \lambda$ est la projection du rayon ρ sur l'axe OY. On a donc l'énoncé suivant, lequel s'applique en même temps à l'ellipse et à l'hyperbole :

Étant donnés deux demi-axes quelconques a', b', *conjugués entre eux, le rayon de courbure, qui correspond à l'extrémité de l'axe* b', *a pour projection sur cet axe le segment* $\frac{a'^2}{b'}$.

Reprenons ce problème en le traitant par voie géométrique.

Lorsque la transversale nn' sort du lieu qu'elle occupe, le produit des segments An, A'n' demeure constant. Il s'ensuit que les vitesses des points n, n' sur les droites AB, A'B' sont de signe contraire et qu'elles conservent entre elles le même rapport que les segments An, A'n'. Prenons le segment nA pour vitesse actuelle du point n sur la droite BA. La vitesse simultanée du point n' sur la droite A'B' sera représentée par le segment n'B' $=$ A'n'.

Les vitesses nA, $n'B'$ résultant de la rotation de la droite nn' autour de son centre instantané de circulation, la conséquence est que ce centre se trouve actuellement en m à la rencontre des droites nn', AB'. On sait d'ailleurs que le lieu des points m est l'enveloppe des positions successives de la droite nn'.

Soient $y = mp$, $x = Op$ les coordonnées du point m. Si l'on tire la droite $n'p$ et qu'on la prolonge jusqu'en s, à sa rencontre avec la droite BA, il est visible que le segment As est égal au segment An, ce qui détermine la droite $n's$ et par suite le point p où cette droite vient couper la droite AA'. On a, d'une part,

$$(8). \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{A'B'}{AA'} . (a' - x) = \frac{a' - x}{a'} A'n',$$

et, d'autre part,

$$(9). \quad . \quad . \quad . \quad y = \frac{sn}{AA'} (a' + x) = \frac{a' + x}{a'} . An.$$

Multiplions, membre à membre, les équations (8), (9) et remplaçons par b'^2 le produit constant $An.A'n'$. On trouve ainsi, pour équation de l'enveloppe,

$$\frac{y^2}{b'^2} + \frac{x^2}{a'^2} = 1.$$

S'agit-il ensuite de la courbure en m? Cherchons d'abord la vitesse v du point m sur la tangente nn', en observant qu'elle résulte de celle du point p situé à la rencontre de la droite mobile $n's$ avec la droite fixe AA'.

La vitesse du point n' sur A'B' est $n'B'$. Celle du point s sur sB est sA. Il s'ensuit que celle de l'intersection de la droite $n's$ avec la droite mp, *supposée fixe* est pm, et qu'en conséquence la vitesse du point p sur AA' est representée par pg, la droite mg étant parallèle à $n's$ *.

* Concevons la perpendiculaire élevée en p sur $n's$ et désignons-la par P. La projection de la vitesse pm sur la droite P est la vitesse de circulation du point p de la droite $n's$. Si la vitesse pg était connue, sa projection sur la

Par le point g menons la droite gh parallèle à pm. Si la droite nn' était fixe, la vitesse pg du point p sur AA' donnerait mh pour vitesse du point m sur $n'n$. Ce résultat n'est pas changé par la rotation de la droite nn' autour du point m. On a donc, en premier lieu,

$$v = mh.$$

Soit, en second lieu, w la vitesse angulaire avec laquelle la droite nn' tourne autour du point m. Si par les points n', B' on mène deux droites, l'une $B't$ parallèle à nn', l'autre $n't$ normale à la première, il vient

$$w = \frac{n't}{mn'}.$$

De là résulte, en désignant par ρ le rayon de courbure cherché pour le point m,

$$\rho = \frac{v}{w} = \frac{mh.mn'}{n't}.$$

Appliquons cette formule au cas où les segments An, $A'n'$ étant tous deux égaux à b', le point m est le milieu de la droite nn'. Les droites nn', AA' sont alors parallèles, et il en est de même des droites AB', sn'. Il suit de là que les segments mh, mn' sont tous deux égaux à a' et que le segment $n't$ est la projection du demi-axe b' sur la normale en m à la droite nn'. On a donc

$$mh = mn' = a', \qquad n't = b' \sin \lambda,$$

et l'on en déduit par substitution

$$\rho \sin \lambda = \frac{a'^2}{b'}.$$

Ce résultat est la reproduction de la formule (7). Il comporte le même énoncé.

droite P donnerait cette même vitesse de circulation. Il suit évidemment de là que les extrémités des vitesses pm, pg sont situées sur une même droite mg, menée par le point m parallèlement à la droite $n's$.

Le parallélisme existant, par hypothèse, entre les droites nn', AA', on a, en désignant par p la distance de ces droites,

$$p = b' \sin \lambda,$$

et, par suite,

$$(10). \qquad p.\rho = a'^2.$$

La propriété exprimée par l'équation (10), n'est qu'une autre forme de celle que nous avons formulée ci-dessus comme interprétation de l'équation (7). On peut l'énoncer comme il suit :

Le produit du rayon de courbure par la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente est égal au carré du demi-diamètre parallèle à cette même tangente *.

* Reprenons la formule générale

$$(1). \qquad \rho = \frac{mh \cdot mn'}{n't},$$

et prolongeons la droite $n'n$ jusqu'à sa rencontre en u avec la droite OX. Le parallélisme établi d'une part entre les droites $n'p$, mg, d'autre part entre les droites mp, gh donne

$$(2). \qquad \frac{mn'}{n'u} = \frac{mh}{mu}.$$

On a, d'ailleurs, ainsi qu'on le voit aisément sur la figure,

$$(3). \qquad \frac{n'u}{nn'} = \frac{A'n'}{A'n' - An} = \frac{mn'}{nn' - mn} = \frac{mn'}{2mi}.$$

La combinaison des équations (2) et (3) donne

$$(4)\ mh.mn' = 2.mi.mu.\frac{mn'}{nn'} = 2.mi.mu\,\frac{A'n'}{A'n' + An} = mi.mu.\frac{A'n'}{Oi}.$$

Soit Oe la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite nn'. Les triangles $n'B't$, Oie sont semblables et l'on a, en conséquence,

$$\frac{n't}{Oe} = \frac{n'B'}{Oi} = \frac{A'n'}{Oi}.$$

109. Soient deux droites fixes An, An' et une transversale nn' assujettie à détacher un triangle Ann' de surface constante. On demande l'enveloppe des positions successives de la droite nn'.

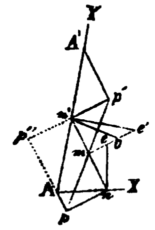


Fig. 42.

Plaçons l'origine en A, et prenons pour axes coordonnés les droites AnX, An'Y. En désignant par α le segment An' et par c^2 le produit constant des segments An, An', on a A$n = \frac{c^2}{\alpha}$. L'équation générale de la droite nn' est, en conséquence,

$$(1). \quad \ldots\ldots \quad y = \alpha - \frac{\alpha^2}{c^2} x = \alpha\left(1 - \frac{\alpha x}{c^2}\right).$$

Prenons la dérivée du second membre par rapport à α et égalons cette dérivée à zéro. Il vient ainsi

$$(2). \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2\alpha x = c^2.$$

De là résulte en substituant dans les équations (4) et (1)

$$(5). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \rho = \frac{mi \, . \, mu}{Oe}.$$

L'équation (5) exprime la propriété suivante que l'ellipse et l'hyperbole présentent en chacun de leurs points :

Le produit du rayon de courbure par la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente est égal au produit des segments interceptés sur la tangente entre le point de contact et deux axes quelconques conjugués.

Si l'on rapproche l'équation (5) de l'équation (10) établie dans le texte (la grandeur représentée par p n'étant autre que la perpendiculaire Oe), on a

$$mi \, . \, mu \, . = a'^2.$$

On est ainsi ramené à cette propriété connue de l'ellipse et de l'hyperbole:

Le produit des segments interceptés sur une même tangente entre le point de contact et deux axes quelconques conjugués est constant. Il a pour expression le carré du demi-axe parallèle à la tangente.

Au lieu de procéder, comme nous venons de le faire, par voie de déductions successives, on peut établir *à priori* cette dernière propriété, et remonter à la précédente en se fondant sur l'équation (10).

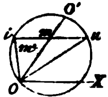
L'élimination de la quantité z entre les équations (1) et (2) donne, pour équation de l'enveloppe cherchée,

$$(3) \ldots\ldots\ldots \quad xy = \frac{c^2}{4},$$

c'est-à-dire une hyperbole rapportée à son centre et à ses asymptotes.

Soient O le centre d'une ellipse; m un point de la courbe; imu la tangente en ce point; OX une parallèle à cette tangente; b' le demi-axe Om; a' son conjugué.

Fig. 41bis.



L'équation de l'ellipse, rapportée aux axes $2a'$, $2b'$, est

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

Soit m' un point quelconque pris sur la courbe. La droite Om' a, pour équation,

$$x = \frac{x'}{y'} y,$$

x', y' étant les coordonnées du point m'.

La droite Om' coupe en i la tangente im, et il suffit de poser $y = b'$, pour avoir immédiatement

$$mi = \frac{x'}{y'} b'.$$

Soit Ou l'axe conjugué avec Oi. Cet axe est parallèle à la droite qui touche l'ellipse en m'. Son équation est, en conséquence,

$$\frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} = 0.$$

De là résulte, en posant comme tout à l'heure $y = b'$,

$$mu = \frac{a'^2}{b'} \frac{y'}{x'}.$$

Les valeurs trouvées pour mi et mu donnent, ainsi qu'il s'agissait de le démontrer,

$$mi.mu = a'^2.$$

Soit λ l'angle des axes AX, AY et 6 celui que la tangente nn' fait avec l'axe des x. On a

$$\frac{\sin 6}{\sin(\lambda - 6)} = -\frac{\alpha^2}{c^2},$$

Le reste s'achève de lui-même.

Considérons la circonférence de cercle circonscrite au triangle iOu et prolongeons la droite Om jusqu'à sa rencontre en O' avec cette circonférence. On a

$$Om . mO' = mi . mu = a'^2,$$

et, par conséquent aussi,

$$mO' = \frac{a'^2}{b'} = \text{const}^{\text{te}}.$$

De là, cette autre propriété, commune à l'ellipse et à l'hyperbole et s'appliquant à une tangente quelconque déterminée :

Si l'on prolonge l'axe qui va du centre au point de contact jusqu'à sa rencontre avec la circonférence de cercle menée par le centre et par les points où la tangente vient couper deux axes quelconques conjugués, ce prolongement a pour longueur constante la projection du rayon de courbure sur l'axe dont il s'agit.

Soient, a, b les axes principaux, a étant celui qui coïncide en direction avec la ligne des foyers. Eu égard à la relation connue, $a.b = p\,a'$, l'équation (10) devient

$$\rho = \frac{a'^3}{a.b}.$$

Soit N la partie de la normale interceptée entre le point m et l'axe principal a. En désignant par N' la projection constante de cette normale sur le rayon vecteur focal et par 6 l'angle que ce rayon fait avec la normale, on a, comme on l'a vu précédemment,

$$\rho = \frac{N'}{\cos^3 6}.$$

La combinaison des deux dernières équations conduit à la relation

$$a' \cos 6 = \sqrt[3]{a.b.N'} = \text{const}^{\text{te}}.$$

et l'on en déduit

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\mathrm{\beta} = -\frac{2x\,d\alpha}{c^2}\,\frac{\sin^2(\lambda-\mathrm{\beta})}{\sin\lambda}.$$

L'équation (2) donne de même

$$dx = -\frac{x}{\alpha}\,d\alpha,$$

et, par suite, en désignant par ds la différentielle de l'arc de l'enveloppe,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ds = \frac{x}{\alpha}\,\frac{\sin\lambda}{\sin(\lambda-\mathrm{\beta})}\,d\alpha.$$

De là résulte, pour le rayon de courbure qui correspond au point de l'enveloppe situé sur la tangente nn',

$$\rho = \frac{ds}{d\mathrm{\beta}} = -\frac{c^2x}{2\alpha^2}\,\frac{\sin^2\lambda}{\sin^3(\lambda-\mathrm{\beta})}.$$

Soit m le point dont il s'agit : l'équation (2) montre qu'il est le

Il suffit, d'ailleurs, de transporter le point m à l'extrémité du demi-axe a pour reconnaître que l'on peut écrire plus simplement

$$a'\cos\mathrm{\beta} = \text{const}^{\text{e}} = b.$$

Cette dernière propriété comporte l'énoncé suivant :

Si l'on porte sur la normale une longueur égale au demi-axe qui lui est perpendiculaire et qu'on projette cette longueur sur le rayon vecteur mené par l'un des foyers, la projection est constamment égale au demi-axe principal b.

On parvient au même résultat en faisant usage de la relation

$$N' = \frac{b^2}{a}.$$

milieu du segment nn'. Remplaçons x par $\frac{An}{2}$, $\frac{c^2}{\alpha}$ par An et α par An'. Il vient,

$$\rho = -\frac{An^2 \sin^2\lambda}{4An' \sin^3(\lambda - 6)}.$$

On a d'ailleurs, ainsi qu'on le voit aisément,

$$An = -nn'.\frac{\sin(\lambda - 6)}{\sin\lambda}, \quad An' = nn'\frac{\sin 6}{\sin\lambda}.$$

On peut donc écrire aussi

$$(6)\ldots\ldots \quad \rho = -\frac{nn'.\sin\lambda}{4\sin 6 \sin(\lambda - 6)}.$$

Par les points n, n', m menons trois droites respectivement perpendiculaires, l'une ne à AX, l'autre $n'e'$ à Ay, la troisième mee' à nn'. On a

$$me = -\frac{nn'}{2}\cot 6, \quad me' = -\frac{nn'}{2}\cot(\lambda - 6),$$

et, désignant par o le milieu de l'intervalle ee',

$$(7)\ mo = -\frac{nn'}{4}.[\cot 6 + \cot(\lambda - 6)] = -\frac{nn'\sin\lambda}{4\sin 6 \sin(\lambda - 6)}.$$

La comparaison des équations (6) et (7) montre que le centre de courbure cherché pour le point m est en o, au milieu de l'intervalle intercepté sur la normale me par les deux perpendiculaires ne, $n'e'$.

Reprenons ce problème en le traitant par voie géométrique.

La surface du triangle Ann' demeurant constante, le produit des longueurs An, An' reste invariable. Il s'ensuit, comme dans le cas du n° 108, page 277, que les vitesses actuelles des points n, n' sur les droites An, An' peuvent être représentées simultanément, l'une par nA, l'autre par n'A' $=$ n'A.

Par les points n, n' menons les droites np, $n'p'$ perpendiculaires à nn', et par les points A, A' les droites Ap, A'p' parallèles à nn'. Les vitesses des points n,n' ont, pour composantes normales à nn', les longueurs évidemment égales np, $n'p'$. Les composantes de ces mêmes vitesses parallèles à nn' sont, d'ailleurs, représentées par les segments pA, p'A' et l'on a visiblement

$$pA + p'A' = nn'.$$

Il suit de là que le point m, déterminé par l'intersection des droites nn', pp', est en même temps le milieu de la droite nn' et le point de contact de cette droite avec son enveloppe.

Cette détermination du point m étant générale, on en déduit, pour équation de l'enveloppe,

$$x \cdot y = \frac{An \cdot An'}{4} = \frac{c^2}{4}.$$

On en conclut, ensuite, que la vitesse de ce point sur la droite nn' est égale à la demi-somme des vitesses pA et p'A'. On a donc, en désignant par v cette vitesse,

$$v = \frac{nn'}{2} = mn'.$$

On a, d'ailleurs, pour la vitesse angulaire de la droite nn' autour du point m,

$$w = \frac{n'p'}{mn'}.$$

Désignons par o le point situé à la rencontre des droites mo, $n'o$, menées perpendiculairement, l'une sur nn', l'autre sur pp'. Les angles $n'mp'$, $n'om$ étant égaux, on a

$$\frac{mn'}{mo} = \frac{n'p'}{mn'} = w.$$

Soit ρ le rayon de courbure qui correspond au point m de l'enveloppe. On déduit immédiatement de ce qui précède

$$(8). \quad \rho = \frac{v}{w} = \frac{\overline{mn'}^2}{n'p'} = mo.$$

Le point o est donc le centre de courbure cherché pour le point m.

Les triangles men, npA ayant leurs trois côtés respectivement perpendiculaires, donnent

$$(9). \quad \frac{me}{mn} = \frac{\mathrm{A}p}{np}.$$

On a de même, en comparant entre eux les triangles $m'e'n'$, $p'\mathrm{A}'n'$,

$$(10). \quad \frac{me'}{mn'} = \frac{\mathrm{A}'p'}{n'p'}.$$

Or $mn = mn'$, $np = n'p'$ et $\mathrm{A}p + \mathrm{A}'p' = 2mn'$, il vient donc, en ajoutant, membre à membre, les équations (9) et (10),

$$\frac{me + me'}{mn'} = 2\frac{mn'}{n'p'}.$$

De là résulte, eu égard à l'équation (8),

$$\frac{me + me'}{2} = \frac{\overline{mn'}^2}{n'p'} = mo.$$

Ce qui montre que le centre de courbure o divise en deux parties égales le segment ee'.

Cette solution très-simple s'étend d'elle-même au cas général où la ligne considérée est l'enveloppe des positions d'une corde assujettie à détacher d'une courbe quelconque un segment d'aire constante. La seule modification consiste en ce que les tangentes menées à la courbe aux extrémités de la corde se substituent aux droites An, An'.

En effet, puisque la vitesse avec laquelle s'engendre l'aire décrite par un segment de droite est égale au produit de ce segment par la vitesse de circulation de son point milieu, il s'ensuit que cette vitesse doit être nulle. Or cette condition implique comme conséquences toutes les déductions qui précèdent. L'enveloppe est donc le lieu géométrique des positions que prend successivement le milieu de la corde mobile. La courbure en chaque point se détermine ensuite, comme on l'a vu tout à l'heure.

110. Soient AX, AY deux axes coordonnés rectangulaires, et nn' un segment de droite intercepté par ces axes. Le segment nn' étant supposé mobile et de grandeur constante, on demande de déterminer l'enveloppe de ses positions successives.

Fig. 43.

En désignant par c la longueur constante nn' et par α le paramètre variable An', on a pour équation générale de la droite nn'

$$(1)\ldots\ldots\quad y=\alpha\left[1-\frac{x}{\sqrt{c^2-\alpha^2}}\right].$$

Prenons la dérivée, par rapport à α, de la fonction y, et égalons cette dérivée à zéro. On trouve ainsi

$$(2)\ldots\ldots\quad c^2x=(c^2-\alpha^2)^{\frac{3}{2}},$$

et, par suite,

$$(3)\ldots\ldots\quad \alpha=c\sqrt{1-\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

La combinaison des équations (1) et (2) donne d'abord

$$(4)\ldots\ldots\quad y=\frac{\alpha^3}{c^2},$$

et, eu égard à l'équation (5),

$$(5). \quad \ldots\ldots \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Cette dernière équation est celle de l'enveloppe cherchée.

Soit m le point de l'enveloppe situé sur la droite nn'. Les coordonnées de ce point sont, respectivement,

$$y = \frac{\alpha^3}{c^2} = \frac{An'^3}{nn'^2}, \qquad x = \frac{(c^2-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{c^2} = \frac{An^3}{nn'^2}.$$

Désignons par θ l'angle Ann', et par m' le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur le segment nn'. On a, d'après la figure,

$$\sin\theta = \frac{\alpha}{c}, \qquad m'n' = \alpha \sin\theta, \qquad mn \,.\, \sin\theta = y.$$

De là résulte, en substituant,

$$(6). \quad \ldots\ldots\ldots \; mn = \frac{\alpha^2}{c} = m'n'.$$

La différentiation des valeurs trouvées pour $\sin\theta$ et pour x donne

$$d\theta = \frac{d\alpha}{c \,.\, \cos\theta}, \qquad dx = \frac{3\alpha\sqrt{c^2-\alpha^2}}{c^2}\, d\alpha.$$

On en déduit, pour la différentielle de l'arc de l'enveloppe,

$$ds = \frac{dx}{\cos\theta} = \frac{3\alpha\sqrt{c^2-\alpha^2}}{c^2 \,.\, \cos\theta}\, d\alpha,$$

et, pour le rayon de courbure qui correspond au point m,

$$(7). \quad \rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{3\alpha\sqrt{c^2-\alpha^2}}{c} = 3 \,.\, \frac{An \,.\, An'}{nn'} = 3 \,.\, Am'.$$

Reprenons ce problème en le traitant par voie géométrique.

Le rectangle $nAn'a$ étant achevé, il est visible que le point a est le centre instantané de rotation de la droite nn'.

Soit m le pied de la perpendiculaire abaissée du point a sur la droite nn'. Le point m étant le centre instantané de circulation de cette droite, il s'ensuit que le lieu des points m est l'enveloppe cherchée. On a, d'ailleurs,

$$mn = m'n'.$$

De là résulte, d'après la figure et les notations précédentes,

$$(8). \quad . \ y = mn \cdot \sin 6 = m'n' \sin 6 = An' \sin^2 6 = \frac{An'^3}{c^2}.$$

On trouve de même

$$(9). \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad x = \frac{An^3}{c^2}.$$

Il vient donc pour équation de l'enveloppe

$$\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{An'^2 + An^2}{c^2} = 1.$$

Prenons nA pour vitesse du point n sur la droite AX, et représentons par $n'h$ la vitesse simultanée du point n' sur la droite AY *. La longueur nn' étant constante, les points n, n' peuvent être considérés comme fixes sur la droite nn'. Il s'ensuit que leurs vitesses de glissement sont égales.

Par le point A menons une parallèle à nn, et désignons par e le pied de la perpendiculaire abaissée du point n sur cette parallèle. Les vitesses de glissement et de circulation du point n sont représentées respectivement l'une par eA, l'autre par ne.

Tirons la droite em et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en l

* On verra plus loin comment le point h se trouve déterminé par les constructions ultérieures.

avec la perpendiculaire élevée en n' sur nn'. Il est visible que la vitesse de circulation du point n' est représentée par $n'l$, et sa vitesse de glissement par le segment lh qui joint le point l au point h. Or, nous savons déjà que ce segment doit être égal et parallèle à eA. Il faut donc que la droite eml soit parallèle à l'axe AY, ce qui fournit un second moyen de déterminer le point m, et implique les conséquences suivantes :

Le point a se déplaçant avec les points n, n', les composantes de sa vitesse actuelle sont respectivement, l'une an', l'autre $n'h$. Il s'ensuit que cette vitesse est représentée par ah.

Soit aq la projection de la vitesse ah sur une droite menée par le point a parallèlement à nn'. Cette projection est la composante parallèle à nn' de la vitesse du centre instantané a. On a, d'ailleurs, en désignant par i le point d'intersection des droites $n'l$ et aq,

$$aq = ai + iq = mn' + hl = 2mn'.$$

La vitesse que le point m emprunte à la rotation établie autour du centre instantané a est la vitesse de glissement des différents points de la droite nn', c'est-à-dire eA ou mn'.

Soit v la vitesse actuelle qui anime le point m dans la description de l'enveloppe. On a, d'après ce qui précède,

$$v = mn' + aq = 3mn'.$$

La partie de la vitesse v qui s'emprunte à la rotation établie autour du centre instantané a est, ainsi qu'on le voit, le tiers de cette même vitesse. La conséquence est que le centre de courbure cherché pour le point m se trouve en o sur la normale ma, à la distance $mo = 3am$. On a donc

(10). . . . . $\rho = 3am,$

et ce résultat concorde évidemment avec celui de la formule (7).

Tirons la diagonale Aa et désignons par b son point milieu. Si nous traçons les deux circonférences de cercle, dont l'une a ba pour diamètre, et l'autre Aa pour rayon, il est visible que le point m est situé sur la première de ces circonférences. D'un autre côté, l'angle abm est double de l'angle aAn. On voit donc aussi que l'arc

Fig. 44.

$$am = ab \,.\, \widehat{abm} = 2ab \,.\, \widehat{aAn} = Aa \,.\, \widehat{aAn}$$

a même développement que l'arc

$$aX = Aa \,.\, \widehat{aAn}.$$

Il suit de là que *l'enveloppe déterminée ci-dessus est l'épicycloïde engendrée par le point* m *dans le roulement de la première circonférence sur la seconde.* Il suffit, d'ailleurs, de se reporter à l'équation de cette courbe pour se rendre compte du motif qui l'a fait désigner sous le nom d'*épicycloïde elliptique.*

Reportons-nous à la formule (10) du n° 86, page 225,

$$\rho = 2\frac{m-1}{m-2}r.$$

On a ici, $m = 4$, et $r = ma$. De là résulte, en substituant,

$$\rho = 3ma.$$

111. Soient pe, nb deux droites rectangulaires se coupant en n et liées invariablement l'une à l'autre. Le point n étant assujetti à décrire la spirale d'Archimède dont le pôle est en p, et la droite pe à passer par ce pôle, on demande de déterminer l'enveloppe des positions successives de la droite nb *.

Procédons simplement par voie géométrique.

* Cette enveloppe est la spirale employée pour enrouler la chaîne des ponts levis dans le système du capitaine Derché.

Assujettie à passer par le point fixe p, la droite pe tourne autour de ce point et glisse en même temps sur elle-même. Soient ω sa vitesse angulaire et u la vitesse de glissement correspondante. On a, par hypothèse,

$$\frac{u}{\omega} = \text{const}^{\text{te}} = c.$$

Désignons par o la position qu'occupe, à un instant quelconque déterminé, le centre instantané de rotation de la droite pe. On sait que la rotation ω est établie autour de ce centre et qu'elle communique au point p de la droite pe la vitesse actuelle u. Il s'ensuit que le point o est situé sur la droite menée par le pôle perpendiculairement à pe, et que l'on a

Fig. 45.

$$po = \frac{u}{\omega} = c.$$

Mais, d'un autre côté, les droites pe, nb sont liées invariablement l'une à l'autre. Elles ont donc, à chaque instant, même centre instantané de rotation.

Soit m le pied de la perpendiculaire abaissée du centre o sur la droite nb. Le point m est le centre instantané de circulation de cette droite et l'on a

$$mn = po = c.$$

ce qui montre que le point m est fixe sur la droite nb.

L'enveloppe cherchée étant le lieu des points m, on voit aisément qu'elle a pour développée le lieu des points o. Il est clair, en effet, que, dans la description de l'enveloppe, le point m a pour vitesse totale celle qu'il emprunte à la rotation établie autour du centre instantané o. Ce résultat peut s'énoncer comme il suit:

L'enveloppe cherchée est la développante du cercle décrit du point p *comme centre avec un rayon égal au rapport constant* $\frac{u}{\omega}$.

Caustiques.

112. Considérons les courbes désignées sous le nom général de *caustiques* et occupons-nous, d'abord, des caustiques par réflexion.

Soient p un point et AB une courbe situés dans un même plan. Du point p partent dans toutes les directions des droites pn. Ces droites viennent rencontrer la courbe AB et sont renvoyées par elle suivant des directions np' supposées telles qu'en représentant par nc la normale au point d'incidence n, les angles pnc, $p'nc$ soient égaux entre eux. Cela posé, on demande de déterminer l'enveloppe des rayons réfléchis np', et c'est à cette enveloppe qu'on donne le nom de *caustique par réflexion*.

Soient c le centre de courbure qui correspond au point n de la courbe AB; q, q' les pieds des perpendiculaires abaissées du point c sur les droites np, np'. On a, généralement,

$$(1)\ldots\ldots\quad nq = nq', \qquad cq = cq'.$$

Prenons le segment qc pour vitesse de circulation du point q dans la rotation de la droite pn autour du point p. *La vitesse du point* q' *dans la rotation de la droite* np' *autour de son centre instantané de circulation sera représentée par* q'c.

Fig. 46.

Tirons la droite pc et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en e avec la perpendiculaire élevée en n sur le rayon pn. Le segment ne sera la vitesse de circulation du point n de la droite pn.

Soient nb la tangente en n à la courbe AB, et b le point de cette tangente qui se projette en e sur ne. Le segment nb est la vitesse actuelle du point n sur la courbe AB.

Projetons le point b en e' sur la droite ne' menée par le point n perpendiculairement au rayon réfléchi np'. *Le segment* ne' *est la vitesse de circulation du point* n *de la droite* np'.

Cela posé, il est visible qu'il suffit de tirer la droite ce' pour

avoir en m', à la rencontre de cette droite avec le rayon réfléchi np', le centre instantané de circulation de ce même rayon.

Concluons que *l'enveloppe cherchée est le lieu des points* m'.

On observera que l'égalité des angles cnp, cnp' implique celle des angles bne, bne' et, par suite aussi, celle des segments ne, ne'.

Prolongeons la droite cq d'une longueur égale qc' et tirons la droite $c'e$, qui vient couper en m le rayon incident pn. Il est aisé de voir que le point m divise le segment nq de la même manière que le point m' divise le segment nq'. On a donc

$$(2). \quad \ldots\ldots\ldots \quad nm = nm',$$

et, en même temps,

$$(3). \quad \ldots\ldots \quad \frac{mn}{mq} = \frac{ne}{cq} = \frac{pn}{pq} = \frac{pn}{pn - nq}.$$

De là résulte

$$(4). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{mn}{nq} = \frac{pn}{2pn - nq}.$$

Nommons R le rayon de courbure cn, θ l'angle pnc, et λ le rayon vecteur np. Il vient, en substituant,

$$(5). \quad \ldots\ldots \quad nm' = nm = \frac{\lambda R \cos\theta}{2\lambda - R\cos\theta}.$$

113. Supposons, pour cas particulier, que la ligne AB soit une circonférence de cercle et que le point p soit situé sur cette circonférence.

Il est aisé de voir que le point e, devenu fixe, se trouve à l'extrémité du diamètre pc, que le segment qc' est la moitié de la corde ne, et qu'en conséquence le point m tombe aux deux tiers de nq, ou, ce qui revient au même, au tiers de np. Soit np' le rayon réfléchi : on a

$$nm' = nm = \frac{np}{3}.$$

La formule (3) du n° 112, où l'on doit remplacer $R \cos \theta$ par $\frac{\lambda}{2}$, conduit au même résultat

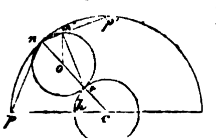
$$nm' = nm = \frac{\lambda}{3}\cdot$$

Soit i le point où la perpendiculaire élevée en m' sur np' vient couper la droite cn : on a évidemment

$$ni = 2 . ci.$$

Décrivons avec le rayon ci deux circonférences de cercle ayant respectivement pour centres, l'une le point c, l'autre le point o, milieu de ni. Il est visible que les angles au centre ich, nom' sont égaux entre eux * et que leur égalité implique celle des arcs hi, nm'. Cela posé, voici la conséquence :

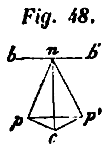
Fig. 47.



Le lieu des positions du point m' *est l'épicycloïde engendrée par ce point dans le roulement du cercle au rayon* oi *sur le cercle égal au rayon* ci.

Au lieu d'une circonférence de cercle, prenons, pour ligne AB, une spirale logarithmique, et plaçons le point p au pôle. On sait que, dans cette courbe, le rayon vecteur pn coupe la tangente en n sous un angle constant. Il s'ensuit que l'angle pnp' reste toujours le même et qu'on peut, en conséquence, considérer le rayon réfléchi comme lié invariablement en n au rayon incident. Cela posé, rappelons-nous, conformément aux déductions du n° 100, page 256, que le centre de courbure c se trouve à la rencontre de la normale nc avec la perpendiculaire élevée en p sur le rayon vecteur pn, et que, d'ailleurs, il se confond avec le centre instan-

Fig. 48.



* Les cordes np, np' étant égales et le point m' situé au tiers de la corde np' comme le point o l'est au tiers du rayon cn, on voit aisément que les angles nom', ncp, sont nécessairement égaux.

tané de rotation du système invariable formé par les deux droites np, np'. Il suit de là que le centre instantané de circulation de la droite np' est en p', à la rencontre de cette droite avec la perpendiculaire abaissée sur elle du point c, ou, ce qui revient au même, avec la perpendiculaire abaissée du point p sur cn.

L'enveloppe cherchée étant ici le lieu des points p', * il est visible que la droite np' qui la touche en p' fait avec le rayon vecteur pp' un angle constant, égal à l'angle pnb. La conséquence est que *cette enveloppe coïncide avec la spirale donnée, lorsqu'on a fait tourner celle-ci d'un certain angle autour du pôle* p.

114. Plaçons-nous dans l'hypothèse où les rayons incidents pn sont tous parallèles entre eux. Les vitesses de circulation représentées ci-dessus par qc, ne étant égales, le point m' se trouve au milieu du segment nq'. Cela revient à l'énoncé suivant :

Dans le cas du parallélisme des rayons incidents, le point m' *s'obtient en projetant orthogonalement sur le rayon réfléchi le milieu du rayon de courbure qui correspond au point d'incidence.*

La formule (5) du n° 112 se réduit ici à la forme très simple

$$nm' = \frac{R \cos \theta}{2}.$$

De là résulte, en général,

$$d(nm') = \frac{d\theta}{2}\left[\frac{dR}{d\theta}\cos\theta - R\sin\theta\right].$$

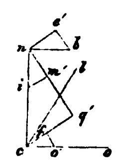
Soit cl la direction des rayons incidents. (Voir fig. 49, page suivante.) Les angles ncl, cnm' sont égaux entre eux et à θ. Il s'ensuit qu'en désignant par w la vitesse angulaire de la droite nm', on a

(1). . . . . $w = 2 . d\theta.$

* Les deux points, que nous avons désignés généralement, l'un par m', l'autre par q', se confondent ici avec le point p'.

La vitesse du point n sur la ligne AB étant représentée par $nb = R.d\theta$, sa composante suivant nq' est

Fig. 49.



$$e'b = nb \,.\, \sin\theta \,. = R \,.\, d\theta \,.\, \sin\theta.$$

En soustrayant de cette vitesse, supposée commune à tous les points de la droite nq', la vitesse exprimée par la différentielle $d(nm')$ on a la vitesse absolue v, qui anime le point m' dans la description de l'enveloppe cherchée *. On trouve ainsi

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad v = \frac{d\theta}{2}\left[3R\sin\theta - \frac{dR}{d\theta}\cos\theta\right].$$

Désignons par ρ le rayon de courbure de cette enveloppe au point m', et par $R' = \frac{dR}{d\theta}$ celui qui correspond au point c de la développée de la ligne AB. La combinaison des équations (1) et (2) donne, généralement,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad \rho = \frac{v}{w} = \frac{1}{4}[3R\sin\theta - R'\cos\theta],$$

et, pour le cas particulier où la ligne AB est une circonférence de cercle,

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \rho = \frac{3}{4}R\sin\theta = \frac{3}{4}cq'.$$

Soit o le centre de courbure qui correspond au point c de la développée de la ligne AB. Tirons la droite co, prenons en o' le tiers de co et projetons le point o' en f sur cq'. Il vient

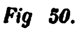
$$cf = c'o \,.\, \cos\theta = \frac{co}{3}\cos\theta = \frac{R'\cos\theta}{3},$$

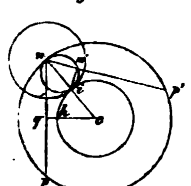
* Il est aisé de voir que la partie de la vitesse $d(nm')$, qui correspond à $R = \text{const}^{te}$, est de même sens que la vitesse $e'b$.

et, par suite,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \rho = \frac{3}{4}[cq' - cf] = \frac{3 . fq'}{4}.$$

Considérons en particulier le cas où la ligne AB est une circonférence de cercle. Soit pn la direction du rayon incident, et np' celle du rayon réfléchi. Le point m' est la projection sur np' du milieu i de cn.





Décrivons deux circonférences de cercle, l'une sur ni pris pour diamètre, l'autre ayant son centre en c et ci pour rayon.

L'égalité des angles pnc, cnp' implique celle des angles nim', ncq dans les triangles qui sont désignés respectivement par ces mêmes lettres et qui sont rectangles, l'un en m', l'autre en q.

Cela posé, si l'on observe que le rayon du cercle $nm'i$ est moitié de ci, il est aisé de voir que les arcs nm' et hi sont égaux entre eux. De là résulte la déduction suivante :

Le lieu des points m' *est l'épicycloïde engendrée par ce point dans le roulement du cercle au diamètre* ni, *sur le cercle au rayon* ci.

On sait, d'ailleurs, que le diamètre ni et le rayon ci sont tous deux égaux à la moitié du rayon cn ou R.

En appliquant ici la formule (9) du n° 86, page 223,

$$\rho = 2\frac{m+1}{m+2}r.$$

Il faut poser $m = 2$ et $r = m'i = \frac{R}{2}\sin\theta$. On trouve ainsi, conformément à ce qui précède,

$$\rho = \frac{3}{2}r = \frac{3}{4}R\sin\theta.$$

115. Les caustiques par réfraction diffèrent des caustiques par réflexion en ce que le rayon renvoyé par la courbe est situé, par rapport à la normale, du même côté que le rayon incident, et que, au lieu d'être égaux, les sinus des angles cnp', cnp conservent entre eux un rapport constant, moindre ou plus grand que l'unité.

Cela posé, si l'on procède comme au n° 112, page 294, sans rien changer d'ailleurs aux notations, on a, d'abord,

$$\frac{cq'}{cq} = \text{cons}^{\text{te}} = l.$$

S'agit-il, ensuite, de la détermination géométrique du point de l'enveloppe situé sur le rayon np'? Elle s'effectue de la même manière, et en employant littéralement la même rédaction qu'au n° 112. De là résulte, en conséquence,

Fig. 51.

$$\frac{m'n}{m'q'} = \frac{ne'}{cq'} = \frac{ne}{cq'} \cdot \frac{nq'}{nq} = \frac{ne \,.\, \sqrt{1 - l^2 \sin^2 \theta}}{l \,.\, \mathrm{R} \,.\, \sin\theta \cos\theta},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{m'n}{m'n - \mathrm{R}\sqrt{1 - l^2 \sin^2\theta}} = \frac{\lambda \sqrt{1 - l^2 \sin^2 \theta}}{l \cos\theta \,.\, [\lambda - \mathrm{R}\cos\theta]}.$$

On en déduit, d'ailleurs, pour le cas général,

$$m'n = \frac{\mathrm{R}\lambda[1 - l^2 \sin^2\theta]}{\lambda\sqrt{1 - l^2\sin^2\theta} - l\cos\theta\,[\lambda - \mathrm{R}\cos\theta]},$$

et, pour le cas où les rayons incidents conservent tous une seule et même direction,

$$m'n = \frac{\mathrm{R}(1 - l^2\sin^2\theta)}{\sqrt{1 - l^2\sin^2\theta} - l\cos\theta}.$$

116. Cherchons, pour dernière application, l'enveloppe d'un

cercle variable rapporté à des axes coordonnés rectangulaires et déterminé par l'équation

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad y^2 + (x-\alpha)^2 - m\alpha = f(x, y, \alpha) = 0.$$

En égalant à zéro la dérivée $f'\alpha(x, y, \alpha)$, on trouve

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x - \alpha + \frac{m}{2} = 0.$$

Éliminons α entre les équations (1) et (2). Il vient ainsi

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y^2 = mx + \frac{m^2}{4}.$$

et cette équation, qui représente une parabole, est celle de l'enveloppe cherchée.

On observera que les valeurs de l'ordonnée y deviennent imaginaires pour des valeurs négatives de l'abscisse x supérieures en grandeur absolue à la quantité $\frac{m}{4}$, ou, ce qui revient au même, pour des valeurs du paramètre α inférieures à cette même quantité. Cela tient à ce que les cercles successifs représentés par l'équation (1) deviennent intérieurs l'un à l'autre pour toute valeur du paramètre α inférieure à $\frac{m}{4}$, et qu'ils cessent ainsi d'avoir aucun point où la direction tangentielle soit indépendante de la variabilité de ce paramètre.

Reprenons ce problème en le traitant par voie géométrique.

Soient c le centre du cercle variable et R son rayon. (Voir fig. 52, page suivante.) Le centre c glissant sur la droite OX avec la vitesse $d\alpha$, on a, généralement,

$$R^2 = m\alpha,$$

et, par suite,

$$dR = \frac{m}{2R} \cdot d\alpha.$$

Prenons la vitesse $d\alpha$ égale à R. La vitesse dR sera constante et égale à $\frac{m}{2}$.

Soit *ama'* une position quelconque déterminée du cercle variable. Sur le rayon *ca* pris pour diamètre traçons une circonférence de cercle *aec*; prenons la corde *ce* égale à $\frac{m}{2}$ et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en *m* avec la circonférence *ama'*.

Fig 32.

Considéré comme restant à la fois sur la droite *ce* et sur la circonférence *ama'*, le point *m* a pour composantes de sa vitesse actuelle :

1° Une vitesse $d\alpha$ représentée en direction, sens et grandeur par $ac = \mathrm{R}$;

2° Une vitesse $d\mathrm{R}$ représentée en direction, sens et grandeur par $ce = \frac{m}{2}$;

3° Une vitesse perpendiculaire à *cm* et due tout entière à la rotation de la droite *ce* autour du point *c*.

La droite *ae* représente en direction, sens et grandeur la résultante des vitesses $d\alpha$ et $d\mathrm{R}$: elle est d'ailleurs perpendiculaire à *ce*.

Ces diverses données conduisent à la déduction suivante :

Le point *m* est tel qu'en le supposant fixe sur le cercle variable, sa vitesse actuelle est dirigée tangentiellement au lieu occupé par ce cercle.

Il suit de là que l'*enveloppe cherchée est le lieu des points* m.

Soit $y = mp$ l'ordonnée du point *m*, et $x = Op$ son abscisse. On a évidemment

$$cp = ce = \alpha - x.$$

On a, de même,

$$y^2 + (\alpha - x)^2 = \mathrm{R}^2 = m\alpha.$$

Il vient donc, en éliminant α,

$$y^2 = mx + \frac{m^2}{4},$$

et telle est l'équation de l'enveloppe cherchée.

L'exemple que nous venons de traiter est un de ceux dans lesquels on peut procéder, tout d'abord, en distinguant le changement de forme du changement de position. Pour isoler le premier en le séparant du second, il suffit de considérer le centre c comme fixe, tandis que le rayon R varie avec la vitesse dR. Pour isoler le second en le séparant du premier, il suffit de considérer le rayon R comme constant, tandis que le centre c glisse sur la droite OX avec la vitesse $d\alpha$.

Partant de là, et opérant, comme nous l'avons fait ci-dessus, il est aisé de déterminer les vitesses actuelles de chacun des points du cercle variable, et par conséquent aussi de reconnaître que, parmi ces points, les seuls dont la vitesse soit dirigée tangentiellement au lieu occupé par ce cercle sont, d'une part le point m, d'autre part le point situé symétriquement au-dessous de l'axe OX.

CHAPITRE VI.

POINTS SINGULIERS.

---

117. Points multiples. — On désigne sous le nom de *points multiples* les points où passent en même temps plusieurs branches d'une courbe et où, par conséquent, plusieurs tangentes distinctes correspondent, *en général*, à une seule et même détermination des coordonnées courantes.

Imaginons qu'on puisse distinguer les différentes branches d'une même courbe et les représenter chacune isolément par une équation particulière; les solutions communes à deux quelconques de ces équations correspondent à des points multiples et réciproquement.

Veut-on préciser davantage, et échapper aux cas d'exception que comportent les indications précédentes? On peut s'en tenir à l'énoncé suivant :

Les points multiples se distinguent de leurs voisins en ce que

parmi les valeurs de l'ordonnée qui correspondent à une même abscisse et qui sont généralement différentes, il en est plusieurs qui deviennent égales.

Il est un cas général où la détermination des points multiples se ramène à des règles très-simples; c'est celui des courbes représentées par des équations algébriques et rationnelles. Soit

$$(1). \quad \ldots \ldots \quad F(x, y) = o,$$

une équation de cette espèce. On en déduit

$$(2). \quad \ldots \ldots \quad \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = o.$$

Cela posé, s'il s'agit d'un point multiple, il faut que les valeurs affectées pour ce point par les dérivées $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ cessent de fournir une valeur unique pour le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. Cette condition ne peut être remplie que dans le cas où ces deux dérivées s'annulent. Il faut donc que l'on ait en même temps

$$(3). \quad \ldots \quad \frac{dF}{dx} = o, \quad \frac{dF}{dy} = o, \quad F(x, y) = o.$$

Supposons que l'ensemble de ces trois équations comporte des solutions réelles. La différentiation de l'équation (2) donne pour les valeurs correspondantes du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$.

$$(4). \quad \ldots \quad \frac{d^2F}{dx^2} + 2\frac{d^2F}{dx \cdot dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2F}{dy^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = o.$$

Si le point multiple correspondait à la rencontre en un même point de trois branches distinctes, on devrait avoir, comme on l'a vu tout à l'heure,

$$(5). \quad \ldots \quad \frac{d^2F}{dx^2} = o, \quad \frac{d^2F}{dxdy} = o, \quad \frac{d^2F}{dy^2} = o.$$

Il faudrait donc que les valeurs déduites des équations (3) satisfissent, en même temps, aux équations (5), et c'est à la différentielle de l'équation (4) qu'il faudrait recourir pour déterminer les valeurs correspondantes du coefficient $\frac{dy}{dx}$. Le même procédé, constamment poursuivi, s'applique à la rencontre en un même point d'un nombre quelconque de branches.

118. Soient *m* un point d'une courbe; *mt* la tangente en ce point; OX, OY deux droites quelconques situées dans le plan de la courbe et prises pour axes coordonnés. Il arrive, en général, que la courbe s'étend des deux côtés du point *m*, et que, de part et d'autre, elle se détache de la tangente en restant d'abord d'un seul et même côté. Cela posé, deux cas sont possibles, selon qu'à partir du point *m*, *en deçà comme au delà*, les coordonnées de la courbe commencent par être moindres que celles de la tangente *mt*, ou qu'au contraire, les premières l'emportent sur les secondes. Dans le premier cas, on dit de la courbe qu'elle est concave en *m* par rapport à la droite OX. Dans le second, on dit qu'elle est convexe en *m* par rapport à cette même droite.

Soit μ un point mobile, assujetti à décrire la courbe donnée et sortant du lieu *m* à l'instant que l'on considère. Représentons, par *mt*, la vitesse actuelle de ce point, et, par *mm'*, *m't*, ses composantes parallèles aux droites OX, OY.

Fig. 53.

L'équation de la courbe étant, par hypothèse,

$$y = f(x).$$

On a

$$dy = f'(x) \, . \, dx,$$

et l'on peut supposer constante la vitesse $dx = mm'$.

Il est visible que la courbe est convexe ou concave en *m*, par rapport à la droite OX, selon que la rotation de la directrice du point μ autour du lieu *m* est dirigée de manière à faire croître ou à faire décroître la vitesse $dy = m't$, et réciproquement. Or, cette vitesse est croissante ou décroissante, selon que l'on a

$$d^2y = f''(x) \, . \, dx^2 > 0,$$

ou bien

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 < o.$$

Concluons que la courbe est convexe ou concave, par rapport à la droite OX, selon que la dérivée seconde $f''(x)$ est positive ou négative.

Supposons que cette dérivée soit nulle. La première des dérivées suivantes, qui ne s'annule pas, peut être de rang pair ou de rang impair.

Est-elle de rang pair? Elle se substitue à la dérivée seconde $f''(x)$, et rien n'est changé, d'ailleurs, puisque celle-ci prend le signe de l'autre.

Est-elle de rang impair et positive? La dérivée $f''(x)$ est négative en deçà du point m et positive au delà. Il y a donc concavité d'un côté et convexité de l'autre.

Est-elle de rang impair et négative? La dérivée $f''(x)$ est positive en deçà du point m et négative au delà. C'est donc, en sens inverse, la même conséquence que dans le cas précédent.

Points d'inflexion.—On désigne sous le nom de points d'inflexion les points où la tangente coupe la courbe. Ils se distinguent en ce que la courbe, supposée convexe en deçà de ces points, devient concave au delà, ou inversement. La condition analytique qui les caractérise est le changement de signe qui leur correspond dans la dérivée seconde $f''(x)$. On détermine les points d'inflexion en posant

(1). . . . . $f''(x) = o,$

ou bien encore

(2). . . . . $\dfrac{1}{f''(x)} = o.$

Dans tous les cas, il faut s'assurer que les valeurs déduites pour la variable x de l'une ou l'autre des équations (1) et (2) ne peuvent être franchies sans qu'il en résulte un changement de signe de la dérivée seconde $f''(x)$.

119. Points de rebroussement. — Lorsque deux branches d'une courbe s'arrêtent en un même point et y ont même tangente, ce point est dit *point de rebroussement.* Il est du premier genre ou du second, selon que les deux branches se détachent de la tangente commune en la laissant entre elles, ou en s'en écartant toutes d'eux d'un même côté.

On reconnaît qu'une branche de courbe s'arrête en un point, lorsque les ordonnées sont réelles, d'un côté de ce point, et que, de l'autre, elles sont imaginaires. Dans le cas où la tangente en ce point est parallèle à l'axe des y, il faut substituer l'abscisse à l'ordonnée.

Le point de rebroussement comporte, pour chacune des deux branches qui s'y arrêtent, une seule et même valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$. Il est du premier genre ou du second, selon que les valeurs correspondantes de la dérivée seconde $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ sont de signe contraire ou de même signe.

120. Points conjugués. — Points d'arrêt. — Points saillants ou anguleux. — On désigne sous le nom de *points conjugués* des points isolés qui satisfont à l'équation de la courbe.

On nomme *point d'arrêt* tout point où se termine isolément une branche de courbe.

Les points dits *saillants* ou *anguleux* sont ceux où plusieurs branches s'arrêtent en conservant chacune une direction distincte.

Il est aisé de voir à quels signes on peut reconnaître et distinguer ces points de ceux que nous avons définis précédemment et avec lesquels ils présentent certaines analogies.

Exemples de points singuliers *.

1° . . . . $a^2y^2 = a^2x^2 + x^4$:

* Ces exemples sont empruntés aux éléments de calcul infinitésimal de M. Duhamel. Paris, 1856. Tome Ier page. 358.

Point multiple, inflexion.

2° $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $xy = \operatorname{tg} x$, $y = x \operatorname{tg} x$:

Inflexions.

3° . . . . $y = \varphi(x) + (x-a)^{\frac{2p+1}{2q}} . F(x)$:

Rebroussement du premier genre, lorsque l'exposant $\frac{2p+1}{2q}$ reste compris entre 1 et 2.

Rebroussement du deuxième genre, lorsque cet exposant est supérieur à 2, et que la dérivée seconde $\varphi''(x)$ n'est pas nulle.

Cas particuliers :

4° . . $\left\{ \begin{array}{l} y^2 = x^5, \quad y = x \pm x\sqrt{x}, \quad y = x^2 \pm x^2\sqrt{x}, \\ \qquad y = \dfrac{1}{\log x}, \quad y = x \log x : \end{array} \right.$

Point d'arrêt à l'origine.

5° . . . . $y = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$:

Point saillant ou anguleux à l'origine.

6° . . . . $y = (x-a)\sqrt{x-b}$:

Point conjugué ou point multiple, pour $x = a$, et selon que a est moindre ou plus grand que b.

Remarque. — Il est des points qu'on peut désigner sous le nom de *points limites* et ranger dans la classe des points singuliers. Ils se distinguent des points d'arrêt et des points saillants en ce que la courbe s'en rapproche indéfiniment sans les atteindre. Cette double condition suffit, en général, pour déterminer les points limites, comme on le voit dans les exemples suivants :

Le point pris pour pôle est un point limite dans la spirale hyperbolique

$$r = \frac{a}{\theta},$$

et dans la spirale logarithmique

$$r = me^{\frac{\theta}{n}}$$

Le point pris pour origine des coordonnées est un point limite dans la courbe représentée par l'équation

$$y = x \sin \frac{1}{x} \text{ *}.$$

CHAPITRE VII.

THÉORIE GÉNÉRALE DES CONTACTS DE TOUS LES ORDRES.

Voie géométrique.

121. Soient deux courbes situées dans un même plan et ayant un point commun.

Si ces courbes ont, en ce point, même tangente, elles se touchent et leur contact est dit du premier ordre.

Si, en outre, elles ont même centre de courbure, leur contact, devenu plus intime, est dit du deuxième ordre.

Soit *o* le centre de courbure commun à deux courbes qui ont

* Si la courbe atteignait l'origine des coordonnées, elle comporterait un tracé continu ayant cette même origine pour point de départ. Or, il est évident qu'un pareil tracé est impossible, puisque rien ne détermine si c'est en s'élevant au-dessus de l'axe des x, ou au contraire en s'abaissant au-dessous qu'il devrait commencer.

entre elles un contact du deuxième ordre; les développées de ces courbes se touchent au point o et leur contact est, en général, du premier ordre.

Supposons que ces développées aient en o un contact du deuxième ordre, le contact des développantes devient plus intime et il est dit du troisième ordre.

Pour abréger, disons immédiatement qu'un contact de l'ordre $n - 1$ entre les développées implique un contact de l'ordre n entre les développantes et réciproquement. Il suit de là que le contact du quatrième ordre se définit au moyen du contact du troisième ordre, celui du cinquième au moyen du quatrième, et ainsi de suite indéfiniment.

122. Considérons deux courbes lml, $l'ml'$ passant par le point m où elles ont même courbure, et dont les développées respectives os, os' sont situées toutes deux d'un même côté par rapport à la normale mo.

Fig. 54.

Occupons-nous, d'abord, des arcs ml, ml' pris à droite du point m et supposons la développée os' *intérieure* à la développée os. Du point e pris sur l'arc ml, à proximité du point m, menons deux droites, l'une eh tangente en h à os, l'autre en tangente en n à os'. Cette construction, toujours possible pour une certaine étendue de l'arc ml comptée à partir du point m, donne évidemment *

$$on + ne < oh + he.$$

On a d'ailleurs, conformément au principe du n° 75, **

$$oh + he = om.$$

* L'enveloppe ohe est nécessairement plus longue que l'enveloppée one.

** Toute tangente à la développée est normale à la développante et réciproquement. L'arc de développée compris entre deux rayons de courbure de la développante a pour longueur rectifiée la différence de ces mêmes rayons. (Voir au besoin le n° 75, page 202.)

Il vient donc aussi

$$on + ne < om.$$

Cette dernière inégalité montre que le point de la développante ml', qui correspond au centre de courbure n, se trouve au delà du point e sur la tangente ne, et, conséquemment, que la développante ml' est *extérieure* à la développante ml.

De là résulte, en premier lieu, la déduction suivante :

La position relative affectée par les développantes, à partir du point m *et à droite de ce point, est l'inverse de celle qui lui correspond dans les développées.*

Occupons-nous maintenant des arcs ml', ml situés à gauche du point m et supposons, comme tout à l'heure, la développée os' *intérieure* à la développée os.

Du point e' pris sur l'arc ml' à proximité du point m, menons deux droites, l'une $e'h$ tangente en h à os, l'autre en $e'n'$ tangente en n' à os'. La tangente $e'n'$ rencontre en q la développée os, et l'on a

$$n'e' = n'q + qe' = n'o + om.$$

De là résulte, en remplaçant l'enveloppée $n'o$ par l'enveloppe $n'q + qo$, et supprimant, dans chacun des deux membres de l'inégalité résultante, la partie commune $n'q$,

$$qe' < qo + om.$$

Ajoutons, de part et d'autre, hq; il vient

$$hq + qe' < hqom,$$

et, *à fortiori*,

$$he' < hqom.$$

Cette dernière inégalité montre que le point de la développante ml, qui correspond au centre de courbure h, se trouve au delà du point e' sur la tangente he', et, conséquemment que la développante ml est *extérieure* à la développante ml'.

De là résulte, en second lieu, la déduction suivante :

La position relative affectée par les développantes, à partir du point m *et à gauche de ce point, est la même que celle qui lui correspond dans les développées.*

Les déductions formulées ci-dessus peuvent se résumer comme il suit :

Lorsque deux courbes ont entre elles un contact d'un ordre quelconque supérieur au premier, selon que leurs courbures sont toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes à partir du point de contact et d'un même côté de ce point, la position relative des développées est l'inverse ou la même que celle des développantes.

123. Le principe que nous venons d'établir implique comme conséquences plusieurs propositions applicables aux contacts des ordres supérieurs et déjà démontrées pour le cas de l'osculation simple.

Observons d'abord que, dans le cas où le contact établi entre deux courbes est d'un ordre quelconque supérieur au second, les développées de ces courbes ont même courbure et se détachent, par conséquent, d'un même côté de la normale. Il suit de là que les courbures des développantes, supposées variables à partir du point de contact, sont *généralement*, toutes deux croissantes d'un côté de ce point et toutes deux décroissantes de l'autre côté *.

Cela posé, puisque d'un côté du point de contact les positions relatives des développantes et des développées sont les mêmes, tandis qu'elles sont inverses de l'autre côté, il s'ensuit que si les unes se coupent, les autres ne se coupent pas, et réciproquement.

S'agit-il maintenant d'un contact d'un ordre quelconque n entre les développantes? Le contact des développées est de l'ordre $n - 1$.

Soit $n = 3$. Les développées ont entre elles un contact du second ordre et, par suite, elles se coupent. Concluons que les dévelop-

* On ne perdra pas de vue qu'il s'agit du cas général et non des cas particuliers qui correspondent soit à des *maxima* ou des *minima* de courbure, soit à des points d'inflexion, de rebroussement, etc.

pantes ne se coupent pas et qu'il en est généralement ainsi pour tout contact du troisième ordre.

Soit $n = 4$. Les développées ont entre elles un contact du troisième ordre et, par suite, elles ne se coupent pas. Concluons que les développantes se coupent et qu'il en est généralement ainsi pour tout contact du quatrième ordre.

Le même raisonnement constamment poursuivi conduit évidemment aux déductions suivantes :

1° *En général, lorsque deux courbes ont entre elles un contact d'ordre pair, elles se coupent au point de contact ;*

2° *En général, lorsque deux courbes ont entre elles un contact d'ordre impair, elles ne se coupent pas au point de contact.*

Considérons une troisième courbe ayant, avec chacune des deux autres et pour le même point, un contact quelconque d'ordre inférieur à celui que ces courbes ont entre elles. Si cette troisième courbe pouvait, à partir du point de contact rester comprise entre les deux autres, il est aisé de voir que sa développée remplirait la même condition par rapport à celles des deux premières courbes. Soient, en effet, A, B, C les trois courbes que l'on considère; m leur point de contact; A_1, B_1, C_1 leurs développées respectives. Le contact des courbes A, B, étant au moins du troisième ordre, il s'ensuit qu'elles ont même courbure en m, et, conformément aux déductions du n° 80[bis], page 210, qu'aucune courbe de courbure différente ne peut passer entre elles. Par hypothèse la courbe C part du point m et reste d'abord comprise entre les courbes A, B. Il faut donc qu'elle ait en m même courbure que ces courbes et, par conséquent aussi, même centre de courbure. Soit o ce centre : les développées A_1, B_1, C_1 se touchent au point o, et elles sont situées à partir de ce point d'un même côté de la normale mo *

* Cette proposition est évidente en ce qui concerne les courbes A_1, B_1 dont le contact en o est au moins du second ordre. Il est d'ailleurs aisé de voir que si la développée C_1 était située par rapport à la normale mo du côté opposé à celui des développées A_1, B_1, la courbure de la courbe C serait croissante à partir du point m du côté où les courbures des courbes A, B sont toutes deux décroissantes, et inversement. Il serait donc impossible que la courbe C restât d'abord comprise entre les courbes A, B.

Rangeons les trois premières courbes dans l'ordre où elles se succèdent, à partir du point m'. Si, comme on le suppose, la courbe C reste, d'abord, comprise entre les courbes A, B, l'ordre correspondant est A, C, B. Mais, d'un autre côté, la position relative des développées est la même ou l'inverse que celle des développantes. Il faut donc que l'ordre affecté par les développées, à partir du point O soit A_1, C_1, B_1 ou B_1, C_1 A_1. De là résulte évidemment la conséquence formulée ci-dessus.

Étendons cette conséquence aux développées successives des courbes A, B, C. Soient A_2, B_2, C_2 les développées des courbes A_1, B_1, C_1; A_3, B_3, C_3 celles des courbes A_2, B_2, C_2 et ainsi de suite. Il est visible que si la courbe C ne peut rester comprise entre les courbes A, B sans qu'il en soit de même de la courbe C_1, par rapport aux courbes A_1, B_1, la même conséquence s'étend de proche en proche à toutes les développées successives; la courbe C_2 devant rester comprise entre les courbes A_2, B_2, la courbe C_3 entre les courbes A_3, B_3 et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on parvienne à une développée C_n dont le contact avec les développées correspondantes A_n, B_n ne soit plus que du premier ordre. Observons ici que le contact des développées A_n, B_n est nécessairement d'un ordre égal ou supérieur au second. Elles ont donc même courbure, et dès lors il devient impossible que la courbe C_n dont la courbure est moindre ou plus grande puisse passer entre elles. On voit ainsi que l'hypothèse d'où l'on est parti implique contradiction. De là résulte, en conséquence, la conclusion suivante :

Entre deux courbes dont le contact est d'un certain ordre, on n'en peut mener aucune ayant avec elles un contact d'ordre inférieur.

Cette conclusion justifie ce que nous avons avancé au n° 121, en disant du contact de deux courbes, qu'il devenait de plus en plus intime à mesure que son ordre s'élevait.

124. Considérons une courbe plane A et représentons par A_1, A_2, etc., A_n ses développées successives.

Soit ρ le rayon de courbure de la courbe A; ρ_1 celui de la courbe A_1; ρ_2 celui de la courbe A_2, et, ainsi de suite, ρ_n étant le rayon de

courbure de la courbe A_n. Il est entendu que tous ces rayons correspondent à un seul et même point de la courbe A.

Si nous désignons, par s, la longueur d'un arc pris à partir d'un point quelconque m sur la courbe A, et, par ω, l'angle que la tangente en ce point fait avec une droite fixe située dans le plan de la courbe, on a, généralement, pour le point m,

$$\rho = \frac{ds}{d\omega}.$$

Imaginons, pour plus de simplicité, que la vitesse angulaire $d\omega$ soit assujettie à demeurer constante. Il suffit de se reporter aux considérations du n° 75, page 202, pour reconnaître que l'on peut écrire immédiatement,

$$\rho_1 = \frac{d\rho}{d\omega} = \frac{d^2s}{d\omega^2},$$

$$\rho_2 = \frac{d\rho_1}{d\omega} = \frac{d^3s}{d\omega^3};$$

et, en général,

$$\rho_n = \frac{d\rho_{n-1}}{d\omega} = \frac{d^{n+1}s}{d\omega^{n+1}}.$$

Mais, d'un autre côté, si l'on rapporte la courbe A à des axes coordonnés rectilignes, et qu'on représente son équation par

$$y = f(x),$$

il est aisé de voir que les différentielles $d\omega$ et $d^{n+1}s$ dépendent exclusivement : la première, de l'abscisse x et des dérivées $f'(x)$, $f''(x)$; la seconde, de ces mêmes éléments et, en outre, des dérivées suivantes $f'''(x)$, $f^{\text{IV}}(x)$, etc., jusques et y compris celle de l'ordre $n+2$, $f^{n+2}(x)$.

Cela posé, s'agit-il d'une autre courbe, ayant pour équation

$$y = \varphi(x),$$

et susceptible de contracter avec la première un contact de l'ordre $n + 2$? Les développées successives, qui se correspondent de part

et d'autre, devront avoir même rayon de courbure jusques et y compris celles de l'ordre n. La conséquence est que, pour une même valeur attribuée à la variable x et correspondante au point de contact des deux courbes, on devra satisfaire, en même temps, à toute la série des équations simultanées,

$$\varphi(x) = f(x),$$
$$\varphi'(x) = f'(x),$$
$$\varphi''(x) = f''(x).$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi^{n+2}(x) = f^{n+2}(x).$$

La réciproque est d'ailleurs évidente.

Les équations qui précèdent étant au nombre de $n + 3$, il s'ensuit que, pour établir un contact de l'ordre $n + 2$, entre une courbe quelconque A et une courbe B d'un genre déterminé, il faut, *en général,* que l'équation la plus complète de la courbe B comporte au moins $n + 3$ constantes arbitraires. Lorsque la courbe B est une section conique, les constantes arbitraires sont tout au plus au nombre de cinq. On voit, par là, que le contact de l'ordre le plus élevé, qu'on puisse établir, *généralement,* entre une courbe quelconque et une section conique, est un contact du quatrième ordre. Suivant les différents cas, cette section est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. La note A placée plus loin, à la suite du n° 126, montre comment ce curieux problème peut se résoudre par voie purement géométrique.

Procédé mixte.

125. Soient A et A′ deux courbes ayant entre elles un contact de l'ordre $n + 2$; m le point où ce contact a lieu; ρ, ρ' les rayons de courbure qui se correspondent pour des points déterminés, de part et d'autre, par une même direction tangentielle.

En désignant par ρ_1, ρ_2, etc., ρ_n les rayons de courbure qui correspondent au rayon ρ, pour les développées successives de la courbe A, et par ρ'_1, ρ'_2, etc., ρ'_n ceux qui correspondent au rayon ρ' pour les développées successives de la courbe A', on a, généralement,

$$\rho_n = \frac{d\rho_{n-1}}{d\omega}, \qquad \rho'_n = \frac{d\rho'_{n-1}}{d\omega}.$$

De là résulte

$$\rho_n - \rho'_n = \frac{d(\rho_{n-1} - \rho'_{n-1})}{d\omega},$$

et, s'il s'agit en particulier du point m, où les courbes A, A' ont entre elles un contact de l'ordre $n+2$, (la vitesse angulaire $d\omega$ étant supposée constante comme au nº 124)

$$\rho_1 - \rho'_1 = \frac{d(\rho - \rho')}{d\omega} = 0,$$

$$\rho_2 - \rho'_2 = \frac{d(\rho_1 - \rho'_1)}{d\omega} = \frac{d^2(\rho - \rho')}{d\omega^2} = 0,$$

$$\rho_3 - \rho'_3 = \frac{d(\rho_2 - \rho'_2)}{d\omega} = \frac{d^3(\rho - \rho')}{d\omega^3} = 0,$$

. . . .

$$\rho_n - \rho'_n = \frac{d(\rho_{n-1} - \rho'_{n-1})}{d\omega} = \frac{d^{n+1}(\rho - \rho')}{d\omega^{n+1}} = 0.$$

La différence $\rho - \rho'$ étant nulle en m, on sait qu'elle change de signe en passant par ce point lorsque la première de ses différentielles successives qui ne s'annule pas est de rang impair, et qu'elle n'en change pas lorsque cette même différentielle est de rang pair. Cela revient à dire que le passage par le point m s'effectue avec ou sans changement de signe, selon que l'indice n est pair ou impair. Mais, d'un autre côté, il est aisé de voir que les courbes A, A' se coupent au point m, ou qu'au contraire elles ne

s'y coupent pas, selon que la différence $\rho - \rho'$ change ou non de signe en passant par ce point. On peut donc poser immédiatement la conclusion suivante :

En général, lorsque deux courbes ont entre elles un contact de l'ordre n, *selon que l'indice* n *est pair ou impair, elles se coupent ou ne se coupent pas au point où le contact a lieu.*

Considérons une troisième courbe A″ ayant, avec chacune des deux courbes A, A′, et pour le même point m, un contact quelconque d'ordre $p+2$ inférieur à celui que ces courbes ont entre elles. Si l'on désigne par ρ'', ρ''_1, ρ''_2, etc., pour la courbe A″, les rayons de courbure correspondants à ceux qu'on a désignés ci-dessus par ρ, ρ_1, ρ_2, etc., pour la courbe A, et par ρ', ρ'_1, ρ'_2, etc., pour la courbe A′, il est visible que la position de la courbe A″, par rapport à chacune des deux autres, est relativement la même, puisqu'elle est déterminée, pour l'une, par le signe de la différentielle,

$$(1) \quad \ldots \ldots \quad d^{p+1}(\rho - \rho'') = d^{p+1}\rho - d^{p+1}\rho'',$$

pour l'autre, par le signe de la différentielle,

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad d^{p+1}(\rho' - \rho'') = d^{p+1}\rho' - d^{p+1}\rho'',$$

et que l'équation

$$d^{p+1}(\rho - \rho') = d^{p+1}\rho - d^{p+1}\rho' = 0,$$

implique l'égalité des différentielles (1) et (2).

De là résulte la proposition déjà formulée ci-dessus dans les termes suivants :

Entre deux courbes dont le contact est d'un certain ordre, on n'en peut mener aucune ayant avec elles un contact d'ordre inférieur.

Voie analytique.

126. Soient A et B deux courbes quelconques, situées dans un même plan et rapportées à un même système de coordonnées. On dit de ces courbes qu'elles ont entre elles un contact de l'ordre n, en un point déterminé m, lorsque les coordonnées de ce point satisfont en même temps aux équations des courbes et à celles qui s'en déduisent par n différentiations successives.

Supposons les coordonnées rectilignes, et les équations des courbes ramenées à la forme

$$y = f(x), \qquad y = \varphi(x).$$

Si nous développons chacune de ces fonctions, d'après la série de Taylor, et que nous attribuions à la variable x la valeur qui correspond au point m, les courbes ayant en ce point un contact de l'ordre n, on a d'abord, selon la définition,

$$f(x) = \varphi(x), \quad f'(x) = \varphi'(x), \quad f''(x) = \varphi''(x) \ldots . f^n(x) = \varphi^n(x).$$

et, par suite, conformément à la formule (1) du n° 16, *

$$(1)\quad f(x+h) - \varphi(x+h) = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n}\, \mathrm{M}_0^1 (1-u)^n [f^{n+1}(x+hu) - \varphi^{n+1}(x+hu)].$$

Observons ici que, par hypothèse, la différence $f^{n+1}(x) - \varphi^{n+1}(x)$ n'est pas nulle et qu'en conséquence, elle donne son signe à l'expression symbolique

$$\mathrm{M}_0^1 (1-u)^n [f^{n+1}(x+hu) - \varphi^{n+1}(x+hu)],$$

non pas seulement pour $h = o$, mais, en outre, pour toute valeur de h qui ne dépasse pas, en grandeur absolue, une certaine limite.

Cela posé, il est visible que la différence $f(x+h) - \varphi(x+h)$

* Voir au besoin le n° 16, page 44.

change ou non de signe avec h, selon que l'indice n est pair ou impair. Voici d'ailleurs la conséquence :

Les courbes A, B, *qui ont en* m *un contact de l'ordre* n, *se coupent en ce point ou ne s'y coupent pas, selon que l'indice* n *est pair ou impair.*

Soit C une troisième courbe passant par le point m et ayant en ce point avec chacune des deux autres un contact d'un ordre p, inférieur à celui qu'elles ont entre elles. Si l'on représente par

$$y = \mathrm{F}(x)$$

l'équation de cette courbe on a, comme tout à l'heure,

$$(2)\quad \mathrm{F}(x+h)-f(x+h)=\frac{h^{p+1}}{1.2\,..\,p}\,\mathrm{M}_0^1\,(1-u)^p[\mathrm{F}^{p+1}(x+hu)-f^{p+1}(x+hu)],$$

et, en même temps,

$$(3)\quad \mathrm{F}(x+h)-\varphi(x+h)=\frac{h^{p+1}}{1.2\,..\,p}\,\mathrm{M}_0^1\,(1-u)^p[\mathrm{F}^{p+1}(x+hu)-\varphi^{p+1}(x+hu)],$$

les différences $\mathrm{F}^{p+1}(x) - f^{p+1}(x)$, $\mathrm{F}^{p+1}(x) - \varphi^{p+1}(x)$, étant égales et ne s'annulant pas.

Il suit de là que les différences $\mathrm{F}(x+h) - f(x+h)$, et $\mathrm{F}(x+h) - \varphi(x+h)$, supposées nulles au point m, deviennent en même temps toutes deux positives ou toutes deux négatives au sortir de ce point. Ce résultat implique la conséquence suivante :

Entre deux courbes dont le contact est d'un certain ordre on n'en peut faire passer aucune ayant avec elles un contact d'ordre inférieur.

Cette conséquence étant générale et pouvant s'établir *à priori* pour un système quelconque de coordonnées, il en résulte implicitement que, si les conditions formulées ci-dessus comme celles

du contact de l'ordre n, sont remplies pour l'un de ces systèmes, elles le sont en même temps pour tous les autres.

On remarquera que les courbes susceptibles de contracter avec une courbe donnée un contact de l'ordre n doivent, en général, comprendre dans leurs équations $n+1$ constantes arbitraires. Les plus simples sont représentées par l'équation algébrique

$$(4). \quad \ldots \quad y = a + bx + cx^2 + \text{etc.} + px^n.$$

Si, d'ailleurs,

$$y = f(x)$$

est l'équation de la courbe donnée, et qu'on désigne par x' l'abscisse du point de contact, on a la courbe cherchée en posant, d'une part,

$$y = a + b(x - x') + c(x - x')^2 + \text{etc.} + p(x - x')^n,$$

et, d'autre part,

$$a = f(x'), \quad b = \frac{f'(x')}{1}, \quad c = \frac{f''(x')}{1.2} \ldots p = \frac{f^n(x')}{1.2..n}.$$

NOTE A.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME AYANT POUR ÉNONCÉ :

Étant donnés une courbe quelconque et l'un de ses points, on demande de déterminer, pour ce point, la section conique qui y affecte avec la courbe donnée un contact du quatrième ordre.

On connaît la solution donnée, pour ce problème, par M. Transon *. Elle repose, en partie, sur l'emploi de l'analyse infinitési-

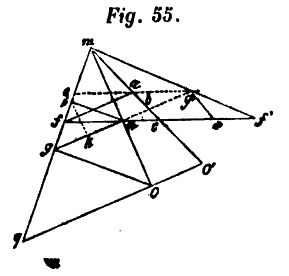
* Voir le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, par J. Liouville, tome VI, année 1841.

male. Nous voulons montrer ici comment on peut parvenir aux mêmes résultats sans autre secours que celui de la géométrie élémentaire.

Proposons-nous, d'abord, de rechercher quels sont, pour un point quelconque m d'une section conique, les rayons de courbure ρ' et ρ'' qui correspondent à ce point dans chacune des deux premières développées.

Soient f, f' les foyers de la section conique; r, r', les rayons vecteurs fm, $f'm$; mn la normale en m; mi la projection de la normale sur le rayon vecteur fm; θ l'angle fmn.

Fig. 55.



Reportons-nous au n° 99, page 255. En désignant, par ω, ω', les vitesses angulaires des rayons vecteurs r, r' et, par w, celle de la normale mn, nous avons trouvé,

$$(1). \quad \ldots\ldots\ldots \quad r\omega = r'\omega',$$

et, en outre,

$$(2). \quad \ldots\ldots \quad w = \frac{\omega + \omega'}{2} = \frac{r + r'}{2r'}\,\omega.$$

Nommons w' la vitesse avec laquelle l'angle θ varie dans la rotation simultanée des droites mf, mn. On a

$$w' = \omega - w,$$

et, eu égard à l'équation (2),

$$(3). \quad \ldots\ldots\ldots \quad w' = \frac{r' - r}{2r'}\,\omega.$$

Soit o le centre de courbure qui correspond au point m; ρ le rayon de courbure mo; v' la vitesse du point o sur mo. Le rayon de courbure qui correspond au point o, dans la développée première, étant déjà désigné par ρ', on a

$$(4). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \rho' = \frac{v'}{w}.$$

On sait, d'ailleurs, que la projection *mi* de la normale *mn* est constante, et que, le centre *o* se projetant en *g* sur *mf*, le point *g* se projette en *n* sur *mo*.

Cela posé, si, sans rien changer d'ailleurs, le point *i* glissait sur *mg* avec la vitesse *u*, les droites *mf*, *mn* tournant l'une par rapport à l'autre avec la vitesse *w'*, la vitesse du point *n* sur *mo* résulterait de ces deux mouvements. La composante due au glissement du point *i* sur *mg* serait évidemment

$$\frac{u}{\cos 6}.$$

La composante due à la rotation *w'* correspondrait à une vitesse de circulation qu'on peut représenter par *nk* (*k* étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point *i* sur *ng*) et, en conséquence, elle aurait, pour expression,

$$ik = nk \,.\, \text{tg}\, 6 = mn \,.\, w' \,.\, \text{tg}\, 6.$$

Appliquons ces résultats généraux à la détermination successive des vitesses qui animent en même temps le point *n* sur *mn*, le point *g* sur *mf*, le point *o* sur *mo*.

S'agit-il d'abord de la vitesse du point *n* sur *mn*? Le point *i* demeurant fixe sur *mf*, on a $u = o$ et la vitesse cherchée se réduit à

$$mn \,.\, w' \,.\, \text{tg}\, 6.$$

S'agit-il ensuite de la vitesse du point *g* sur *mf*? On a, pour première composante,

$$\frac{u}{\cos 6} = \frac{mn \,.\, w' \,.\, \text{tg}\, 6}{\cos 6} = mg \,.\, w' \,.\, \text{tg}\, 6,$$

et, pour deuxième composante,

$$mg \,.\, w' \,.\, \text{tg}\, 6.$$

La vitesse cherchée est donc égale à

$$2mg \,.\, w' \,.\, \mathrm{tg}\, 6.$$

S'agit-il, en dernier lieu, de la vitesse du point o sur mo. On a, pour première composante,

$$\frac{u}{\cos 6} = 2 \,.\, \frac{mg \,.\, w' \,.\, \mathrm{tg}\, 6}{\cos 6} = 2mo \,.\, w' \,.\, \mathrm{tg}\, 6,$$

et, pour deuxième composante,

$$mo \,.\, w' \,.\, \mathrm{tg}\, 6.$$

De là résulte

$$v' = 3 \,.\, mo \,.\, w' \,.\, \mathrm{tg}\, 6 \;^{*}.$$

Élevons en o, sur mo, une perpendiculaire, et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en q avec la droite mf. Il vient

$$oq = mo \,.\, \mathrm{tg}\, 6,$$

et, par suite,

$$v' = 3 \,.\, oq \,.\, w'.$$

Cette valeur transportée dans l'équation (4) donne

$$\rho' = 3 \,.\, oq \,.\, \frac{w'}{u},$$

* Si l'on part de la formule

$$mo = \frac{mi}{\cos^3 6},$$

où mi est une quantité constante, il suffit de différencier pour avoir immédiatement

$$dmo = v' = 3 \,.\, mi \,.\, \frac{\sin 6}{\cos^4 6}\, d6 = 3 \,.\, \frac{mi}{\cos^3 6}\, \mathrm{tg}\, 6 \,.\, d6 = 3 \,.\, mo \,.\, w' \,.\, \mathrm{tg}\, 6.$$

et, eu égard aux équations (2) et (3),

$$\rho' = 3 \, . \, oq \, . \frac{r' - r}{r + r'} \, .$$

Soit c le centre de la conique. La droite mn étant bissectrice de l'angle fmf', on a

$$\frac{nf}{nf'} = \frac{r}{r'} ,$$

et, par suite,

$$\frac{r' - r}{r + r'} = \frac{nf' - nf}{nf + nf'} = \frac{nc}{fc} .$$

Il vient donc aussi

$$(5). \quad \ldots \ldots \quad \rho' = 3 \, . \, oq \, . \frac{nc}{fc} \, .$$

Tirons la droite mc et prolongeons-la jusqu'à sa rencontre en o' avec la droite qo.

La droite gn coupe, en b, la droite mc et, en g', la droite mf'. Par le point g' menons les droites $g'e$, $g's$ respectivement parallèles, la première à ff', la seconde à mc. La droite $g'e$ est coupée, en son milieu a, par mc. Tirons la droite af.

Les droites nf, $g'e$ étant parallèles et le point n divisant gg' en deux parties égales, le point f est le milieu de ge. Mais, d'un autre côté, le point a est le milieu de $g'e$. La droite af est donc parallèle à la droite gg'. Il suit de là qu'il y a égalité entre les deux segments fa, ng' et, par conséquent aussi, entre les deux triangles semblables fac, $ng's$. Concluons que l'on a

$$fc = ns.$$

On a d'ailleurs, d'après la figure,

$$\frac{nc}{ns} = \frac{nb}{ng'} = \frac{nb}{ng} = \frac{oo'}{oq} .$$

En remplaçant ns par fc, il vient

$$\frac{nc}{fc} = \frac{oo'}{oq} ,$$

et, substituant dans l'équation (5),

$$(6). \qquad \rho' = 3 \, . \, oo'.$$

Ce résultat peut s'énoncer comme il suit :

Soient o *le centre de courbure qui correspond au point* m *d'une section conique, et* c *le centre de cette courbe. Si l'on élève en* o *une perpendiculaire sur la normale* mo *et qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontre en* o' *avec la droite* mc, *le rayon de courbure qui correspond au point* o *de la développée est égal en grandeur au triple du segment* oo'.

Partons de la donnée qui nous est fournie par l'énoncé précédent et cherchons le rayon de courbure ρ'' qui correspond, dans la développée seconde, au centre de courbure de la développée première.

Si l'on désigne par v'' la vitesse du point o' sur la droite oo', on a d'abord,

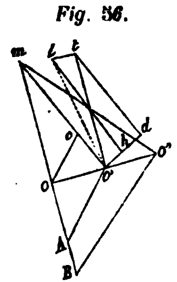
$$(7). \qquad \rho'' = 3 \, . \, \frac{v''}{w} \, .$$

Soit α l'angle omo', En représentant par λ le segment oo', on a, d'après ce qui précède,

$$\rho' = 3\lambda, \quad v' = \rho' w = 3\lambda w, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{oo'}{mo} = \frac{\lambda}{\rho} \, .$$

La vitesse du point m dans la rotation établie autour du centre o est ρw. Il s'ensuit que la vitesse de circulation de ce même point est exprimée par ρw. $\cos \alpha$, lorsqu'on le considère comme restant sur la droite mc et qu'on assujettit cette droite à tourner autour du point c. On déduit immédiatement de là que la vitesse de circulation du point o', autour du centre c, a, pour expression,

Fig. 56.



$$\rho \, . \, w \, . \, \frac{co'}{cm} \cos \alpha.$$

D'un autre côté, si l'on considère le point o' comme restant sur la droite oo', il est animé, par rapport à cette droite, d'une vitesse de circulation qui résulte de deux composantes distinctes, l'une égale à $v' = \rho' w = 3\lambda w$, l'autre égale à λw. Cette vitesse est donc représentée par

$$4\lambda w\ ^*.$$

Élevons en o' deux perpendiculaires, l'une $o'd$ sur $o'c$, l'autre $o't$ sur $o'o$. Prenons, sur la première,

$$o'h = \rho w \,.\, \frac{co'}{cm} \cos \alpha,$$

et, par le point h, menons la droite hl parallèle à $o'c$.

Prenons, sur la seconde,

$$o't = 4\lambda w,$$

et, par le point t, menons tl parallèle à $o'o$.

Soit l le point de rencontre des droites hl, tl. D'après la règle du quadrilatère des vitesses, le segment $o'l$ représente en direction, sens et grandeur la vitesse totale du point o'. Concluons que la vitesse cherchée v'' est représentée par lt.

Cela posé, on a, d'après la figure,

$$o'd = o't \sin \alpha = 4\lambda w \sin \alpha = o'h + hd = \rho w \frac{co'}{cm} \cos \alpha + lt \cos \alpha$$

De là résulte

$$lt = v'' = \left[4\lambda \operatorname{tg} \alpha - \rho \frac{co'}{cm}\right] w = \left(\frac{4\lambda^2}{\rho} - \rho \frac{co'}{cm}\right) w,$$

* Il est aisé de voir que les composantes $3\lambda w$ et λw sont toutes deux de même sens et qu'en conséquence elles s'ajoutent.

et, par suite, eu égard à l'équation (7),

$$(8). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \rho'' = 3\left[\frac{4\lambda^2}{\rho} - \rho\,\frac{co'}{cm}\right].\ ^*$$

Prolongeons oo' d'une longueur égale $o'o''$, et tirons les droites co, mo''. Soit A le point où la droite $o'A$, menée par le point o' parallèlement à co, vient couper la normale mo. Soit, en même temps, B le point où la perpendiculaire, élevée en o'' sur mo'', vient couper cette même normale. On a, d'après la figure, d'une part,

$$oA = mo\,\frac{co'}{cm} = \rho\,\frac{co'}{cm},$$

et, d'autre part,

$$oB = \frac{\overline{oo''}^2}{mo} = \frac{4\lambda^2}{\rho}.$$

Il vient donc, en substituant,

$$\rho'' = 3\,[oB - oA] = 3\,.\,AB.$$

* Si, *toutes choses égales d'ailleurs*, le point l tombait à droite du point t, l'équation (8) ne cesserait pas de subsister pourvu qu'on y changeât le signe de la quantité ρ''. Cette circonstance correspond au cas où le rayon ρ' serait croissant dans le déplacement que l'on considère, *les positions relatives des points* m, c, o' *restant d'ailleurs les mêmes.*

On reconnait aisément que, dans le cas de l'ellipse, les points c et o' sont tous deux d'un même côté du point m, tandis que, dans le cas de l'hyperbole, ils sont situés, l'un à gauche, l'autre à droite de ce même point. On voit aussi, pour le cas de l'ellipse, qu'au lieu d'être plus rapproché du point m que le point o', le point c peut s'en éloigner davantage. De là résulte un changement de signe portant sur la quantité cm, dans le cas de l'hyperbole, et sur la quantité co', lorsqu'il s'agit de l'ellipse, et que le point o' se trouve placé entre les points m et c. Rien d'ailleurs n'est modifié dans les déductions ultérieures. On observera seulement que le trinôme $4\rho'^2 + 9\rho^2 - 3\rho\rho''$ devient négatif dans le cas de l'hyperbole et qu'en conséquence il faut changer son signe.

Ce résultat peut s'énoncer comme il suit :

Soit o *le centre de courbure qui correspond au point* m *d'une section conique;* c *le centre de cette section;* o′ *le point de la droite* mc *qui se projette en* o; o″ *le point de la droite* oo′ *situé de l'autre côté du point* o′ *à la distance* o″o′ = o′o. *Si, après avoir tiré les deux droites* co, mo″, *on mène par le point* o′ *une parallèle à la première, et par le point* o″ *une perpendiculaire à la seconde, puis qu'on prolonge ces deux dernières droites jusqu'à leurs rencontres en* A *et* B *avec la normale* mo, *le rayon de courbure, qui correspond dans la deuxième développée au centre de courbure de la première, est égal en grandeur au triple du segment* AB.

Abordons et résolvons maintenant le problème proposé. On connait, par hypothèse, le point m, le centre de courbure o, les rayons de courbure ρ, ρ', ρ''. On sait, en outre, de quel côté de la normale mo est situé le centre de courbure de la première développée.

Cela posé, voici comment on peut procéder.

On élève en o, sur la normale mo, une perpendiculaire située du côté opposé à celui du centre de courbure qui correspond au point o dans la première développée. On prend sur cette perpendiculaire les deux points o', o'', déterminés l'un et l'autre par l'équation de condition

$$oo' = o'o'' = \frac{1}{3}\rho'.$$

On élève en o'', sur la droite mo'', une perpendiculaire que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre en B avec la normale mo.

A partir du point B, on porte sur la normale mo, dans le sens Bm, une longueur BA égale au tiers du rayon de courbure ρ''.

Le point A se trouvant ainsi déterminé, on tire la droite Ao' et, par le point o, l'on mène une parallèle à cette droite. Le point c où cette parallèle vient couper la droite mo' est le centre de la conique cherchée.

Selon que le centre c se trouve placé, par rapport au point m,

du même côté que le point o', ou qu'au contraire il est situé du côté opposé, la conique cherchée est une ellipse ou une hyperbole.

Lorsque le point A tombe en m, ou, ce qui revient au même, lorsque le segment mB est précisément égal au tiers du rayon de courbure ρ'', la conique cherchée est une parabole.

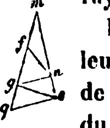
En résumé, on a une ellipse, une hyperbole, ou une parabole, selon que le segment mB est supérieur, inférieur ou égal au tiers du rayon de courbure ρ''.

Nous venons de voir comment on obtient le centre de la conique cherchée; comment aussi l'on reconnaît si cette conique est une parabole, une ellipse ou une hyperbole. Pour compléter la solution géométrique il ne reste plus qu'à montrer comment la construction s'achève dans chacun des trois cas qui peuvent se présenter.

Considérons, en premier lieu, le cas de la parabole.

Le segment désigné par oq ne diffère, en ce cas, du segment oo' que par la position. Il s'ensuit qu'il est égal au tiers du rayon ρ'.

Fig. 57.



Le point q se trouve ainsi déterminé. On sait, d'ailleurs, que le foyer f est situé sur la droite mq, au milieu de l'intervalle compris entre le point m et la projection g du centre de courbure o.

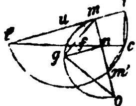
Projetons le point g en n sur la normale mo. La droite fn est l'axe principal de la parabole.

On connaît ainsi le point m, le foyer f, l'axe principal fn. Tout est donc déterminé dans les conditions les plus simples.

Considérons, en second lieu, le cas de l'ellipse.

Soit p la perpendiculaire abaissée du centre c sur la tangente en m. On a, conformément à l'équation (10) du n° 108, page 280, *

Fig. 58.



$$p \cdot \rho = a'^2.$$

De là résulte la détermination du demi-diamètre a'.

* *Le produit du rayon de courbure par la perpendiculaire abaissée du*

Sur la normale *mo* prenons une longueur *mm'* égale au demi-diamètre *a'*, et, sur le milieu du segment *m'c*, élevons une perpendiculaire.

Soit *u* le point où cette perpendiculaire vient rencontrer la tangente en *m*. Du point *u* comme centre, avec la longueur $uc = um'$ prise pour rayon, décrivons la demi-circonférence *tcm't'*, et tirons les cordes *tc*, *t'c*.

L'angle *tct'* est droit et l'on a, par construction,

$$mt \, . \, mt' = \overline{mm'}^2 = a'^2.$$

Concluons, conformément au théorème rappelé dans la note du n° 108, page 281, que les axes principaux de l'ellipse cherchée sont dirigés respectivement, l'un suivant *ct'*, l'autre suivant *ct* *.

Sur *mo*, pris pour diamètre, décrivons la demi-circonférence *mgo*, et, par le point *n* situé à la rencontre de la normale *mo* avec l'axe *ct'*, élevons sur *mo* une perpendiculaire. Le point, où cette perpendiculaire vient couper la demi-circonférence *mgo*, est évidemment celui que nous avons désigné ci-dessus par *g*. Il en résulte que le foyer de l'ellipse cherchée se trouve en *f*, à la rencontre des droites *mg* et *ct'*.

On connaît ainsi le point *m*, le foyer *f* et le centre *c*. Tout est donc déterminé dans les conditions les plus simples.

REMARQUE.—On sait, conformément au dernier théorème énoncé dans la note du n° 108, page 284, que la projection du segment *mm'* sur le rayon vecteur *fm* est égale au demi-axe principal *b* **.

centre sur la tangente est égal au carré du demi-diamètre parallèle à cette même tangente.

* *Le produit des segments interceptés sur une même tangente, entre le point de contact et deux axes quelconques conjugués, est constant. Il a, pour expression équivalente, le carré du demi-axe parallèle à la tangente, ou, ce qui revient au même, le produit du rayon de courbure par la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente.*

** *Si l'on porte sur la normale une longueur égale au demi-axe qui lui*

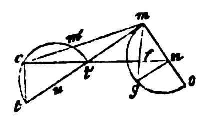
On sait aussi que la projection de la normale *mn* sur ce même rayon vecteur a, pour expression générale,

$$\frac{b^2}{a},$$

a étant le demi-axe principal dirigé suivant la droite des foyers.

Considérons, en dernier lieu, le cas de l'hyperbole.

Fig. 39.



On a, comme pour l'ellipse,

$$p.\rho. = a'^2.$$

Sur la droite *mc* déterminons le point *m'* d'après la condition

$$mm'.mc = a'^2 = p.\rho.$$

Soit *u* le point où la perpendiculaire élevée sur *mc*, par le milieu du segment *m'c*, vient couper la tangente en *m*. Du point *u* comme centre, avec la longueur *uc* = *um'* prise pour rayon, décrivons la demi-circonférence *tem't'* et tirons les droites *tc*, *t'c*.

Il est visible, comme tout à l'heure, que les axes principaux de l'hyperbole cherchée sont dirigés respectivement, l'un suivant *ct'*, l'autre suivant *ct*. La construction s'achève ensuite de la même manière que pour le cas de l'ellipse.

Veut-on procéder par voie de calcul? En désignant, par *b'*, le demi-axe *cm* et, par *a'*, son conjugué, l'équation (8), où l'on peut remplacer *co* par la différence *mo'* — *mc*, donne d'abord

$$b' = \frac{mo'.\rho}{\rho + \frac{4\lambda^2}{\rho} - \frac{\rho''}{3}},$$

est perpendiculaire, et qu'on projette cette longueur sur le rayon vecteur mené par l'un des foyers, la projection est constamment égale au demi-axe b.

puis, substituant à λ et à mo' leurs valeurs respectives $\frac{\rho'}{3}$, $\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\rho'}{3}\right)^2}$

$$b' = \frac{3\rho^2 \sqrt{\rho'^2 + 9\rho^2}}{4\rho'^2 + 9\rho^2 - 3\rho\rho''}.$$

On a, d'ailleurs,

$$p = b' \cos\alpha = \frac{b'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3\rho b'}{\sqrt{\rho'^2 + 9\rho^2}},$$

et de là résulte

$$a' = \sqrt{p \cdot \rho} = \frac{3\rho^2}{\sqrt{4\rho'^2 + 9\rho^2 - 3\rho\rho''}}.\,*$$

Dans le cas particulier où l'on a

$$4\rho'^2 + 9\rho^2 - 3\rho\rho'' = 0,$$

la conique cherchée est une parabole, et l'on ne peut plus faire usage de l'équation

$$a'^2 = p\rho.$$

Ce cas, le plus simple de tous, se résout comme nous l'avons indiqué ci-dessus. Les déterminations numériques qui correspondent à cette solution n'offrant aucune difficulté, nous n'insisterons pas davantage.

* Le cas de l'hyperbole correspond à celui où le trinôme placé sous le signe du radical est négatif. Il faut alors changer le signe de ce trinôme.

CHAPITRE VIII.

COURBES A DOUBLE COURBURE.

Considérations géométriques sur la génération des courbes dans l'espace.

127. Considérons le double mouvement d'un point μ et d'une droite D, le point glissant sur la droite et la droite tournant autour du point, tous deux incessamment.

Soit m le lieu occupé par le point μ à un instant quelconque déterminé. Lorsque le point μ sort du lieu m, la directrice D tourne autour de ce lieu et les vitesses de ses différents points sont toutes dirigées dans un seul et même plan. Soit P ce plan. Cela revient à dire que la droite D tourne autour du point μ dans le plan P. Il s'ensuit que ce plan remplit par rapport à cette droite un rôle tout à fait analogue à celui qu'elle remplit elle-même par rapport au point μ. Eu égard à cette analogie, nous désignerons le plan P sous le nom de *Plan directeur*.

Le plan directeur étant assujetti à passer constamment par la directrice, deux cas sont possibles, selon qu'il reste fixe ou qu'il change incessamment de direction.

Dans le premier cas, le point μ se meut dans un seul et même plan. Sa trace est donc plane.

Dans le second cas, le plan directeur tourne autour de la directrice en même temps que la directrice tourne autour du point μ, et comme ces deux rotations sont, en général, incessantes, il s'ensuit qu'il n'est aucune partie de la trace du point μ qui puisse demeurer plane. A la courbure qui subsisterait seule, si l'on supprimait la rotation du plan directeur, s'ajoute, en chaque point, *une sorte de torsion* désignée sous le nom de *deuxième courbure*. De là vient la dénomination de *courbes à double courbure* donnée

aux courbes qui ne sont planes sur aucune partie de leur étendue.

Soit v la vitesse du point μ au sortir du lieu m. A cette vitesse du point μ correspondent deux vitesses angulaires simultanées, l'une w, l'autre w'; la première est celle de la directrice D autour du point μ, la seconde, celle du plan directeur P autour de la directrice D.

La vitesse v est dirigée suivant la droite D. Elle dépend de la position que cette droite affecte à l'instant que l'on considère. Les rotations établies, l'une autour du point μ, l'autre autour de la droite D, ne modifient en rien sa détermination actuelle.

La rotation w est établie autour du point μ dans le plan P. Elle dépend, quant à sa direction, de la position que ce plan affecte à l'instant que l'on considère. L'état de mouvement qu'elle communique aux différents points de la directrice D n'est modifié en rien par la rotation du plan P autour de cette droite.

La rotation w' est établie autour de la directrice D. Elle est sans effet par rapport aux différents points de cette droite. Les vitesses qu'elle communique aux autres points du plan P sont toutes normales à ce plan et respectivement proportionnelles aux perpendiculaires abaissées de ces points sur la directrice.

Considéré par rapport à la courbe à double courbure engendrée ou décrite par le point μ, le plan P prend le nom de *plan osculateur*. De tous les plans menés par la directrice il est évidemment celui qui se rapproche le plus de la courbe dans le voisinage du point m, lieu actuel du point μ.

La tangente en m coïncide avec la position correspondante de la directrice. Le plan mené par le point m perpendiculairement à cette droite prend le nom de *plan normal*. Ce plan est le lieu des normales menées par le point m. Parmi ces normales il en est une qui se distingue des autres, c'est la normale située dans le *plan osculateur*. On la désigne sous le nom de *normale principale*.

Concevons que le point μ soit lié à la normale principale, et qu'il sorte du lieu m en entraînant cette droite avec lui. Deux états de mouvement simultanés et distincts animent la normale

principale. Le premier est identiquement le même que si le plan osculateur demeurait fixe dans la position qu'il affecte au point m et que, d'ailleurs, rien ne fût changé, ni dans la vitesse v du point μ, ni dans la rotation w de sa directrice. Il détermine la courbure proprement dite dans les mêmes conditions et de la même manière que pour le cas des courbes planes. Le second résulte exclusivement de la rotation w' établie autour de la directrice du point μ. Il détermine ce qu'on nomme *la deuxième courbure*. Son effet, relativement à la normale principale, est de la faire tourner autour du point μ dans le plan normal et d'imprimer ainsi, à ses différents points, des vitesses perpendiculaires à celles qui résultent de la rotation établie, dans le premier état, autour du centre du cercle osculateur.

128. Les détails dans lesquels nous venons d'entrer constituent, dans leur ensemble, la base géométrique de la théorie générale des courbes à double courbure. Ils mettent, d'ailleurs, en évidence les résultats suivants :

La courbe à double courbure est la trace d'un point qui se meut sur une droite et dans un plan mobiles, le point glissant sur la droite tandis que la droite tourne autour du point et le plan autour de la droite, tous trois incessamment.

Soit μ le point décrivant, D la directrice de ce point, P le plan mobile.

Le plan P *prend le nom de* PLAN DIRECTEUR, *ou celui de* PLAN OSCULATEUR, *suivant qu'on le considère par rapport à la directrice du point décrivant, ou par rapport à la courbe décrite.*

La directrice du point μ *est, relativement au plan mobile* P, *la droite qu'on désigne, en général, sous le nom de* CARACTÉRISTIQUE.

La courbe décrite par le point μ *est l'enveloppe des positions successives de la droite* D.

Le point μ *étant supposé fixe sur la normale principale et celle-ci se mouvant avec ce point, le centre du cercle osculateur*

est le point de la normale principale dont la vitesse résulte exclusivement de la rotation établie autour de la directrice du point μ. *Il se distingue, généralement, du* POINT CENTRAL, *celui-ci étant le point de la normale principale dont la vitesse est la plus petite en grandeur absolue.*

Transportons, en un même point m, la vitesse v du point μ et la vitesse u du centre du cercle osculateur. Représentons la première par mt, la seconde par mn. L'angle nmt est droit. Tirons l'hypoténuse nt, et désignons, par p, le pied de la perpendiculaire abaissée du point m sur cette hypoténuse.

Fig. 60.

La vitesse du point central est représentée par la perpendiculaire mp.

Le point central est situé sur le segment compris entre le point décrivant et le centre du cercle osculateur, de manière à diviser ce segment comme le point p *divise l'hypoténuse* tn.

Désignons, par v', la vitesse du point central; par ρ, le rayon de première courbure; par e, la distance comprise entre le point central et le centre du cercle osculateur. On trouve aisément

$$(1). \quad \ldots \ldots \quad v' = \frac{u \cdot v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \cdot$$

$$(2). \quad \ldots \quad e = \rho \frac{u^2}{u^2 + v^2} = \rho \left(\frac{v'}{v}\right)^2 \cdot$$

$$(3). \quad \ldots \quad \rho - e = \rho \frac{v^2}{u^2 + v^2} = \rho \left(\frac{v'}{u}\right)^2 \cdot$$

Formules élémentaires de la géométrie à trois dimensions.

129. Nous admettrons, dans ce qui suit, que les lignes considérées sont rapportées à trois axes coordonnés rectangulaires OX, OY, OZ.

Fig. 61.

Soit, d'abord, une droite quelconque D, ayant, pour équations,

$$x = az + h, \qquad y = bz + i,$$

Sur la droite D, prenons une longueur *mn* égale à l'unité, et projetons cette longueur sur chacun des trois axes OX, OY, OZ.

En désignant, par α, l'angle que la droite D fait avec l'axe OX, la projection, sur cet axe, de la longueur *mn* est $\cos\alpha$.

On a, de même, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$, pour projections de la longueur *mn* sur les axes OY, OZ, β et γ étant les angles que la droite D fait avec ces axes. De là résulte, en premier lieu,

$$(1). \quad \ldots \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

On voit d'ailleurs aisément que les paramètres *a* et *b* ont respectivement, pour valeurs,

$$(2). \quad \ldots \quad a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \qquad b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

De là, et eu égard à l'équation (1), résulte en second lieu,

$$(3). \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Soit une seconde droite D', ayant, pour équations,

$$x = a'z + h', \qquad y = b'z + i',$$

et faisant, avec les axes OX, OY, OZ, des angles représentés respectivement par α', $6'$, γ'.

Si l'on désigne, par ω, l'angle des droites D, D', et que l'on prenne, à partir du point m, sur une parallèle à la droite D', une longueur mn' égale à l'unité, il vient

$$\overline{nn'}^2 = 2\,[1 - \cos\omega],$$

et, comme on a, d'ailleurs,

$$\overline{nn'}^2 = [\cos\alpha - \cos\alpha']^2 + [\cos 6 - \cos 6']^2 + [\cos\gamma - \cos\gamma']^2$$
$$= 2\,[1 - \cos\alpha\cos\alpha' - \cos 6\cos 6' - \cos\gamma\cos\gamma'],$$

il en résulte évidemment

$$(4). \quad \cos\omega = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos 6\cos 6' + \cos\gamma\cos\gamma'$$
$$= \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)(a'^2 + b'^2 + 1)}}.$$

Supposons les droites D, D' rectangulaires. L'équation (4) donne, pour relation correspondante à cette hypothèse,

$$(5). \quad \cos\alpha\cos\alpha' + \cos 6\cos 6' + \cos\gamma\cos\gamma' = o,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6). \quad \ldots\ldots\ldots\quad aa' + bb' + 1 = o.$$

150. Soit un plan P, ayant, pour équation,

$$(1). \quad \ldots\ldots\quad Ax + By + Cz = D.$$

Désignons, par μ, un point mobile assujetti à glisser dans le plan P ; par m, le lieu du point μ à l'instant que l'on considère; par n, un point quelconque de la perpendiculaire élevée en m sur

le plan P; par t, u, v, les coordonnées du point n; par R, la distance du point fixe n au point mobile μ. On a, généralement,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad (t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2=R^2,$$

x, y, z étant les coordonnées du point μ, et satisfaisant, en conséquence, à l'équation (1).

Lorsque le point μ sort du lieu m, c'est suivant une certaine direction et avec un certain degré de rapidité. Quelle que soit la vitesse ainsi déterminée; quelles que soient ses trois composantes dx, dy, dz; cette vitesse est dirigée perpendiculairement à la droite $n\mu$, et l'on a, par conséquent,

$$dR=o.$$

Supposons que le point μ se déplace parallèlement au plan des xz. Différenciées, dans cette hypothèse, les équations (1) et (2) donnent

$$Adx+Cdz=o, \qquad (t-x)\,dx+(v-z)\,dz=o,$$

et, par suite,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad t-x=\frac{A}{C}(v-z).$$

On trouverait, de même, en supposant que le point μ sorte du lieu m parallèlement au plan des yz,

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad u-y=\frac{B}{C}(v-z).$$

Les équations (3) et (4) s'appliquent, indifféremment, à toutes les positions qu'on peut assigner au point n sur la normale en m au plan P. Il s'ensuit qu'*elles sont les équations de cette même normale.*

Voici d'ailleurs les conséquences :

Soit D une droite quelconque, ayant, pour équations,

$$x=az+h, \qquad y=bz+i.$$

Veut-on que cette droite soit perpendiculaire au plan P ? Il faut que l'on ait, conformément à ce qui précède,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad a = \frac{A}{C}, \qquad b = \frac{B}{C}.$$

Veut-on que la droite D soit parallèle au plan P ? Il faut que la normale à ce plan lui soit perpendiculaire. Cette dernière condition exige que l'on ait, conformément à la formule (6) du n° 129,

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad Aa + Bb + C = o. \; *$$

Telle est donc aussi la condition du parallélisme entre le plan P et la droite D.

Soient λ, μ, ν les angles que la normale au plan P fait avec les axes OX, OY, OZ. On a, conformément aux formules (5) du n° 129,

$$(7) \quad \cos\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\nu = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Étant donné un second plan P', ayant, pour équation,

$$A'x + B'y + C'z = D',$$

désignons, par φ, l'angle des plans P, P'. On sait que l'angle de deux plans est celui que font entre elles leurs normales respecti-

* *Autrement et directement.* Le point μ glissant dans le plan P, les composantes de sa vitesse satisfont à l'équation

$$Adx + Bdy + Cdz = 0.$$

Supposons la droite D parallèle à la direction suivie par le point μ. On a

$$a = \frac{dx}{dz}, \qquad b = \frac{dy}{dz}.$$

De là résulte, en substituant,

$$Aa + Bb + C = 0.$$

ves. De là résulte, eu égard à ce qui précède et conformément à la formule (4) du n° 129,

$$(8).\quad \cos\varphi = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}.$$

Il s'ensuit que la condition à remplir pour la perpendicularité des deux plans P, P′ est exprimée par l'équation

$$(9).\quad AA' + BB' + CC' = 0.$$

Reprenons la droite D et supposons-la quelconque. Si l'on désigne, par ω, l'angle qu'elle fait avec la normale au plan P, il vient, en général, conformément à la formule (4) du n° 129,

$$(10).\quad \cos\omega = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

Conditions analytiques du mouvement d'une droite dans l'espace.

131. Lorsqu'une droite se meut, on n'altère pas les vitesses de ses différents points en établissant autour de la droite une rotation quelconque. S'agit-il, seulement, des positions qu'une droite mobile, *considérée comme ligne indéfinie*, prend successivement dans l'espace? S'agit-il, en même temps, des équations de cette droite? On ne change, en rien, ni ces positions, ni ces équations, en assujettissant la droite à glisser, comme on veut, sur elle-même. Cette observation ne doit pas être perdue de vue dans les différents cas d'application.

Étant donnée une droite qui se meut dans l'espace, désignons-la par D′ et plaçons-nous à l'instant précis où elle sort d'un des lieux qu'elle occupe successivement. Soient

$$(1).\quad x = az + h, \qquad y = bz + i,$$

les équations du lieu occupé par la droite D à l'instant que l'on

considère. Les paramètres, a, b, h, i dépendent, en général, d'une seule et même variable, et chaque valeur de cette variable détermine une position correspondante de la droite mobile.

Prenons dans l'espace un plan quelconque P, supposé fixe, et ayant, pour équation,

$$Ax + By + Cz = o.$$

En désignant, par ω, l'angle que la normale à ce plan fait avec la droite D, on a, en général,

$$\cos\omega = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

De là résulte, pour le cas particulier où le plan P est pris parallèle à la droite D,

(2). . . . . . . $Aa + Bb + C = o,$

et, par suite,

$$d\omega = -\frac{Ada + Bdb}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

Posons

(3). . . . . . . $Ada + Bdb = o.$

Les équations (2) et (3) suffisent à la détermination du plan P. La première exprime que ce plan est parallèle à la droite D : la seconde, que la vitesse angulaire $d\omega$ est nulle à l'origine du déplacement considéré, c'est-à-dire que la droite D sort du lieu qu'elle occupe, sans prendre, d'abord, aucune inclinaison par rapport à ce plan.

Ce résultat peut s'énoncer comme il suit :

Lorsqu'une droite sort du lieu qu'elle occupe, c'est, D'ABORD, *en restant parallèle à un plan déterminé.*

On voit, d'ailleurs, qu'en représentant, par

$$Ax + By + Cz = o,$$

l'équation de ce plan, et par

$$x = az + h, \qquad y = bz + i,$$

les équations correspondantes de la droite mobile, on a, pour fixer la direction du plan dont il s'agit, les deux équations simultanées

(4). . . . . $Aa + Bb + C = o;$

(5). . . . . $Ada + Bdb = o.$

L'équation (4) exprimant qu'il y a parallélisme entre le plan P et la droite D, on observera qu'il suffit de la différencier, par rapport aux deux variables a et b, pour exprimer que le parallélisme subsiste à l'origine du déplacement de la droite mobile, et obtenir ainsi l'équation (5). Ce procédé plus rapide et plus simple n'est pas moins rigoureux que le précédent.

132. Lorsque la droite D sort du lieu qu'elle occupe, deux cas sont possibles, selon qu'elle tourne autour de son point central *supposé fixe*, ou que ce point n'étant pas dépourvu de toute vitesse de circulation, une pareille hypothèse est inadmissible.

Considérons, d'abord, le premier de ces cas, et observons que, si le point central avait une vitesse quelconque dirigée toute entière suivant la droite D, il suffirait, pour annuler cette vitesse, de l'imprimer, en sens contraire, à tous les points de la droite mobile.

Cela posé, si nous différencions les équations (1) du n° 131, en y considérant les variables x, y, z comme étant les coordonnées du point central, nous devons égaler à zéro chacune des trois composantes dx, dy, dz. On trouve, ainsi, que l'ordonnée z du point

central doit satisfaire, en même temps, aux deux équations

(1). . . . $zda + dh = o$, $zdb + di = o$ *.

Il faut donc que l'on ait nécessairement

(2). . . . . $\frac{dh}{da} = \frac{di}{db}$,

ou, ce qui revient au même,

(3). . . . . . $db . dh - da . di = o$.

Les équations (2) et (3) expriment la condition analytique qui doit être satisfaite pour que l'état de mouvement de la droite D soit réductible à une rotation simple autour de son point central.

Cette condition reconnue nécessaire est, en même temps, suffisante. Cela résulte, évidemment, des considérations qui précèdent. Veut-on, d'ailleurs, le démontrer sans s'appuyer sur ces considérations? On y parvient aisément, comme il suit :

Reprenons les équations de la droite D

(4). . . . . $x = az + h$, $y = bz + i$,

elles donnent, en général, pour équations différentielles correspondantes,

(5). . $dx = adz + zda + dh$, $dy = bdz + zdb + di$.

Supposons que l'équation (2) subsiste, et considérons, en particulier, le point de la droite D qui correspond à l'ordonnée

(6). . . . . $z = -\frac{dh}{da} = -\frac{di}{db}$.

* On parvient à ces mêmes équations en s'en tenant aux déductions suivantes :

Lorsque la droite mobile sort du lieu qu'elle occupe, en tournant autour d'un de ses points, ce point *peut être considéré comme fixe* à l'origine du déplacement que l'on considère. Il faut donc que ses coordonnées satisfassent aux équations différentielles de la droite, lorsqu'on y pose $dx = o$, $dy = o$ $dz = o$.

Eu égard aux équations (5), on a, pour ce point,

(7). . . . . . $dx = adz, \qquad dy = bdz,$

et, comme on peut poser $dz = o$, puisqu'il suffit pour cela d'imprimer à la droite D un certain glissement sur elle-même, on voit qu'il vient, en même temps,

$$dz = o, \qquad dx = o, \qquad dy = o.$$

Il suit de là que le point, déterminé par l'équation (6), peut être considéré comme fixe et, dès lors, c'est par rotation simple autour de ce point que commence le déplacement de la droite au sortir du lieu qu'elle occupe.

On parvient au même résultat en mettant en évidence ce qu'expriment les équations (7), à savoir, que la vitesse du point déterminé par l'équation (6) sur la droite D, est dirigée tout entière suivant cette droite. En effet, si l'on désigne, par V, cette vitesse, et, par α', b', γ', les angles qu'elle fait avec les axes OX, OY, OZ, on a, d'abord,

$$V = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dz\sqrt{a^2 + b^2 + 1}.$$

Il vient, ensuite, eu égard à ce que les différentielles dx, dy, dz sont les trois composantes de la vitesse V,

$$\cos\alpha' = \frac{dx}{V} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \cos 6' = \frac{dy}{V} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},$$

$$\cos\gamma' = \frac{dz}{V} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}};$$

et ces cosinus sont, précisément, ceux des angles que la droite D fait avec les mêmes axes.

De là résulte l'énoncé suivant :

La condition nécessaire et suffisante, pour que l'état de mouvement d'une droite mobile soit réductible à une rotation simple

autour de son point central, est exprimée analytiquement par l'équation

$$(8). \quad \ldots\ldots \quad db\,.\,dh - da\,.\,di = o.$$

Il s'ensuit que les vitesses simultanées des différents points de la droite mobile sont toutes situées dans un seul et même plan. La réciproque est d'ailleurs évidente. Nous verrons, plus loin, comment l'équation (8) devient celle des surfaces développables, en exprimant que le plan tangent est le même en tous les points d'une même génératrice rectiligne.

133. Étant données les équations de la droite D,

$$(1). \quad \ldots\ldots \quad x = az + h, \qquad y = bz + i,$$

on en déduit, par la différentiation,

$$(2). \quad dx = adz + zda + dh, \qquad dy = bdz + zdb + di.$$

Soit G la vitesse de glissement commune à tous les points de la droite D. En désignant, par α, β, γ, les angles que cette droite fait avec les axes OX, OY, OZ, on a

$$(3). \quad G = dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma = \frac{adx + bdy + dz}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Les équations (2) et (3) déterminent les vitesses simultanées des différents points de la droite mobile.

Soit m un point quelconque de la droite D; U la vitesse actuelle de ce point; mn le segment de droite qui représente la vitesse U. Les coordonnées du point m étant x, y, z, désignons par t, u, v celles du point n. On a

$$dx = t - x = t - az - h, \quad dy = u - y = u - bz - i, \quad dz = v - z.$$

Substituons ces valeurs dans les équations (2) et (3), et rempla-

çons, par c, le produit $G\sqrt{a^2+b^2+1}$, dont la valeur est indépendante de la position du point m sur la droite D. On trouve, ainsi,

$$(4). \quad . \; t - av - h - dh = \frac{at + bu + v - ah - bi - c}{a^2 + b^2 + 1} \, da;$$

$$(5). \quad . \; u - bv - i - di = \frac{at + bu + v - ah - bi - c}{a^2 + b^2 + 1} \cdot db.$$

Les équations (4) et (5) déterminent la droite sur laquelle sont situées les extrémités des vitesses qui animent en même temps les différents points de la droite D. Divisées, membre à membre, elles donnent

$$(6). \quad \ldots\ldots \frac{t - av - h - dh}{u - bv - i - di} = \frac{da}{db}.$$

L'équation (6) représente un plan dont la direction demeure invariable, indépendamment de toute valeur attribuée au glissement G et à la vitesse d'accroissement de la variable indépendante. Il suit de là que ce plan doit avoir même direction que le plan P du n° 131. On vérifie cette déduction en observant que, si l'on désigne, par A, B, C, les coefficients des coordonnées courantes t, u, v, les valeurs qu'ils affectent dans l'équation (6) sont les mêmes que celles qui résultent des équations de condition

$$Aa + Bb + C = o, \qquad Ada + Bdb = o.$$

La droite déterminée par les équations (4) et (5) varie de position avec la grandeur du segment mn, ou, ce qui revient au même, avec la vitesse d'accroissement attribuée à la variable indépendante. Mais, d'un autre côté, elle est comprise dans le plan déterminé par l'équation (6), et, par conséquent, elle ne cesse pas d'être parallèle au plan P. La conséquence est que le lieu des positions qu'elle prend, pour toutes les valeurs du segment mn, est un paraboloïde hyperbolique.

Remarque. — Eu égard à l'équation (3), il est aisé de voir qu'en posant

(7). . . . . . $adx + bdy + dz = o,$

on annule la vitesse de glissement G, et qu'en conséquence, on rend les vitesses des différents points de la droite mobile toutes perpendiculaires à cette droite.

On peut se donner *à priori* l'équation (7). Elle exprime, par elle seule, que la vitesse du point m est dirigée perpendiculairement à la droite D. Il s'ensuit qu'il en est nécessairement de même pour les vitesses simultanées de tous les autres points. Cette déduction se vérifie très-simplement par le calcul. Soit en effet m' un second point quelconque de la droite D, et x', y', z' les coordonnées de ce point. La distance mm' demeurant invariable, on a, d'abord,

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \text{cons}^{\text{te}}.,$$

et, par suite,

$$(x - x')(dx - dx') + (y - y')(dy - dy') + (z - z')(dz - dz') = o.$$

Mais, d'un autre côté, les équations (1) donnent

$$x - x' = a(z - z'), \qquad y - y' = b(z - z'),$$

il vient donc, en substituant, et supprimant le facteur commun $z - z'$,

(8). . . $a(dx - dx') + b(dy - dy') + dz - dz' = o.$

La combinaison des équations (7) et (8) montre que l'on ne peut avoir

$$adx + bdy + dz = o,$$

sans qu'il n'en résulte

$$adx' + bdy' + dz' = o.$$

La conclusion est d'ailleurs évidente.

Conditions analytiques du mouvement d'un plan dans l'espace.

134. Soit

$$(1). \quad \ldots\ldots \quad Ax + By + Cz = K,$$

l'équation d'un plan P, supposé mobile dans l'espace et considéré à l'instant précis où il sort d'un des lieux qu'il occupe successivement. Les paramètres A, B, C, K dépendent, en général, d'une seule et même variable, et chaque valeur de cette variable détermine une position correspondante du plan mobile.

Lorsque le plan P sort du lieu qu'il occupe, c'est, en général, par rotation autour d'une droite située dans ce plan et désignée sous le nom de *caractéristique*. Dans tous les cas, lors même que cette propriété ne serait pas connue d'avance, on peut toujours faire abstraction du mouvement du plan sur lui-même, et considérer ceux de ses points qu'il est permis de regarder comme fixes à l'origine de son déplacement. Ces points se distinguent des autres en ce que leurs vitesses sont nulles, et qu'ils satisfont, en conséquence, à l'équation différentielle

$$(2). \quad \ldots\ldots \quad xdA + ydB + zdC = dK.$$

Il suit de là que les points dont il s'agit sont situés sur la droite représentée par les équations (1) et (2). Concluons que ces équations sont celles de la caractéristique.

On parvient au même résultat, en partant de l'équation différentielle

$$(3). \quad . \quad Adx + Bdy + Cdz + xdA + ydB + zdC = dK.$$

En effet, puisque cette équation subsiste, en même temps, pour tous les points du plan P, on peut distinguer, parmi ces points, ceux dont les vitesses actuelles sont compatibles avec un état de mouvement qui résulterait, exclusivement, d'un déplacement du

plan P sur lui-même. Lorsqu'on raisonne dans l'hypothèse où le plan P ne sort pas du lieu qu'il occupe, on doit regarder les paramètres A, B, C, K comme constants. Il vient alors

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A dx + B dy + C dz = o.$$

Or, on veut que cette équation subsiste en même temps que l'équation (3). Celle-ci se réduit donc à l'équation (2). Réciproquement, si l'on considère les points du plan P déterminés par l'équation (2), les vitesses actuelles de ces points satisfont à l'équation (4).

On voit, par là, que, si la caractéristique se meut, c'est dans le plan P, et l'on a l'énoncé suivant :

L'état de mouvement d'un plan, qui se meut dans l'espace, résulte, en général, du mouvement d'une droite supposée fixe dans le plan mobile, et d'une rotation de ce plan, la droite ne sortant pas du lieu occupé par le plan mobile à l'instant que l'on considère et le plan tournant autour de cette droite.

La droite, dont il s'agit, prend le nom de *caractéristique*. Le mouvement qu'elle a dans le plan mobile se communique à ce plan, sans en changer la position dans l'espace ni, par conséquent, l'équation. On peut donc la regarder comme fixe, en ce qui concerne, à chaque instant, le mouvement angulaire du plan mobile et les vitesses qui animent les différents points de ce plan perpendiculairement à sa direction actuelle. On voit d'ailleurs, d'après ce qui précède, que la caractéristique est déterminée par les équations (1) et (2).

On observera que les vitesses simultanées des différents points de la caractéristique sont dirigées à chaque instant dans un seul et même plan. Il s'ensuit que cette droite remplit les conditions de la droite mobile du n° 132, et que le lieu de ses positions successives est une surface développable *.

* Il est aisé de voir que la condition, nécessaire et suffisante pour qu'une surface réglée soit développable, consiste en ce qu'elle n'ait qu'un seul et même

Considérons le point de la caractéristique dont la vitesse est nulle, ou peut être supposée nulle, parce qu'elle est dirigée tout entière suivant cette droite. Les équations de ce point ne satisfont pas seulement aux équations (1) et (2), mais, en outre, à celles qui s'en déduisent par la différentiation, soit en égalant à zéro chacune des différentielles dx, dy, dz, soit en annulant, comme on l'a vu tout à l'heure, l'ensemble des termes qui correspondent à la différentiation effectuée par rapport aux variables x, y, z. On retrouve ainsi l'équation (2), et l'on obtient, en outre, l'équation suivante :

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad xd^2A + yd^2B + zd^2C = d^2K.$$

Le point déterminé par les équations (1), (2), (3) est le point cherché. Le lieu de ces points résulte de l'élimination de la variable indépendante entre ces mêmes équations. Il est l'enveloppe des positions successives de la caractéristique. Ce lieu prend le nom d'*arète de rebroussement*, par rapport à la surface développable que déterminent les positions successives de la caractéristique.

Rectification des courbes à double courbure.

133. Considérons une courbe quelconque, située dans l'espace. Désignons-la, par S, et supposons que ses équations soient ramenées à la forme

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = f(z), \qquad y = \varphi(z).$$

Soit μ un point mobile, assujetti à décrire la ligne S et sortant du lieu m à l'instant que l'on considère.

plan tangent pour tous les points d'une même génératrice quelconque rectiligne. Lorsque cette condition est remplie, la surface peut s'appliquer sur un plan, point par point, *sans déchirure ni duplicature*, sans extension ni contraction d'aucune des lignes qui y sont tracées. On dit alors qu'elle est développable. Telles sont, en général, les surfaces coniques et cylindriques. Nous reviendrons sur ce point, de manière à ne laisser prise à aucune objection, lorsque nous nous occuperons plus loin de la théorie des surfaces.

Si nous représentons, par x, y, z, les coordonnées du point μ, et par s, la distance comprise sur la courbe entre un point fixe situé sur cette ligne et le point μ, la vitesse du point décrivant a, pour expression générale,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

dx, dy, dz étant les composantes respectivement parallèles aux axes coordonnés rectangulaires OX, OY, OZ. On a, d'ailleurs, comme résultat de la différentiation des équations (1),

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad dx = f'(z) . dz, \qquad dy = \varphi'(z) . dz.$$

De là résulte, en premier lieu,

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ds = dz \sqrt{1 + f'(z)^2 + \varphi'(z)^2},$$

et, s'il s'agit de la rectification de l'arc s,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad \Delta s = \Delta z . \mathrm{M}_z^{z+\Delta z} \sqrt{1 + f'(z)^2 + \varphi'(z)^2}.$$

Tangentes et plans normaux.

136. Sans rien changer aux notations précédentes, désignons, par T, la tangente en m à la courbe S; par t, u, v, les coordonnées courantes de la tangente T; par α, 6, γ, les angles de cette droite avec les axes OX OY, OZ. La droite T étant dirigée suivant la vitesse qui anime le point μ, au sortir du lieu m, il suffit de poser

$$(1). \quad . \quad dx = t - x, \qquad dy = u - y, \qquad dz = v - z,$$

et de substituer ces valeurs dans les équations (3) du n° 135, pour obtenir les équations de la tangente T. On trouve ainsi

$$(2). \quad . \quad t - x = (v - z) f'(x), \qquad u - y = (v - z)\varphi'(z).$$

On a, d'ailleurs,

$$(3). \quad . \quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos 6 = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Supposons, maintenant, que les coordonnées t, u, v soient celles d'un point quelconque n, situé dans le plan Q mené par le point m perpendiculairement à la tangente T. Le point n étant considéré comme fixe, tirons la droite qui le joint au point μ et désignons, par R, la distance comprise entre ces deux points. On a, généralement,

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad (t-x)^2 + (u-y)^2 + (v-z)^2 = R^2.$$

La vitesse qui anime le point μ, au sortir du lieu m, est perpendiculaire à la droite $n\mu$. Il suit de là que la vitesse correspondante dR est nulle, et qu'il vient, en différenciant l'équation (4),

$$(5). \quad . \quad . \quad (t-x)dx + (u-y)dy + (v-z)dz = o.$$

L'équation (5) s'applique à toutes les positions que le point n peut prendre dans le plan Q. Elle est donc l'équation de ce plan. Eu égard aux équations (3) du n° 135, on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$(6). \quad . \quad . \quad (t-x)f'(x) + (u-y)\varphi'(z) + v - z = o$$

Concluons que les équations (1) et (2) sont celles de la tangente en m à la ligne S, et que celle du plan normal, mené par ce même point, est indifféremment l'une ou l'autre des équations (5) et (6).

Plan osculateur.

137. Soit D la directrice du point μ. Lorsque le point μ sort du lieu m, la droite D tourne autour du point μ, et les vitesses de ses différents points sont toutes dirigées dans un seul et même plan P. Ce plan est, pour le point m, le plan osculateur de la courbe S. C'est dans ce plan que commence la rotation de la tangente, lorsque le point de contact se déplace continûment.

Si l'on désigne, par t, u, v, les coordonnées courantes et, par x,

y, z, celles du point de contact, on a, pour équations générales de la directrice D, ou, ce qui revient au même, de la tangente T,

$$(1)\ldots\quad t - x = \frac{dx}{dz}(v - z),\qquad u - y = \frac{dy}{dz}(v - z).$$

Le plan P passant par le point m, son équation est de la forme

$$(2)\ldots\quad A(t - x) + B(u - y) + C(v - z) = o.$$

On a, d'ailleurs, conformément aux équations de condition (4) et (5) du n° 131, page 344,

$$(3).\ .\quad A\frac{dx}{dz} + B\frac{dy}{dz} + C = o,\qquad A.d\frac{dx}{dz} + B.d\frac{dy}{dz} = o.$$

Les équations (3) déterminent les valeurs des coefficients $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$. En substituant ces valeurs dans l'équation (2), on trouve, après réduction,

$$(4).\ .\quad (t - x)(dzd^2y - dyd^2z) + (u - y)(dxd^2z - dzd^2x) + (v - z)(dyd^2x - dxd^2y) = o,$$

et telle est l'équation du plan osculateur.

On parvient au même résultat en combinant l'équation (2) avec celles qui s'en déduisent par deux différentiations faites successivement par rapport aux coordonnées x, y, z. La première des équations différentielles que l'on obtient ainsi est

$$(5)\ldots\quad Adx + Bdy + Cdz = o.$$

La seconde est, de même,

$$(6)\ldots\quad Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = o.$$

En écrivant l'équation (5), on exprime que la vitesse du point μ, au sortir du lieu m, ne sort pas du plan P considéré comme fixe. Cela revient à dire que la tangente, en m, à la ligne S est située dans ce plan.

En écrivant l'équation (6), comme conséquence d'une différentiation effectuée en même temps sur les équations (2) et (5), on exprime que la directrice du point μ ne sort pas du plan P, à l'origine de son déplacement, ou, ce qui revient au même, que les vitesses actuelles de ses différents points sont toutes dirigées dans le plan P.

Il suit de là que les équations (5) et (6) déterminent les valeurs que les coefficients $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ doivent affecter, pour que le plan P devienne osculateur.

Nous avons admis, dans ce qui précède, que le déplacement d'une tangente à la courbe S peut être considéré comme ayant lieu par rotation simple autour du point de contact. Les principes sur lesquels nous nous appuyons n'exigent, à cet égard, aucune démonstration particulière. On peut, néanmoins, recourir au calcul comme moyen de vérification.

En comparant les équations de la tangente T à celles de la droite mobile du n° 152, page 344, on a, évidemment,

$$a = \frac{dx}{dz}, \quad b = \frac{dy}{dz}, \quad h = x - z\frac{dx}{dz}, \quad i = y - z\frac{dy}{dz}.$$

De là résulte

$$da = d.\frac{dx}{dz}, \quad db = d.\frac{dy}{dz}; \quad dh = -z.d\frac{dx}{dz}, \quad di = -z.d\frac{dy}{dz},$$

et, par suite,

$$(7). \quad \dots\dots \quad \frac{dh}{da} = \frac{di}{db} = -z.$$

L'équation (7) implique, comme conséquences, les déductions suivantes, qu'il est, d'ailleurs, permis d'établir directement et *à priori :*

1° *Le déplacement de la tangente peut être considéré comme résultant d'une simple rotation, établie autour du point de contact ;*

2° *Pris à son origine, et continué d'après le mode qui le régit d'abord, le changement de direction tangentielle s'effectue suivant un plan déterminé;*

3° *Le lieu géométrique des tangentes est une surface développable.*

Ajoutons, comme conséquences subsidiaires, que, dans le développement de cette surface, la courbe donnée conserve, en chaque point, sa courbure, et que toute trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes a, pour développée, l'enveloppe de ces mêmes génératrices, c'est-à-dire la courbe que l'on considère.

Normale principale.

138. La normale située dans le plan osculateur est dite *normale principale.* Pour obtenir ses équations, il suffit de joindre à l'équation du plan osculateur

$$(1). \quad (t-x)(dzd^2y-dyd^2z)+(u-y)(dxd^2z-dzd^2x) + (v-z)(dyd^2x-dxd^2y)=o,$$

celle du plan normal

$$(2). \quad (t-x)\,dx+(u-y)\,dy+(v-z)\,dz=o.$$

Veut-on, d'ailleurs, ramener ces équations à la forme ordinaire? On trouve par leur combinaison *,

$$(3). \quad \begin{cases} t-u=\dfrac{dsd^2x-dxd^2s}{dsd^2z-dzd^2s}(v-z)=\dfrac{d.\dfrac{dx}{ds}}{d.\dfrac{dz}{ds}}(v-z), \\[2ex] u-y=\dfrac{dsd^2y-dyd^2s}{dsd^2z-dzd^2s}(v-z)=\dfrac{d.\dfrac{dy}{ds}}{d.\dfrac{dz}{ds}}(v-z). \end{cases}$$

* On observera que l'on a généralement

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

Soient λ, μ, ν les angles que la normale principale fait avec les axes coordonnés OX, OY, OZ. On a, d'abord,

$$(4)\quad \left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2=\frac{1}{ds^2}[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2],$$

et, par suite,

$$(5).\quad \begin{cases} \cos\lambda=\dfrac{ds.d.\dfrac{dx}{ds}}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}, \\ \cos\mu=\dfrac{ds.d\dfrac{dy}{ds}}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}, \\ \cos\nu=\dfrac{ds.d\dfrac{dz}{ds}}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2}}. \end{cases}$$

On sait que c'est en tournant autour de la directrice du point décrivant, que le plan osculateur se déplace sur la courbe. La normale principale participe à cette rotation, en même temps qu'elle tourne dans le plan osculateur autour du centre de première courbure. Il suit de là que les vitesses de ses différents points ne sont pas dirigées dans un même plan et qu'en conséquence, le lieu de ses positions successives est, en général, une surface gauche. Pour qu'il en fût autrement, il faudrait que le plan osculateur demeurât invariable. Cette dernière circonstance ne peut

et que de là résulte

$$dsd^2s=dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z.$$

C'est en tenant compte de ces relations que l'on parvient aux équations (3) et aux équations suivantes

se présenter que dans le cas des courbes planes, alors que l'on a, généralement,

$$1^\circ \ldots\ldots\quad d.\frac{dxd^2z - dzd^2x}{dzd^2y - dyd^2z} = o;$$

$$2^\circ \ldots\ldots\quad d.\frac{dyd^2x - dxd^2y}{dzd^2y - dyd^2z} = o;$$

$$3^\circ .\quad d\left[x + y.\frac{dxd^2z - dzd^2x}{dzd^2y - dyd^2z} + z\frac{dyd^2x - dxd^2y}{dzd^2y - dyd^2z}\right] = o,$$

ou, plus simplement,

$$(6)\ \ldots\quad dx\,[d^2yd^3z - d^2zd^3y] + dy\,[d^2zd^3x - d^2xd^3z] + dz\,[d^2xd^3y - d^2yd^3x] = o,$$

cette dernière condition n'étant que la transformée commune à chacune des trois autres.

Expression analytique de la vitesse angulaire avec laquelle une droite qui se meut dans l'espace s'écarte, à chaque instant, de la position dont elle sort.

139. Étant donnée une droite D, supposée mobile dans l'espace, proposons-nous de déterminer l'expression analytique de la vitesse angulaire avec laquelle cette droite s'écarte, à chaque instant, de la position dont elle sort.

Soit w cette vitesse : elle est la même, à chaque instant, que pour une droite D′, menée par un point fixe et assujettie à tourner autour de ce point, en restant parallèle à la droite D.

Prenons l'origine des coordonnées pour point fixe et représentons, par Om, la droite D′ menée, par ce point, parallèlement à la droite D*.

Le point m étant supposé fixe sur la droite D′, et la distance Om

* Voir la figure 61, page 338.

étant prise égale à l'unité, il est visible que la vitesse du point m, au sortir du lieu qu'il occupe, satisfait aux conditions suivantes :

1° Elle est dirigée perpendiculairement à Om dans le plan P du n° 131, page 342;

2° Elle est égale en grandeur à la quantité w.

Soient α, β, γ les angles que la droite Om fait avec les axes OX, OY, OZ. Soient, en même temps, α', β', γ' ceux que la vitesse w du point m fait avec ces mêmes axes.

En désignant par x, y, z les coordonnées du point m, on a, évidemment,

$$x = \cos\alpha, \qquad y = \cos\beta, \qquad z = \cos\gamma.$$

Il s'ensuit que les projections du point m sur les axes OX, OY, OZ, ont, pour vitesses respectives,

$$dx = d\cos\alpha, \qquad dy = d\cos\beta, \qquad dz = d\cos\gamma.$$

Mais, d'un autre côté, les composantes de la vitesse du point m suivant ces mêmes axes sont, respectivement,

$$w\cos\alpha', \qquad w\cos\beta', \qquad w\cos\gamma'.$$

De là résulte

$$w\cos\alpha' = d\cos\alpha, \quad w\cos\beta' = d\cos\beta, \quad w\cos\gamma' = d\cos\gamma.$$

et, par suite,

$$(1).\ \ .\ \ .\ \ w = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

S'agit-il, en outre, de la direction commune aux vitesses simultanées des différents points de la droite D'? On a,

$$(2).\ \ .\ \ \left\{\begin{aligned} \cos\alpha' &= \frac{d\cos\alpha}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}}, \\ \cos\beta' &= \frac{d\cos\beta}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}}, \\ \cos\gamma' &= \frac{d\cos\gamma}{\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}}. \end{aligned}\right.$$

La valeur obtenue pour la vitesse w peut se déduire, par voie analytique, de l'expression générale du cosinus de l'angle de deux droites.

Soient en effet λ, μ, ν les angles qu'une droite fixe F fait avec les axes OX, OY, OZ. En désignant, par φ, l'angle des deux droites D et F, on a, généralement,

$$\cos\varphi = \cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos6 + \cos v\cos\gamma.$$

Une première différentiation donne

$$\sin\varphi . d\varphi = -[\cos\lambda . d\cos\alpha + \cos\mu . d\cos6 + \cos\nu . d\cos\gamma].$$

Il vient ensuite, en différenciant une seconde fois,

$$(3). \quad \cos\varphi . d\varphi^2 + \sin\varphi . d^2\varphi = -[\cos\lambda . d^2\cos\alpha + \cos\mu . d^2\cos6 + \cos\nu . d^2\cos\gamma]$$

Supposons qu'au lieu d'être quelconque, la droite F coïncide avec la position dont la droite D sort, à l'instant que l'on considère. Si l'on se place à ce même instant, on doit poser

$$\varphi = o, \quad d\varphi = w, \quad \lambda = \alpha, \quad \mu = 6, \quad \nu = \gamma.$$

De là résulte, en vertu de l'équation (3),

$$(4). \quad w^2 = -[\cos\alpha . d^2\cos\alpha + \cos6 . d^2\cos6 + \cos\gamma . d^2\cos\gamma].$$

L'équation (4) se ramène à l'équation (1), en observant que la relation générale

$$\cos^2\alpha + \cos^2 6 + \cos^2\gamma = 1.$$

donne, en premier lieu,

$$\cos\alpha . d\cos\alpha + \cos6 . d\cos6 + \cos\gamma . d\cos\gamma = o.$$

et, en second lieu,

$$\cos\alpha . d^2\cos\alpha + \cos6 . d^2\cos6 + \cos\gamma . d^2\cos\gamma = -[(d\cos\alpha)^2 + (d\cos6)^2 + (d\cos\gamma)^2].$$

Il vient donc aussi, par voie de substitution,

$$w = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos 6)^2 + (d\cos\gamma)^2}.$$

140. Sans rien changer à ce qui précède, supposons que la droite D soit déterminée par les deux équations

$$t - x = \frac{a}{c}(v - z), \quad u - y = \frac{b}{c}(v - z),$$

ou bien, qu'étant assujettie à rester perpendiculaire à un plan mobile, ce plan ait, pour équation,

$$a(t - x) + b(u - y) + c(v - z) = 0.$$

Les coordonnées courantes étant représentées, de part et d'autre, par les variables t, u, v, il est visible que l'on a, dans chacun de ces deux cas,

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos 6 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (1) du n° 139, donnent, d'abord,

$$w^2 = \frac{(da)^2 + (db)^2 + (dc)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{(ada + bdb + cdc)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2},$$

et, après réduction,

$$(1). \quad w = \frac{\sqrt{(adb - bda)^2 + (bdc - cdb)^2 + (cda - adc)^2}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

On trouve, de même,

$$(2).\quad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{a.d\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2+c^2}.da}{\sqrt{(adb-bda)^2+(bdc-cdb)^2+(cda-adc)^2}}, \\ \cos 6' = \dfrac{b.d\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2+c^2}.db}{\sqrt{(adb-bda)^2+(bdc-cdb)^2+(cda-adc)^2}}, \\ \cos\gamma' = \dfrac{c.d\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2+c^2}.dc}{\sqrt{(adb-bda)^2+(bdc-cdb)^2+(cda-adc)^2}}. \end{cases}$$

Première et deuxième courbure des courbes à double courbure.

141. La direction tangentielle étant incessamment variable, considérons le changement qu'elle subit à partir du point m. Pris à son origine, ce changement commence par rotation dans le plan P, de la même manière que si la courbe était plane et que son plan coïncidât avec le plan P. De là résulte une première courbure, déterminée, par rapport au plan osculateur, comme la courbure des courbes planes l'est elle-même, par rapport à leur plan.

La courbe S n'étant point plane, il y a déplacement continu du plan P, et c'est, par rotation autour de la tangente, que ce plan change incessamment de direction dans l'espace. De là résulte une sorte de torsion, nommée deuxième courbure. Cette deuxième courbure peut, ainsi que la première, demeurer constante ou bien varier incessamment d'un point à un autre. Dans tous les cas, si l'on désigne, par W', la vitesse angulaire qui anime le plan osculateur dans sa rotation autour de la tangente, tandis que la tangente tourne autour du point décrivant avec la vitesse W et que ce point glisse sur la tangente avec la vitesse V, il est visible que la première courbure étant mesurée par le rapport $\frac{W}{V}=\frac{1}{\rho}$, la seconde peut être mesurée de la même manière par le rapport $\frac{W'}{V}=\frac{1}{\rho'}$.

La quantité ρ' déterminée par l'équation

$$\rho'=\frac{V}{W'}$$

a reçu le nom de *rayon de deuxième courbure*. Le rayon du cercle osculateur reste déterminé par l'équation générale

$$\rho = \frac{V}{W}.$$

On le distingue du rayon ρ', en le désignant sous le nom de *rayon de première courbure*.

142. S'agit-il, d'abord, du rayon de première courbure? La vitesse V étant représentée par ds, les cosinus des angles que la droite D, supposée tangente à la courbe S, fait avec les axes OX, OY, OZ, sont respectivement

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos 6 = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

De là résulte, conformément à la formule (1) du n° 139, page 360,

$$(1) \quad W = \sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2} = \frac{1}{ds}\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2},$$

et, par suite,

$$(2). \quad . \quad . \quad \rho = \frac{ds}{W} = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Au lieu d'opérer, comme nous venons de le faire, on peut partir des équations de la tangente,

$$t - x = \frac{dx}{dz}(v - z), \qquad u - y = \frac{dy}{dz}(v - z),$$

et recourir à la formule (1) du n° 140, page 362, en y posant,

$$a = dx, \qquad b = dy, \qquad c = dz.$$

On trouve ainsi

$$(3). \quad . \quad W = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2},$$

et, par suite,

$$(4)\quad \rho = \frac{ds^3}{\sqrt{(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2}}.$$

Soient λ, μ, ν les angles que la normale principale fait avec les axes OX, OY, OZ, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de première courbure. L'on a

$$(5).\quad x_1 - x = \rho \cos \lambda, \quad y_1 - y = \rho \cos \mu, \quad z_1 - z = \rho \cos \nu.$$

Remplaçons ρ par la valeur déduite de l'équation (2); $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ par les valeurs déduites des équations (3) du n° 138, page 358, et posons, pour simplifier,

$$\mathrm{E} = \frac{ds^2}{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2} = \frac{ds}{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}.$$

On trouve ainsi

$$(6)\quad x_1 - x = \mathrm{E}.d.\frac{dx}{ds}, \quad y_1 - y = \mathrm{E}.d.\frac{dy}{ds}, \quad z_1 - z = \mathrm{E}.d.\frac{dz}{ds},$$

Observons que la tangente sort du lieu qu'elle occupe en tournant autour du point de contact. Il s'ensuit que les vitesses de ses différents points sont dirigées parallèlement à la normale principale et qu'en conséquence, les angles λ, μ, ν sont les mêmes que les angles désignés par α', β', γ' dans les numéros 139 et 140. Si l'on substitue pour ρ la valeur (4) et pour $\cos \lambda = \cos \alpha'$, $\cos \mu = \cos \beta'$, $\cos \nu = \cos \gamma'$, les valeurs (2) du n° 140, page 363, on retombe sur les équations (6), la quantité E pouvant être écrite indifféremment comme on l'a fait ci-dessus, ou sous la forme suivante,

$$\mathrm{E} = \frac{ds^5}{(dxd^2y - dyd^2x)^2 + (dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2}.$$

143. Les résultats auxquels nous venons de parvenir, en ce qui concerne la première courbure, peuvent être établis de différen-

tes manières. On peut se donner les équations générales d'un cercle quelconque et assujettir ce cercle à contracter avec la courbe S un contact du second ordre. Soient

$$(t-x_1)^2+(u-y_1)^2+(v-z_1)^2=\rho^2,\quad A(t-x_1)+B(u-y_1)+v-z_1=o,$$

ces équations. Les constantes à déterminer sont au nombre de six. Il en est de même des équations de condition exprimant que ce cercle passe par un point de la courbe S, qu'il la touche en ce point, et que, en outre, les dérivées du second ordre y affectent, de part et d'autre, les mêmes valeurs.

On peut aussi se donner la normale principale et chercher celui de ses points dont la vitesse actuelle est dirigée tout entière perpendiculairement au plan osculateur. Ce point n'est autre chose que le centre de première courbure.

On peut encore considérer la surface enveloppe des plans normaux, en d'autres termes, le lieu des caractéristiques de ces plans. Cette surface est connue sous le nom de *surface polaire* *. Elle est développable, et sa génératrice rectiligne a pour équations, d'une part, l'équation du plan normal mené par le point x, y, z, savoir,

$$(1).\quad . \quad . \quad (t-x)dx+(u-y)dy+(v-z)dz=o,$$

d'autre part, l'équation qu'on obtient en différenciant l'équation (1) et en annulant les vitesses dt, du, dv, dans le résultat de la différentiation, savoir,

$$(2).\quad . \quad . \quad (t-x)d^2x+(u-y)d^2y+(v-z)d^2z=ds^2.$$

L'expression

$$d^2x[dyd^2z-dzd^2y]+d^2y[dzd^2x-dxd^2z]+d^2z[dxd^2y-dyd^2x],$$

étant identiquement nulle, comme on le reconnaît en la développant, il s'ensuit que le plan (2) est perpendiculaire au plan oscu-

* Voir plus loin, n° 145, pour détails relatifs à la surface polaire.

lateur. Cette condition étant déjà remplie par le plan (1), elle subsiste en même temps pour la droite (1), (2). Or c'est en commençant par tourner autour de cette droite, que le plan normal se déplace le long de la courbe S. Le centre de première courbure se trouve donc au point d'intersection de la droite (1), (2) avec le plan osculateur.

Si l'on observe que tout plan normal à la courbe S touche la surface polaire le long de la génératrice sur laquelle est situé le centre de courbure correspondant, l'on peut en conclure immédiatement que la tangente au lieu de ces centres est contenue, pour chaque centre, dans le plan normal qui lui correspond. Cette tangente est donc à angle droit sur la courbe S. Elle ne doit pas être confondue avec la normale principale. Celle-ci est dans le plan osculateur; l'autre s'en écarte généralement.

144. Considérons maintenant la deuxième courbure et reprenons la formule du n° 141, page 363.

$$\rho' = \frac{V}{W'}.$$

La quantité W' étant la vitesse angulaire qui anime le plan osculateur dans sa rotation autour de la tangente, elle est aussi la vitesse angulaire avec laquelle la normale à ce plan s'écarte, à chaque instant, de la position dont elle sort. Il suit de là que, pour déterminer cette vitesse par la formule (1) du n° 140, page 362, il suffit de poser

$$a = dyd^2z - dzd^2y, \quad b = dzd^2x - dxd^2z, \quad c = dxd^2y - dyd^2x.$$

En faisant usage de ces valeurs, on trouve

$$adb - bda = -dz\,[ad^2x + bd^2y + cd^2z],$$

$$bdc - cdb = -dx\,[ad^2x + bd^2y + cd^2z],$$

$$cda - adc = -dy\,[ad^2x + bd^2y + cd^2z].$$

De là résulte, en substituant,

$$(1)\ W' = ds\,\frac{d^3x(dyd^2z - dzd^2y) + d^3y\,[dzd^2x - dxd^2z] + d^3z\,[dxd^2y - dyd^2x]}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}\ {}^{*},$$

et comme on a, d'ailleurs, $V = ds$, on peut écrire immédiatement

$$(2).\ \rho' = \frac{[dyd^2z - dzd^2y]^2 + [dzd^2x - dxd^2z]^2 + [dxd^2y - dyd^2x]^2}{d^3x[dyd^2z - dzd^2y] + d^3y\,[dzd^2x - dxd^2z] + d^3z\,[dxd^2y - dyd^2x]}.$$

DÉVELOPPÉES DES COURBES A DOUBLE COURBURE.

Surface polaire.

145. Étant donnée une ligne quelconque S à double courbure, supposons-la décrite par un point mobile μ, et désignons, par m, le lieu d'où le point μ sort, à l'instant que l'on considère.

Imaginons que le point μ entraîne avec lui un plan N, assujetti à rester normal à la ligne S.

Le plan N est animé de deux mouvements simultanés, l'un de translation, l'autre de rotation. Le premier rend commune à tous les points du plan N la vitesse du point μ; le second est établi autour de la perpendiculaire élevée en m sur le plan osculateur P; la vitesse angulaire qui lui correspond est celle de la directrice du point μ.

Cela posé, il est visible que l'état de mouvement du plan N se résout en une rotation simple autour de la droite menée dans ce

* La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe soit plane s'obtient en égalant à zéro le numérateur de cette expression. Il est aisé de voir que l'équation à laquelle on parvient de cette manière ne diffère pas de l'équation (6) du n° 138, page 339.

plan, par le centre de première courbure, perpendiculairement au plan osculateur. Cette droite a reçu le nom de *polaire*. Désignons-la par L. Elle est la caractéristique du plan N. Le lieu de ses positions successives est la surface dont nous nous occupons ici, et à laquelle on a donné le nom de *surface polaire*.

Considérée comme génératrice de la surface polaire, la droite L sort du lieu qu'elle occupe, sans sortir du plan N. De là résultent, conformément aux déductions du n° 134, page 350, et comme on peut, d'ailleurs, le voir directement, les conséquences suivantes :

1° Lorsque la droite L sort du lieu qu'elle occupe pour décrire la surface polaire, elle tourne, en général, autour d'un de ses points;

2° Les vitesses simultanées des différents points de la droite L, étant toutes dirigées dans le plan N, il s'ensuit que ce plan touche la surface polaire en tous les points de la droite L, et que cette surface est développable;

3° Soient *n* le point central de la droite L, et S′ le lieu des positions qu'il prend successivement. La vitesse du point *n* étant dirigée tout entière suivant la droite L, le lieu S′ est l'enveloppe des positions successives de cette droite, autrement dit, l'arête de rebroussement de la surface polaire;

4° La droite L touchant la ligne S′ au point *n*, et étant perpendiculaire au plan P, il s'ensuit que la vitesse angulaire de la directrice du point *n*, dans la description de l'arête S′, n'est autre chose que la vitesse angulaire du plan osculateur de la ligne S, dans la description de cette ligne par le point μ;

5° Les vitesses simultanées des différents points de la droite L étant toutes dirigées dans le plan N, ce plan est, pour le point *n*, le plan osculateur de l'arête S′. Il s'ensuit que la vitesse angulaire qui anime le plan osculateur de l'arête S′, dans la description de cette ligne par le point *n*, n'est autre chose que la vitesse angulaire de la directrice du point μ dans la description de la ligne S *.

* Cette proposition et la précédente ont été données par Fourier. Elles établissent entre les courbes S, S′ une réciprocité curieuse.

Menons par le point n un plan P', parallèle au plan P. Le plan P' est normal, en n, à l'arête S'. Mais, d'un autre côté, le plan N normal, en m, à la ligne S est osculateur, en n, à l'arête S'. Il suit de là que la normale principale au point n de la ligne S' résulte de l'intersection des plans N et P', en même temps que la normale principale au point m de la ligne S résulte de l'intersection du plan N avec le plan P, parallèle au plan P'. De là se déduit l'énoncé suivant :

Les normales principales qui se correspondent, de part et d'autre, l'une pour le point m *de la ligne* S, *l'autre pour le point* n *de l'arête* S', *sont toujours parallèles.*

On constate l'accord existant entre cette déduction et les deux propositions précédentes, en observant que s'il y a parallélisme pour deux positions quelconques correspondantes des normales principales, ce parallélisme se maintient nécessairement pour toutes les positions qui se correspondent de part et d'autre. Le mouvement angulaire d'une normale principale résulte, en effet, de deux rotations simultanées, respectivement établies autour d'axes rectangulaires. L'une est la rotation de la directrice du point décrivant : elle a, pour axe, la perpendiculaire élevée en ce point sur le plan osculateur. L'autre est la rotation de ce plan; elle a, pour axe, la directrice. Or, lorsqu'on passe de la ligne S à la ligne S', ces axes se substituent l'un à l'autre, en même temps que les vitesses angulaires correspondantes. L'identité résulte de ce double renversement, et le parallélisme établi, par hypothèse, se maintient comme conséquence d'un même mouvement angulaire.

146. Soit μ' un point quelconque du plan N. Tirons la droite indéfinie $\mu\mu'$, et désignons, par i, le point d'intersection de cette droite avec la droite L, suivant laquelle le plan N touche la surface polaire.

Lorsque le point μ décrit la courbe S, il entraîne avec lui le plan normal N et le fait tourner autour de la droite L. Le plan N s'enroule, ainsi, sur la surface polaire, en y appliquant successive-

ment tous ses points, et, en particulier, ceux de la droite $\mu\mu'$ désignés ci-dessus par i *.

Il suit de là que le lieu des points i, sur la surface polaire, est une développée de la courbe S, la droite $\mu\mu'$ touchant cette développée au point i, et la quantité, dont le rayon vecteur μi croît ou décroît, dans le passage d'une position à une autre, étant précisément égale à l'arc de développée compris entre ces deux positions.

On voit, par ce simple aperçu, fondé tout entier sur des considérations géométriques, qu'il existe, en général, pour une courbe quelconque, une infinité de développées différentes, toutes situées sur la surface polaire et caractérisées, par la condition qu'elles remplissent, de se transformer en lignes droites dans le développement de cette surface. On voit, en même temps, que le lieu des points μ' est, comme celui des points μ, une développante du lieu des points i.

On observera que, abstraction faite du cas des courbes planes, *le lieu des centres de première courbure n'est jamais une développée de la courbe que l'on considère.*

En effet, soit o le centre de courbure qui correspond au point m de la courbe S. Pour que le lieu des points o soit une développée du lieu des points m, il faut que la droite om touche, en o, le premier de ces lieux et qu'elle soit normale, en m, au second. Cette dernière condition est toujours satisfaite, puisque la droite om est la normale principale, menée, par le point m, à la ligne S. La première condition exige que, dans le passage d'une position aux suivantes, la vitesse du centre o soit dirigée tout entière suivant la droite om. Or, s'il en est ainsi dans le cas des courbes planes, il en est autrement dans celui des courbes à double courbure, le centre o restant sur la droite om, et celle-ci tournant, autour du point m, dans le plan normal. De là résulte évidemment la proposition énoncée ci-dessus.

Nous avons vu que le plan N peut être considéré indifférem-

* La vitesse du point μ est dirigée tout entière perpendiculairement au plan normal. Cela revient à dire que ce point reste fixe dans le plan normal en même temps qu'il décrit la courbe S et qu'il fait tourner la droite $\mu\mu'$ autour du point i.

ment, soit comme entraîné par le point μ, soit comme roulant, sans glisser, sur la surface polaire. Ce ne sont là que deux façons différentes d'envisager une seule et même chose, le mouvement qui anime le plan N dans sa rotation continue autour de ses caractéristiques successives. Lorsqu'on considère le plan N comme entraîné par le point μ, ce point décrit la courbe S et reste fixe dans le plan N. Lorsqu'on considère le plan N comme roulant, sans glisser, sur la surface polaire, rien n'est changé, ni dans le mouvement du point μ sur la courbe S, ni dans la fixité de ce point sur le plan N. Il suit de là que la trace de la courbe S, sur le plan mobile N, se réduit à un point.

Imaginons que le plan N emporte avec lui la trace de chacune de ses caractéristiques successives, et celle d'une développée quelconque de la courbe S. Si l'on conçoit une droite, supposée mobile dans le plan N, et assujettie à coïncider constamment avec la caractéristique correspondante, il est visible que l'état de mouvement de cette droite sera identiquement le même que celui de la caractéristique sur la surface polaire. De là et de ce qui précède, résultent évidemment les conséquences suivantes :

La trace que l'arête de rebroussement de la surface polaire laisse sur le plan mobile a, pour courbure en chaque point, la première courbure de cette arête.

Les traces laissées sur le plan mobile par les génératrices rectilignes de la surface polaire ont, pour enveloppe, la trace de l'arête de rebroussement.

Les traces laissées sur le plan mobile par les développées de la courbe S *sont des droites toutes issues d'un seul et même point, le point où se concentre la trace de la développante.*

L'ensemble des traces laissées sur le plan mobile par la surface polaire constitue le développement de cette surface. Il est visible que les lignes tracées sur la surface polaire conservent, dans le développement de cette surface, leurs longueurs respectives et les inclinaisons relatives sous lesquelles ont lieu leurs intersections *.

* On verra plus loin, n° 207 et suivants, la théorie géométrique des surfaces

147. Proposons-nous de déterminer l'équation de la surface polaire et celles de l'arête de rebroussement.

La génératrice rectiligne de la surface polaire est située dans le plan normal

$$(1). \quad . \quad (t-x)\,dx + (u-y)\,dy + (v-z)\,dz = o.\ ^{*}$$

Elle est le lieu des points de ce plan dont la vitesse est nulle, ou peut être considérée comme nulle, au sortir du lieu qu'il occupe. Il suit de là que les coordonnées de cette droite doivent satisfaire à l'équation qu'on obtient en différenciant l'équation (1), et en annulant les vitesses dt, du, dv, dans le résultat de la différentiation. On trouve, ainsi,

$$(2). \quad (t-x)d^2x + (u-y)\,d^2y + (v-z)\,d^2z = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2.$$

Les équations (1) et (2) sont les équations générales de la génératrice rectiligne de la surface polaire. Pour avoir l'équation de cette surface, il suffit d'éliminer les variables x, y, z entre ces équations et celles de la courbe donnée,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x = f(z), \qquad y = \varphi(z).$$

Le point de l'arête de rebroussement situé sur la droite (1), (2), se distingue des autres points de cette droite en ce que sa vitesse est nulle, ou peut être considérée comme nulle, à l'origine du déplacement de la génératrice. Il suit de là que les coordonnées de ce point satisfont aux équations qu'on obtient en différenciant les équations (1), (2), et en annulant les vitesses dt, du, dv, dans les résultats de la différentiation **. Lorsqu'on opère, ainsi, on re-

développables, et, plus généralement, celle des surfaces qui peuvent s'appliquer l'une sur l'autre, point par point, sans déchirure ni duplicature.

* Dans cette équation t, u, v, sont les coordonnées courantes; x, y, z sont celles du point de la courbe par lequel passe le plan normal.

** On observera que cela revient à différencier les équations (1), (2), en y considérant, comme constantes, les quantités t, u, v. Cette remarque s'applique à tous les cas du même genre. Elle permet d'opérer directement avec la plus grande simplicité possible.

tombe sur l'équation (2), comme conséquence de la différentiation effectuée sur l'équation (1), et l'on trouve, en outre, l'équation de condition

$$(4). \quad . \quad (t-x)\,d^3x + (u-y)\,d^3y + (v-z)\,d^3z = 3ds\,d^2s. \; ^*$$

Les équations (1), (2), (4), déterminent, pour une position quelconque de la génératrice (1), (2), le point de l'arête de rebroussement situé sur cette génératrice. Les équations (3), (4) permettent d'exprimer les variables x, y, z, en fonction des coordonnées courantes t, u, v, et de reporter leurs valeurs dans les équations (1), (2). En opérant ainsi, on élimine les variables x, y, z, et l'on obtient les équations finales de l'arête de rebroussement. On peut d'ailleurs considérer les équations (1), (2), comme étant celles de cette arête. Il suffit, pour cela, d'y traiter les variables x, y, z, comme des fonctions des variables t, u, v, ces fonctions étant déterminées par les équations (3) et (4). Lorsqu'on procède de cette façon et qu'on différencie, en conséquence, les équations (1) et (2), on doit observer que les résultats des différentiations effectuées, par rapport aux variables x, y, z, sont identiquement nuls en vertu des équations (2) et (3). On trouve, ainsi, très simplement,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dtdx + dudy + dvdz = o,$$

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dtd^2x + dud^2y + dvd^2z = o.$$

De là résulte, en différenciant l'équation (5) et tenant compte de l'équation (6),

$$(7). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d^2tdx + d^2udy + d^2vdz = o.$$

La différentiation des équations (6) et (7) donne, ensuite,

$$(8). \quad d^2td^2x + d^2ud^2y + d^2vd^2z + dtd^3x + dud^3y + dvd^3z = o,$$

$$(9). \quad d^2td^2x + d^2ud^2y + d^2vd^2z + d^3tdx + d^3udy + d^3vdz = o,$$

* Il est aisé de voir que la relation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

donne la suivante

$$dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = ds\,.\,d^2s.$$

et l'on en déduit

$$(10).\quad dtd^2x + dud^2y + dvd^2z = d^2t.dx + d^2udy + d^2v.dz.$$

L'équation (5) exprime que les tangentes, en deux points conjugués de la courbe S et de l'arête S' de rebroussement, sont rectangulaires.

Soient m le premier de ces points, et m' le second. On déduit des équations (5) et (6),

$$(11).\quad \frac{dt}{dv} = \frac{dzd^2y - dyd^2z}{dyd^2x - dxd^2y}, \qquad \frac{du}{dv} = \frac{dxd^2z - dzd^2x}{dyd^2x - dxd^2y}.$$

Les équations (11) expriment que la tangente, en m', à l'arête S', est perpendiculaire au plan osculateur mené par le point m de la courbe S.

La réciprocité qui subsiste, en vertu des équations (5), (6), (7), s'étend à la proposition précédente. On peut donc dire, aussi, que la tangente, en m, à la courbe S est perpendiculaire au plan osculateur mené par le point m' de l'arête S'.

En combinant les équations (5) et (7), comme on a combiné les équations (5) et (6), on doit trouver évidemment

$$(12).\quad \frac{dx}{dz} = \frac{dvd^2u - dud^2v}{dud^2t - dtd^2u}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{dtd^2v - dvd^2t}{dud^2t - dtd^2u}.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (1), donnent

$$(13).\quad (t-x)\,[dvd^2u - dud^2v] + (u-y)\,[dtd^2v - dvd^2t] + (v-z)\,[dud^2t - dtd^2u] = o.$$

L'équation (13) étant celle du plan osculateur mené par le point m' à la courbe S', il en résulte que ce plan n'est autre chose que le plan normal, en m, à la courbe S.

La combinaison des équations (6) et (7) donne

$$dzdvd^2zd^2v = [dxd^2t + dyd^2u]\,[dtd^2x + dud^2y],$$

et, eu égard aux équations (5) et (8),

$$dzdv\,[dtd^2x + dud^2y + dvd^2z] = [dtdx + dudy]\,[d^2td^2x + d^2ud^2y] - [dxd^2t + dyd^2u]\,[dtd^2x + dud^2y].$$

De là résulte, toute réduction faite,

$$(14).\qquad \frac{dyd^2x - dxd^2y}{dv} = \frac{dz\,[dtd^2x + dud^2y + dvd^2z]}{dud^2t - dtd^2u}.$$

Cela posé, si l'on transporte dans la formule (3) du n° 142, page 364, et dans la formule (1) du n° 144, page 368, les valeurs fournies par les équations (11), on trouve, d'abord, pour la vitesse angulaire de la tangente en m,

$$(15).\quad \ldots\quad W = \frac{d\sigma}{dv}\cdot\frac{dyd^2x - dxd^2y}{ds^2},$$

la quantité $d\sigma$ étant la vitesse du point m' sur l'arête S' et remplaçant, par conséquent, le radical

$$\sqrt{dt^2 + du^2 + dv^2}.$$

On trouve, ensuite, pour la vitesse angulaire qui anime le plan osculateur de la courbe S, autour de la tangente en m,

$$(16).\quad \ldots\quad W_1 = \frac{ds\,.\,dv}{d\sigma^2}\cdot\frac{dtd^2x + dud^2y + dvd^2z}{dyd^2x - dxd^2y}.$$

Pour passer de cette dernière formule à celle qui exprime la vitesse angulaire du plan osculateur en m' à l'arête S', il suffit de remplacer σ par s, les coordonnées x, y, z par les coordonnées t, u, v, et réciproquement. Cela résulte, évidemment, de la symétrie des équations (5), (6), (7), (8) et (9). On peut, d'ailleurs, se dispenser d'effectuer aucun changement dans le facteur trinôme $dtd^2x + dud^2y + dvd^2z$, vu qu'en vertu de l'équation (10), la permutation à effectuer n'altère en rien la valeur de ce terme. Dési-

gnons par W′ cette vitesse angulaire, et opérons, comme nous venons de l'indiquer.

On trouve, ainsi,

$$(17). \quad . \quad . \quad W' = \frac{d\sigma . dz}{ds^2} . \frac{dtd^3x + dud^3y + dvd^3z}{dud^2t - dtd^2u},$$

et, eu égard à l'équation (14),

$$(18). \quad . \quad . \quad . \quad W' = \frac{d\sigma}{ds^2} . \frac{dyd^2x - dxd^2y}{dv} = W.$$

La réciproque qui subsiste, de part et d'autre, en vertu des équations (5), (6), (7), (8) et (9), suffit pour que l'égalité des vitesses W, W′ implique celles des vitesses angulaires qui animent simultanément, l'une la tangente en m' à l'arête S′, l'autre le plan osculateur en m à la courbe S.

On voit, ainsi, comment se vérifient, par le calcul, les déductions géométriques du n° 145, pages 368 et suivantes. On aurait pu se borner à constater que le produit

$$W . W_1 = \frac{dtd^3x + dud^3y + dvd^3z}{ds . d\sigma}$$

reste le même, lorsqu'on passe du point m de la courbe S au point m' de l'arête S′. Il est clair, en effet, que les équations (11) impliquent toutes les conséquences développées à leur suite.

Conditions générales des contacts de tous les ordres.

148. Soient deux courbes ayant un point commun m.

Si ces courbes ont, en ce point, même tangente, elles se touchent, et leur contact est du premier ordre.

Si, en outre, elles ont même plan osculateur et même centre de première courbure, leur contact, devenu plus intime, est dit du deuxième ordre.

Soient o le centre de courbure commun à deux courbes qui ont

entre elles un contact du deuxième ordre; L la polaire correspondante, autrement dit la perpendiculaire élevée en o sur le plan osculateur; i un point quelconque pris sur cette polaire. Il existe, pour chacune des courbes, une développée passant par le point i. Considérons ces deux développées. Elles se touchent en i, suivant la droite im, et leur contact est, en général, du premier ordre.

Supposons que les développées aient en i un contact du second ordre; le contact des développantes devient plus intime encore, et il est dit du troisième ordre.

Pour abréger, disons immédiatement qu'un contact de l'ordre $(n-1)$, entre les développées, implique un contact de l'ordre n entre les développantes, et réciproquement. Il suit de là que le contact du quatrième ordre se définit au moyen du contact du troisième ordre, celui du cinquième au moyen du quatrième, et ainsi de suite, indéfiniment.

Soient

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad x = f(z), \qquad y = \varphi(z)$$

les équations d'une courbe quelconque S. Celles de la polaire, qui correspond au point (x, y, z), sont, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure,

$$(2) \quad \ldots \quad \begin{cases} (t-x)dx + (u-y)dy + (v-z)dz = o, \\ (t-x)d^2x + (u-y)d^2y + (v-z)d^2z = ds^2. \end{cases}$$

Considérons les coordonnées t, u, v comme étant celles du point d'intersection de la polaire avec l'une des développées de la courbe S. Elles seront les coordonnées courantes de cette développée, et celle-ci aura, pour tangente, la droite menée par le point (x, y, z) au point (t, u, v). De là résultent les deux équations de condition,

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \frac{t-x}{v-z} = \frac{dt}{dv}, \qquad \frac{u-y}{v-z} = \frac{du}{dv}.$$

Imaginons qu'au moyen des équations (1) et (3), on détermine les coordonnées x, y, z en fonctions des variables t, u, v, dt, du, dv, et qu'on transporte les valeurs ainsi obtenues dans les équa-

tions (2). Ces équations deviendront celles d'une développée quelconque de la courbe S. Cela revient à dire que les équations (2) peuvent être considérées comme étant les équations générales des développées de la courbe donnée. Il suffit, pour cela, qu'on les traite en regardant les variables, x, y, z comme des fonctions des coordonnées courantes t, u, v, ces fonctions étant déterminées par les équations (1) et (3). Il suit de là qu'on peut substituer aux équations (2) celles qui s'en déduisent au moyen des équations (3). On trouve ainsi

$$(4). \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} dx\,\dfrac{dt}{dv} + dy\,\dfrac{du}{dv} + dz = o, \\ d^2x\,.\dfrac{dt}{dv} + d^2y\,.\dfrac{du}{dv} + d^2z = \dfrac{ds^2}{v - z}. \end{cases}$$

Supposons, pour plus de simplicité, qu'on prenne la variable v pour variable indépendante. Il est visible que les équations (4) déterminent les dérivées premières $\frac{dt}{dv}$, $\frac{du}{dv}$, en fonction des quantités v, x, y, z, $f'(z)$, $\varphi'(z)$, $f''(z)$, $\varphi''(z)$; les dérivées secondes $\frac{d^2t}{dv^2}$, $\frac{d^2u}{dv^2}$, en fonction de ces mêmes quantités et des dérivées troisièmes $f'''(z)$, $\varphi'''(z)$; et ainsi de suite indéfiniment *, les dérivées de l'ordre $(n-1)$, $\frac{d^{n-1}t}{dv^{n-1}}$, $\frac{d^{n-1}u}{dv^{n-1}}$ se trouvant déterminées en fonction des quantités v, x, y, z, $f'(z)$, $\varphi'(z)$, $f''(z)$, $\varphi''(z)$, etc., jusques et y compris les dérivées de l'ordre n, $f^n(z)$, $\varphi^n(z)$. La réciproque subsiste évidemment, c'est-à-dire que si l'on se donne les quantités

$$v, \ \frac{dt}{dv}, \ \frac{du}{dv}, \ \frac{d^2t}{dv^2}, \ \frac{d^2u}{dv^2}, \text{ etc. } \frac{d^{n-1}t}{dv^{n-1}}, \ \frac{d^{n-1}u}{dv^{n-1}},$$

il en résulte une détermination complète des quantités correspondantes, x, y, z, $f'(z)$, $\varphi'(z)$, $f''(z)$, $\varphi''(z)$, etc., $f^n(z)$, $\varphi^n(z)$.

Admettons, pour un instant, qu'un contact de l'ordre n établi

* Pour obtenir les dérivées secondes $\frac{d^2t}{dv^2}$, $\frac{d^2u}{dv^2}$, il suffit de différencier les équations (4). Une deuxième différentiation donne les dérivées $\frac{d^3t}{dv^3}$, $\frac{d^3u}{dv^3}$ et ainsi de suite, indéfiniment.

entre deux courbes S, S', implique l'égalité des valeurs que prennent, de part et d'autre, toutes les dérivées successives jusques et y compris celles de l'ordre n. D'après notre définition, les développantes de ces courbes auront entre elles un contact de l'ordre $n+1$. D'après les déductions précédentes, elles fourniront des dérivées successives qui prendront, de part et d'autre, mêmes valeurs, jusques et y compris celles de l'ordre $n+1$. On voit par là que si le contact d'un ordre quelconque n implique la condition que nous avons admise, cette condition s'étend d'elle-même au contact de l'ordre $n+1$, et, de proche en proche, à tous les contacts d'ordre supérieur.

S'agit-il du contact du premier ordre? La condition énoncée ci-dessus subsiste évidemment. Concluons qu'elle a lieu pour le contact du second ordre et, généralement, pour les contacts de tous les ordres.

On observera que l'égalité des valeurs que prennent, en un même point, les dérivées qui se correspondent, de part et d'autre, pour deux courbes S, S', jusques et y compris les dérivées de l'ordre n, implique un contact de cet ordre entre les projections de ces courbes. Il s'ensuit que, pour établir entre deux courbes à double courbure, un contact d'un ordre quelconque, il est nécessaire et suffisant d'établir un contact de ce même ordre entre leurs projections sur deux des plans coordonnés. La théorie du contact des courbes dans l'espace se trouve ainsi ramenée tout entière à celle du contact des courbes planes.

149. Nous avons dit du contact de deux courbes qu'il devient plus intime à mesure que son ordre s'élève. Nous entendons, par là, que l'écart qui s'établit entre deux courbes, à partir d'un point commun, commence par être d'autant plus petit que le contact, en ce point, est d'un ordre plus élevé. Cherchons à justifier cette proposition, et, d'abord, établissons les deux lemmes sur lesquels on peut s'appuyer ici, et, en général, pour tous les cas analogues.

Soit x une grandeur quelconque continûment variable; dx, d^2x, d^3x, etc., ses différentielles successives.

La différentielle dx n'étant autre chose que la vitesse d'accrois-

sement de la variable x, il est évident que cette variable croît d'autant plus vite que sa différentielle dx est plus grande.

Supposons que l'on ait $dx = o$. Partant de zéro, la quantité dx commence par être d'autant plus grande qu'elle croît plus vite. Or, elle croît d'autant plus vite que sa différentielle d^2x est plus grande. Concluons que, dans l'hypothèse où la première différentielle s'annule, la variable x croît d'autant plus vite que la différentielle d^2x est plus grande.

Le même raisonnement, constamment poursuivi, conduit au lemme suivant :

Lorsqu'une grandeur continûment variable sort d'un état quelconque déterminé, elle croît, d'abord, d'autant plus vite que la première de ses différentielles successives qui ne s'annule pas est plus grande.

Supposons que les différentielles successives dx, d^2x, etc., $d^{n-1}x$ s'annulent toutes à la fois, et considérons les deux cas qui peuvent se présenter, selon que la différentielle d^nx s'annule en même temps que les précédentes, ou qu'au contraire, elle ne s'annule point. Dans le premier cas, les valeurs qu'elle commence par prendre, au sortir de zéro, sont moindres, en grandeur absolue, que celles qui leur correspondent dans le second cas. Cette déduction s'étend, d'abord, à la différentielle $d^{n-1}x$, et, de proche en proche, à la différentielle dx. Cela posé, voici la conséquence définitive :

Lorsqu'une grandeur continûment variable sort d'un état quelconque déterminé, c'est en croissant ou en décroissant. Dans tous les cas elle change, d'abord, d'autant plus vite que la première de ses différentielles successives qui ne s'annule pas est d'un ordre moins élevé.

150. Soient deux courbes S, S′ ayant un point commun m, et décrites simultanément par deux points mobiles μ, μ'. On suppose que les points μ, μ' sortent du lieu m, à l'instant que l'on considère, et que leur vitesse est la même en grandeur. Cela posé, on

peut admettre, comme évident, que l'écart qui s'établit entre les courbes S, S′, à partir du point m, commence par être plus ou moins grand, selon que l'écart angulaire des directrices des points μ et μ' remplit cette même condition. Désignons par D, D′ ces directrices et par φ l'angle qu'elles font entre elles.

Les courbes S, S′ étant tangentes en m, la valeur initiale de l'angle φ est zéro. Il s'ensuit que l'écart angulaire des droites D, D′, et, par conséquent aussi, l'écart des courbes S, S′ commence par être d'autant plus grand que la première des différentielles successives $d\varphi$, $d^2\varphi$, $d^3\varphi$, etc., qui ne s'annule pas, est d'un ordre moins élevé.

Admettons, comme vérité de définition, que l'ordre du contact établi, en m, entre deux courbes quelconques S, S′, soit marqué par l'indice de la première des différentielles successives $d\varphi$, $d^2\varphi$, $d^3\varphi$, etc., qui ne s'annule pas pour $\varphi = o$; la proposition qu'il s'agissait d'établir se trouve immédiatement démontrée. En effet, le contact étant de l'ordre n, la première des différentielles successives qui ne s'annule pas est celle de l'indice n. Or, si l'on substituait à la courbe S′ une courbe S″, ayant avec la courbe S un contact d'un ordre quelconque p, *inférieur à* n, la première des différentielles successives $d\varphi$, $d^2\varphi$, $d^3\varphi$, etc., qui ne s'évanouirait pas, pour $\varphi = o$, serait celle de l'indice p. L'écart des courbes S, S″ commencerait donc par être plus grand que celui des courbes S, S′.

Soient x, y, z les coordonnées courantes de la courbe S, et x', y', z', celles de la courbe S′. On a généralement

$$\cos\varphi = \frac{dxdx' + dydy' + dzdz'}{ds\,.\,ds'}.$$

Les vitesses ds, ds' étant supposées constantes et prises égales à l'unité, on peut écrire, identiquement,

$$(1).\quad \cos\varphi = 1 - \frac{(dx - dx')^2 + (dy - dy')^2 + (dz - dz')^2}{2}.$$

En différenciant deux fois de suite, on trouve, en premier lieu,

$$\sin\varphi\,.\,d\varphi = (dx - dx')(d^2x - d^2x') + \text{etc.}$$

en second lieu,

$$(2). \quad \ldots \cos\varphi . d\varphi^2 + \sin\varphi . d^2\varphi = [d^2x - d^2x']^2 + \text{etc.}$$
$$+ (dx - dx')\ (d^3x - d^3x') + \text{etc.}$$

Posons $\varphi = o$. En vertu de l'équation (1), il faut que l'on ait, en même temps,

$$(3). \quad \ldots dx = dx', \qquad dy = dy', \qquad dz = dz'.$$

De là résulte, en vertu de l'équation (2),

$$(4). \quad . d\varphi^2 = [d^2x - d^2x']^2 + [d^2y - d^2y']^2 + [d^2z - d^2z']^2.$$

On voit ainsi que les équations de condition

$$(5). \quad \ldots \ldots \varphi = o, \qquad d\varphi = o.$$

impliquent les suivantes :

$$(6)\ dx = dx',\ dy = dy',\ dz = dz',\ d^2x = d^2x',\ d^2y = d^2y',\ d^2z = d^2z'.$$

et réciproquement.

Reprenons l'équation (2), et différencions-la deux fois de suite. Il vient, en premier lieu,

$$-\sin\varphi d\varphi^3 + 3\cos\varphi d\varphi d^2\varphi + \sin\varphi d^3\varphi = 3(d^2x.d^2x')[d^3x - d^3x'] + \text{etc.}$$
$$+ [dx - dx'][d^4x - d^4x'] + \text{etc.}$$

et, en second lieu,

$$(7). -\cos\varphi d\varphi^4 - 6\sin\varphi d\varphi^2 d^2\varphi + 3\cos\varphi[d^2\varphi]^2 + 4\cos\varphi d\varphi d^3\varphi + \sin\varphi . d^4\varphi$$
$$= 3[d^3x - d^3x']^2 + \text{etc.} + 4[d^2x - d^2x'][d^4x - d^4x'] + \text{etc.}$$
$$+ [dx - dx'][d^5x - d^5x'] + \text{etc.}$$

De là résulte, pour le cas où l'existence des équations (5) implique celle des équations (6), ou inversement,

$$(8). \quad [d^2\varphi]^2 = [d^3x - d^3x']^2 + [d^3y - d^3y']^2 + [d^3z - d^3z']^2.$$

On voit, ainsi, que les équations de condition

$$(9).\;.\;.\;.\quad \varphi = o,\qquad d\varphi = o,\qquad d^2\varphi = o,$$

impliquent les suivantes :

$$(10).\;.\;.\;\begin{cases} dx = dx', & dy = dy', & dz = dz', \\ d^2x = d^2x', & d^2y = d^2y', & d^2z = d^2z', \\ d^3x = d^3x', & d^3y = d^3y', & d^3z = d^3z'. \end{cases}$$

et réciproquement.

On trouverait, de même, pour le cas où l'existence des équations (9) implique celle des équations (10), ou inversement,

$$[d^3\varphi]^2 = [d^4x - d^4x']^2 + [d^4y - d^4y']^2 + [d^4z - d^4z']^2$$

et, ainsi de suite indéfiniment, l'annulation simultanée de l'angle φ et des différentielles successives $d\varphi$, $d^2\varphi$, etc., $d^{n-1}\varphi$ impliquant les équations suivantes,

$$\begin{aligned} &[dx - dx']^2 + [dy - dy']^2 + [dz - dz']^2 = o, \\ &[d^2x - d^2x']^2 + [d^2y - d^2y']^2 + [d^2z - d^2z']^2 = o, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &[d^nx - d^nx']^2 + [d^ny - d^ny']^2 + [d^nz - d^nz']^2 = o, \end{aligned}$$

et réciproquement. On a d'ailleurs, en même temps,

$$[d^n\varphi]^2 = [d^{n+1}x - d^{n+1}x']^2 + [d^{n+1}y - d^{n+1}y']^2 + [d^{n+1}z - d^{n+1}z']^2.$$

On voit, par ce qui précède, qu'il est indifférent de faire dépendre l'ordre du contact établi entre les courbes S, S' de l'une ou l'autre des conditions énoncées ci-dessus. On peut admettre, relativement à cet ordre, qu'il est marqué par l'indice de la première des différentielles successives $d\varphi$, $d^2\varphi$, etc., qui ne s'évanouit point, ou qu'il est moindre d'une unité que l'indice de la première des différentielles successives dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, etc., qui cesse d'être égale à celle qui lui correspond dans la suite dx', dy', dz', d^2x', d^2y', d^2z', etc., ou bien, encore, qu'il est le même que celui

du contact qui s'établit, *de part et d'autre*, entre les projections des courbes S, S' sur deux des plans coordonnés, ou bien, enfin, qu'il l'emporte d'une unité sur l'ordre du contact établi entre deux quelconques des développées correspondantes de ces courbes. Chacune de ces conditions implique nécessairement les autres, et il est démontré que l'écart entre deux courbes, à partir d'un point commun, commence par être d'autant plus petit, que le contact contracté par ces courbes, en ce point, est d'un ordre plus élevé.

151. Au lieu de procéder, comme nous l'avons fait tout à l'heure, on peut partir de l'équation générale

$$(1).\quad [d^{n-1}\varphi]^2 = [d^nx - d^nx']^2 + [d^ny - d^ny']^2 + [d^nz - d^nz']^2,$$

supposée démontrée pour le cas où les différentielles successives $d\varphi$, $d^2\varphi$, etc., $d^{n-2}\varphi$ s'annulent en même temps que l'angle φ. Il vient alors

$$(2).\quad \frac{[d^{n-1}\varphi]^2}{[d^nx - d^nx']^2 + [d^ny - d^ny']^2 + [d^nz - d^nz']^2} = 1,$$

et cette équation ne cesse pas de subsister, alors même qu'on se place dans l'hypothèse où la différentielle $d^{n-1}\varphi$ s'annule en même temps que les précédentes. L'expression (2) se présente alors sous la forme $\frac{0}{0}$ *, et l'on sait que, pour en avoir la vraie valeur, il suffit de substituer, à chacun de ses termes, sa différentielle respective. De là résulte, en premier lieu,

$$(3).\quad \frac{d^{n-1}\varphi . d^n\varphi}{[d^nx - d^nx'][d^{n+1}x - d^{n+1}x'] + \text{etc.}} = 1.$$

Or, ici encore, l'expression fractionnaire affecte la forme $\frac{0}{0}$. On peut donc écrire, suivant la même règle **,

$$\frac{[d^n\varphi]^2}{[d^{n+1}x - d^{n+1}x']^2 + \text{etc.}} = 1.$$

* Cela résulte évidemment de l'équation (1).

** Il est visible que la différentielle du numérateur se réduit à $[d^n\varphi]^2$, et

De la résulte, en conséquence,

$$(4). \quad [d^n\varphi]^2 = [d^{n+1}x - d^{n+1}x']^2 + [d^{n+1}y - d^{n+1}y']^2 + [d^{n+1}z - d^{n+1}z']^2.$$

On voit, par ce résultat, que l'équation (1), supposée vraie pour une certaine valeur de l'indice n, l'est également pour cette même valeur augmentée d'une unité. Démontrée vraie pour $n = 2$, elle l'est pour $n = 3$, puis pour $n = 4$, et ainsi de suite, indéfiniment. Elle est donc générale.

DU CONTACT DES COURBES ET DES SURFACES.

Sphère osculatrice.

152. Étant données une courbe et une surface qui ont un point commun m, on dit qu'elles ont entre elles un contact de l'ordre n, lorsque, parmi les lignes susceptibles d'être tracées sur la surface, celle qui s'écarte le moins de la courbe donnée, à partir du point m, contracte avec cette courbe un contact de l'ordre n.

Soit

$$(1). \quad z = f(x, y),$$

l'équation de la surface donnée A, et

$$(2). \quad y = \varphi(x) = a + bx + cx^2 + \text{etc.} + px^n,$$

celle d'une ligne S', située dans le plan des xy et contractant, avec la projection, sur ce plan, de la courbe donnée S, un contact de l'ordre n. Il est entendu que le point, pour lequel ce contact sub-

celle du dénominateur, à

$$[d^{n+1}x - d^{n+1}x']^2 + [d^{n+1}y - d^{n+1}y']^2 + [d^{n+1}z - d^{n+1}z']^2,$$

dans l'hypothèse où l'on a $d^{-1}\ \varphi = o$.

siste, est la projection, sur le plan des xy, du point supposé commun à la courbe S et à la surface A.

Le cylindre (2) coupe la surface (1) suivant une ligne dont la projection sur le plan des zx a, pour équation,

$$(3) \quad \ldots \ldots \ldots \quad z = f(x, \varphi(x)).$$

Cela posé, puisque l'on a, d'une part, les équations de la courbe S, d'autre part, celles de la courbe S' *, il est visible que tout se réduit à vérifier si la ligne représentée par l'équation (3) dans le plan des zx contracte, avec la projection, sur ce plan, de la courbe S, un contact de l'ordre n, et à déterminer la plus grande valeur du nombre n compatible avec cette condition. On ne perdra pas de vue que le point où ce contact doit avoir lieu est la projection, sur le plan des xz, du point supposé commun à la courbe S et à la surface A. On sait, d'ailleurs, que l'ordre du contact est marqué par le nombre des dérivées successives qui prennent même valeur au point rendu commun aux lignes que l'on considère.

Au lieu de s'en tenir à la définition qui précède, on peut dire plus simplement que l'ordre du contact établi entre une surface et une courbe est marqué par l'indice le plus élevé des différentielles successives qui satisfont à la fois aux équations de la courbe et de la surface.

Supposons qu'on ait déterminé, par les équations de la courbe, les valeurs des différentielles successives (dx, dy, dz), (d^2x, d^2y, d^2z), etc., ce qui ne présente aucune difficulté, puisqu'on dispose arbitrairement de l'une des vitesses dx, dy, dz, et qu'on peut l'assujettir soit à demeurer constante, soit à varier comme on veut. On substitue ces valeurs dans les équations différentielles de la surface, en opérant d'abord sur l'équation différentielle du premier ordre, puis sur celle du second, et ainsi de suite, aussi longtemps que la substitution reste possible sans incompatibilité.

* Nous avons fait voir au n° 126, page 321, comment on détermine les coefficients $a, b, c, \ldots p$ de manière à établir un contact de l'ordre n, entre une courbe donnée dans le plan des xy et celle que l'équation (2) représente dans ce même plan.

L'ordre de la dernière des équations différentielles, qui peut être ainsi satisfaite, est celui du contact établi entre la courbe et la surface données.

On observera qu'en suivant ce procédé, il est permis de remplacer par l'équation (2) celle de la projection de la courbe S sur le plan des xy, et de prendre, au lieu de l'équation (1), l'équation (3) qui résulte de la combinaison des équations (1) et (2). Cette simple remarque suffit pour faire voir que la première définition implique la seconde, et réciproquement. On peut donc admettre indifféremment l'une ou l'autre. Si les conditions qu'elles expriment diffèrent, c'est par la forme et non point par le fond.

153. Reportons-nous aux considérations développées ci-dessus, en ce qui concerne le cercle osculateur d'une courbe à double courbure et la droite menée par le centre de ce cercle perpendiculairement à son plan. Toute sphère ayant son centre sur cette droite et passant par le point correspondant de la courbe contient le cercle osculateur. Elle a donc, avec cette courbe, un contact du second ordre. On comprend dès lors que, parmi ces sphères, il doit, en général, s'en trouver une dont le contact avec la courbe donnée soit plus intime que pour les autres et devienne du troisième ordre. La sphère, ainsi déterminée, est connue sous le nom de *sphère osculatrice*. Elle est caractérisée par la condition qu'elle remplit d'avoir, pour centre, le point de la polaire dont la vitesse est nulle à l'origine du déplacement de cette droite. Soit

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad (t-x)^2+(u-y)^2+(v-z)^2=R^2,$$

l'équation de cette shpère; t, u, v étant les coordonnées du centre; R le rayon; x, y, z les coordonnées courantes. De là résulte, pour les équations différentielles des trois premiers ordres,

$$(2). \quad . \quad \begin{cases}(t-x)dx+(u-y)dy+(v-z)dz=o,\\(t-x)d^2x+(u-y)d^2y+(v-z)d^2z=ds^2,\\(t-x)d^3x+(u-y)d^3y+(v-z)d^3z=3ds.d^2s.\end{cases}$$

Observons que ces équations reproduisent identiquement les équations (1), (2), (4) du n° 147, page 373. La seule différence con-

siste en ce que les quantités x, y, z sont ici les coordonnées courantes de la sphère, tandis qu'au n° 147 elles sont les coordonnées courantes de la courbe. S'agit-il du point commun à la courbe et à la sphère? Les valeurs qu'affectent, en ce point, pour la courbe, les différentielles successives (dx, dy, dz), (d^2x, d^2y, d^2z), (d^3x, d^3y, d^3z), satisfont, ainsi qu'on le voit, aux équations différentielles de la surface sphérique. Il est donc vérifié que la sphère dite osculatrice contracte, avec la courbe, un contact du troisième ordre. On sait, d'ailleurs, que les coordonnées du centre de cette sphère sont déterminées par les équations (2).

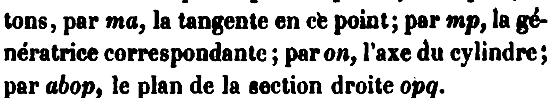
Application des théories précédentes à l'hélice.

154. Proposons-nous d'appliquer à l'hélice les théories précédentes, et procédons, d'abord, par voie géométrique. L'uniformité que présentent ici la première et la deuxième courbure facilite singulièrement toutes les solutions. Elle suffit, d'ailleurs, pour faire voir *à priori* que l'hélice peut, en contractant, avec une courbe quelconque à double courbure, un contact du deuxième ordre et, en partie, du troisième, remplir, par rapport à cette courbe, pour chacune de ses deux courbures, le rôle assigné au cercle osculateur en ce qui concerne les courbes planes.

Soient une hélice H tracée sur un cylindre droit, à base circulaire; r le rayon du cylindre; h le pas de l'hélice; α l'angle que la tangente à la courbe fait avec le plan de la section droite.

Prenons sur cette hélice un point quelconque m, et représentons, par ma, la tangente en ce point; par mp, la génératrice correspondante; par on, l'axe du cylindre; par $abop$, le plan de la section droite opq.

Fig. 62.



Le plan map touche le cylindre suivant la génératrice mp. Considérée comme située dans ce plan et comme entraînée par lui dans son enroulement sur la surface cylindrique, la droite ma vient appliquer successivement tous ses points sur l'hélice H.

Représentons-nous le plan map à l'instant précis où il sort du

lieu qu'il occupe en s'enroulant sur le cylindre. L'état de mouvement qui l'anime consistant en une rotation simple autour de la génératrice *mp*, il s'ensuit que les vitesses actuelles de la tangente *ma* sont toutes dirigées parallèlement à la normale *mn*. De là résultent, en premier lieu, les conséquences suivantes :

Le plan osculateur de l'hélice H *est, pour le point* m, *le plan* amn *mené par la tangente* ma *et la normale* mn.

La normale mn *étant située à la fois dans le plan osculateur et dans le plan mené, par le point* m, *perpendiculairement à la tangente* ma, *est, pour ce point, la normale principale de l'hélice* H.

Soit $d\omega$ la vitesse angulaire du plan tangent *amp*, dans sa rotation autour de la génératrice *mp*. Cette vitesse est, en même temps, celle du rayon *op* autour du centre *o*, et celle de la droite *pa* autour du point *p*.

Soit W la vitesse angulaire avec laquelle la tangente *ma* s'écarte de la position dont elle sort en tournant autour du point *m*. La vitesse actuelle du point *a* pouvant s'exprimer indifféremment par chacun des deux produits $pa.d\omega$, $ma.W$, on a nécessairement

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad W = \frac{pa}{ma} \cdot d\omega = \cos\alpha \,.\, d\omega.$$

Soit V ou ds la vitesse du point *m* sur l'hélice H. Il existe, entre cette vitesse et celle de sa projection *p*, le même rapport qu'entre les deux longueurs *ma*, *pa*. Or, la vitesse du point *p* a, pour expression, $r.d\omega$. Il vient donc

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad V = ds = \frac{ma}{pa} \,.\, r \,.\, d\omega = \frac{r}{\cos\alpha} \,.\, d\omega.$$

Désignons, par ρ, le rayon de première courbure de l'hélice H. On a

$$(3). \quad . \quad . \quad \rho = \frac{V}{W} = \frac{r}{\cos^2\alpha} = r(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) = \mathrm{cons^{te}}.$$

Le centre du cercle osculateur étant situé sur la normale principale, et celle-ci coupant en n l'axe du cylindre, on voit que ce centre se trouve en m', au delà du point n, à la distance

$$(4). \quad \ldots\ldots \quad nm' = \rho - r = r\,\mathrm{tg}^2\alpha.$$

Concluons que le lieu des centres de première courbure est une hélice H' de même pas que l'hélice H, ayant même axe et, pour section droite du cylindre correspondant, un cercle au rayon $r.tg^2\alpha$.

Soit α' l'angle que la touchante à l'hélice H' fait avec le plan de la section droite opq. De même que l'on a, pour l'hélice H,

$$(5). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{2\pi r},$$

de même il vient, pour l'hélice H',

$$(6). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{h}{2\pi r\,\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

La combinaison des équations (5) et (6) donne

$$(7). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{tg}\,\alpha\,.\,\mathrm{tg}\,\alpha' = 1.$$

On voit par là que la tangente en m' à l'hélice H' est perpendiculaire à la tangente en m à l'hélice H. On sait, d'ailleurs, qu'elle est perpendiculaire au rayon nm'. Il s'ensuit qu'elle est normale au plan osculateur amn, et qu'en conséquence elle n'est autre chose que la polaire correspondante au point m. De là résultent immédiatement les déductions suivantes :

Le lieu des tangentes à l'hélice H' *est la surface polaire de l'hélice* H.

L'hélice H' *est l'arête de rebroussement de cette surface polaire.*

Soit ρ' le rayon de courbure de l'hélice H'. La formule (3), où l'on doit remplacer r par $rtg^2\alpha$, et $tg\alpha$ par $tg\alpha'$, donne

$$\rho' = r\,\mathrm{tg}^2\alpha(1 + \mathrm{tg}^2\alpha'),$$

et, eu égard à l'équation (7),

$$(8). \quad \ldots \ldots \quad \rho' = r(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) = \rho.$$

On voit, ainsi, qu'il existe entre les hélices H, H′ une réciprocité remarquable. Cette réciprocité implique les énoncés suivants :

Les plans osculateurs, qui correspondent aux points conjugués m, m′ *des hélices* H, H′, *se coupent à angle droit suivant la normale principale commune* mm′.

De même que l'hélice H *a son centre de première courbure situé en* m′, *pour le point* m, *de même l'hélice* H′ *a son centre de première courbure situé en* m, *pour le point* m′.

Le lieu des tangentes à l'hélice H *est la surface polaire de l'hélice* H′ *.

L'hélice H *est l'arête de rebroussement de cette surface polaire.*

Menons, par le point m, la droite mb perpendiculaire au plan osculateur amn. Cette droite est située dans le plan tangent amp et elle y conserve une inclinaison constante. Il suit de là qu'en désignant, par Ω, la vitesse angulaire avec laquelle la droite mb s'écarte de la position dont elle sort en tournant autour du point m, on a, d'après la formule (1), où il faut remplacer l'angle α par son complément $\frac{\pi}{2} - \alpha$,

$$(9). \quad \ldots \ldots \quad \Omega = \sin\alpha \, . \, d\omega.$$

Telle est la vitesse angulaire qui anime le plan osculateur de l'hélice H dans sa rotation autour de la tangente.

Soit R le rayon de deuxième courbure. On a.

$$(10). \quad R = \frac{V}{\Omega} = \frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha} = r \, . \, \frac{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{\rho}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

* On voit aisément que les traces de chacune des deux surfaces polaires sur les sections droites des cylindres qui leur correspondent sont les développantes des cercles de base.

Désignons par W', Ω', R' les quantités qui correspondent, pour l'hélice H', à celles que nous avons représentées par W, Ω, R pour l'hélice H. Les formules (1) et (9), lorsqu'on y remplace α par $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, donnent

(11). . . . . $W' = \sin\alpha . d\omega.$

(12). . . . . $\Omega' = \cos\alpha . d\omega.$

Il vient donc, conformément aux résultats généraux des numéros 145 et 147, pages 369 et 377,

$$W = \Omega', \qquad \Omega = W',$$

En opérant sur la formule (10), comme on l'a fait sur les formules (1) et (9), on trouve

(13). . . . . $R' = \rho \operatorname{tg} \alpha.$

La combinaison des équations (10) et (13) donne, en conséquence,

$$\rho^2 = RR'.$$

Ce résultat peut s'énoncer, comme il suit :

Le rayon de première courbure de chacune des hélices H, H' *est moyenne proportionnelle entre leurs rayons de deuxième courbure.*

On observera que, dans le cas particulier où l'hélice H est inclinée à 45° sur le plan de la section droite opq, l'hélice H' lui devient égale. On a, d'ailleurs, en ce cas

$$\rho = R = 2r.$$

155. Considérons une courbe quelconque S. Désignons par m l'un de ses points et donnons-nous les deux rayons de courbure correspondants. Soient ρ, le premier de ces rayons, et R, le deuxième. Si l'on pose

(1). . . . $\rho = r(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)$, $\quad R = \dfrac{r(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}$,

l'on en déduit

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho}{R}, \qquad r = \frac{\rho}{1 + \frac{\rho^2}{R^2}}.$$

L'hélice déterminée par les équations (2) prend, par rapport à la courbe S, le nom d'hélice osculatrice. Elle est tracée sur un cylindre droit à base circulaire. L'axe de ce cylindre est perpendiculaire à la normale principale : il la coupe à une distance du point m exprimée par la quantité r, qui est le rayon de la base. L'angle qu'il fait avec la touchante en m à la courbe S est représenté par $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Cet angle s'ouvre, par rapport à la touchante, du même côté que la courbe s'en écarte à partir du point m.

On observera que le contact établi entre la courbe S et l'hélice osculatrice déterminée par les équations (2) n'est pas du troisième ordre, bien qu'il soit plus intime que celui du cercle osculateur.

156. L'application du calcul à la détermination des résultats obtenus, dans les numéros qui précèdent, ne présente aucune difficulté.

Si, sans rien changer aux notations du n° 154, on prend, pour axe des z, l'axe du cylindre sur lequel est tracée l'hélice H, on peut écrire les équations de cette courbe sous la forme suivante :

$$(1). \quad x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = \frac{h\omega}{2\pi} = r.\omega.\operatorname{tg}\alpha.$$

De là résulte, en prenant l'angle ω pour variable indépendante,

$$dx = -r.\sin\omega.d\omega, \quad dy = r\cos\omega.d\omega, \quad dz = r\operatorname{tg}\alpha.d\omega,$$
$$d^2x = -r.\cos\omega.d\omega^2, \quad d^2y = -r\sin\omega.d\omega^2, \quad d^2z = 0,$$
$$d^3x = r\sin\omega.d\omega^3, \quad d^3y = -r\cos\omega.d\omega^3, \quad d^3z = 0.$$

On en déduit, d'abord,

$$(2). \quad . \; V = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = r\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}.d\omega,$$

et, comme on a

$$d.\frac{dx}{ds} = -\frac{\cos\omega}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}d\omega,\quad d.\frac{dy}{ds} = -\frac{\sin\omega}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}d\omega,\quad d.\frac{dz}{ds} = o,$$

il vient

$$(3).\ \mathrm{W} = \sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d.\frac{dz}{dz}\right)^2} = \frac{d\omega}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}.$$

Les équations (2) et (3) donnent

$$(4).\ \ldots\ldots\ \rho = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}} = r(1+\text{tg}^2\alpha).$$

On a de même

$$(5)\ \Omega = ds\frac{d^3x[dyd^2z - dzd^2y] + d^3y[dzd^2x - dxd^2z] + d^3z[dxd^2y - dyd^2x]}{[dyd^2z - dzd^2y]^2 + [dzd^2x - dxd^2z]^2 + [dxd^2y - dyd^2x]^2}$$
$$= \frac{\text{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}d\omega,$$

et, par conséquent,

$$(6).\ \ldots\ \mathrm{R} = \frac{\mathrm{V}}{\Omega} = \frac{r(1+\text{tg}^2\alpha)}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{\rho}{\text{tg}\,\alpha}.$$

S'agit-il ensuite de la surface polaire? Les équations générales (1) et (2) du n° 147, page 373, deviennent respectivement

$$(7).\ \ldots \begin{cases} u\cos\omega - t\sin\omega = (r\omega\,\text{tg}\,\alpha - v)\,\text{tg}\,\alpha, \\ u\sin\omega + t\cos\omega = -r\,\text{tg}^2\alpha. \end{cases}$$

On en déduit

$$u^2 + t^2 = \text{tg}^2\alpha\left[r^2\,\text{tg}^2\alpha + (r\omega\,\text{tg}\,\alpha - v)^2\right],$$

et, par suite,

$$\omega = \frac{v}{r\,\text{tg}\,\alpha}. \pm \sqrt{\frac{u^2+t^2}{r^2\,\text{tg}^4\alpha} - 1}.$$

ce qui donne

$$(8).\quad . \quad . \left\{ \begin{array}{l} t\cos\left[\dfrac{v}{r\,\mathrm{tg}\,\alpha} \pm \sqrt{\dfrac{u^2+t^2}{r^2\,\mathrm{tg}^4\,\alpha} - 1}\right] \\ + u\sin\left[\dfrac{v}{v\,\mathrm{tg}\,\alpha} \pm \sqrt{\dfrac{u^2+t^2}{r^2\,\mathrm{tg}^4\,\alpha} - 1}\right] \end{array} \right\} = - r\,\mathrm{tg}^2\,\alpha,$$

pour l'équation cherchée de la surface polaire.

Si l'on ajoute, aux équations (7), l'équation (4) du n° 147, page 374, en observant qu'elle se réduit à

$$(9).\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad t\sin\omega - u\cos\omega = o,$$

la combinaison des équations (7) et (9) détermine l'arête de rebroussement de la surface polaire. On trouve ainsi, pour équations de cette arête,

$$(10).\quad t = -r'\cos\omega, \qquad u = -r'\sin\omega, \qquad v = r'\omega\,\mathrm{tg}\,\alpha',$$

la quantité r' étant égale au produit $r\mathrm{tg}^2\alpha$, et l'angle α' au complément de l'angle α, $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

La comparaison des équations (1) et (10) fait voir que l'arête de rebroussement de la surface polaire n'est autre que l'hélice H' du n° 154, page 391. On reconnaît, d'ailleurs, aisément que les résultats obtenus d'abord par voie géométrique s'accordent avec ceux que nous venons d'établir au moyen du calcul.

157. Reportons-nous aux considérations du n° 146, page 370, et proposons-nous de déterminer la forme qu'affectent les développées de l'hélice H. Il est visible *à priori* que ces développées ne diffèrent que par leur position. On sait, d'ailleurs, qu'elles deviennent droites dans le développement de la surface polaire et qu'elles concourent toutes en un seul et même point, le point où se concentre la trace de la développante.

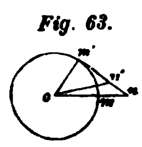
Considérons la transformée de l'hélice H' dans le développement de la surface polaire. Cette courbe a, pour courbure, en chaque point, la première courbure de l'hélice H'. Il s'ensuit qu'elle se résout en une circonférence de cercle au rayon

$$\rho = r(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha) = r'(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha'),$$

les notations restant les mêmes qu'aux numéros précédents et r' étant, en conséquence, le rayon du cylindre sur lequel est située l'hélice H'.

Prenons le point o pour centre, et, avec un rayon om' égal à ρ, traçons une circonférence de cercle C. Si l'on considère cette circonférence comme la transformée de l'hélice H', la trace de l'hélice H est en o, et c'est par ce point que passent les droites suivant lesquelles les développées de l'hélice H viennent se rectifier.

Fig. 63.



Soit omn l'une de ces droites. La polaire P', menée par le point m', se rabat suivant la tangente en m' à la circonférence C. Le segment $m'n$, intercepté sur cette tangente entre le point m' et la droite omn, est la partie de la polaire P' interceptée entre l'hélice H' et la développée qui part du point m. De là résulte, en désignant par η l'angle $m'om$,

$$m'n = \rho \operatorname{tg} \eta = r'[1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'] \operatorname{tg} \eta.$$

Considérons la polaire P' dans sa vraie position. La projection du segment $m'n$ sur le plan de la section droite a, pour expression,

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad m'n \cdot \cos \alpha' = \rho \operatorname{tg} \eta \cdot \cos \alpha'.$$

On a, d'ailleurs, pour la longueur σ de l'arc mm',

$$\sigma = \rho \cdot \eta.$$

Sans rien changer à la figure, imaginons, maintenant, qu'elle représente la section droite du cylindre sur lequel est tracée l'hélice H', et que le point m soit la projection du point où cette hélice est rencontrée par la développée que l'on considère.

L'arc σ reporté à partir du point m sur l'hélice H', ayant conservé sa longueur, aura, pour projection, sur la circonférence C un arc σ' déterminé par l'équation de condition

$$\sigma' = \sigma \cos \alpha' = \rho \cdot \eta \cos \alpha'.$$

Supposons cet arc représenté par mm', le point m' étant la projection du point où la polaire P' vient couper l'hélice H' *. Si l'on désigne, par η', l'angle correspondant mom', on doit avoir

$$r'\eta' = \sigma' = \rho . \eta . \cos \alpha'.$$

De là résulte

$$\eta' = \frac{\rho}{r'} \eta . \cos \alpha' = \eta . \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cos \alpha' = \frac{\eta}{\sin \alpha} . ^{**}$$

Observons ici que la polaire P' se projette suivant la tangente mn. Si donc on porte, sur cette tangente, à partir du point m', une longueur $m'n'$ égale à la projection déterminée par l'équation (1), et qu'on pose, en conséquence,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad m'n' = \rho . \cos \alpha' . \operatorname{tg} \eta = r' \frac{\operatorname{tg} \eta}{\sin \alpha},$$

on a, en n', la projection du point où la développée que l'on considère vient couper la polaire P'.

Prenons la droite omn pour axe, et désignons, par λ, le rayon vecteur on'; par θ, l'angle $n'on$. La tangente de l'angle $m'on'$ étant égale à

$$\frac{m'n'}{om'} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - r'^2}}{r'} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{r'^2} - 1}.$$

On a évidemment

$$\theta = \eta' - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\lambda^2}{r'^2} - 1}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\eta' = \frac{\eta}{\sin \alpha},$$

* On ne perdra pas de vue que si la figure est restée la même, c'est en exprimant des choses différentes.

** On sait que les angles α, α' sont compléments l'un de l'autre.

et l'équation (5) donne

$$\eta = \text{arc tg}.\frac{m'n'}{r'}\sin\alpha = \text{arc tg}\sin\alpha\sqrt{\frac{\lambda^2}{r'^2}-1}.$$

Il vient donc, en substituant,

$$(4).\quad \theta = \frac{1}{\sin\alpha}\,\text{arc tg}\sin\alpha\sqrt{\frac{\lambda^2}{r'^2}-1} - \text{arc tg}.\sqrt{\frac{\lambda^2}{r'^2}-1},$$

et telle est l'équation, en coordonnées polaires, de la courbe suivant laquelle la développée de l'hélice H se projette sur le plan perpendiculaire à l'axe de cette hélice. Rapportée au système des coordonnées rectilignes du n° 156, cette équation devient

$$(5).\quad \text{arc tg}\frac{u}{t} = \frac{1}{\sin\alpha}\,\text{arc tg}.\sin\alpha\sqrt{\frac{t^2+u^2}{r'^2}-1} - \text{arc tg}.\sqrt{\frac{t^2+u^2}{r'^2}-1},$$

ou, réduisant,

$$(6).\quad \frac{t^2+u^2}{r'^2}+\frac{u}{t}-1 = \text{tg}.\frac{\text{arc tg}.\sin\alpha\sqrt{\frac{t^2+u^2}{r'^2}-1}}{\sin\alpha}.$$

Si l'on joint, à l'équation (6), celle de la surface polaire

$$(7).\quad t\cos\left[\frac{v\,\text{tg}\,\alpha}{r'}\pm\sqrt{\frac{u^2+t^2}{r'^2}-1}\right]+u\sin\left[\frac{v\,\text{tg}\,\alpha}{r'}\pm\sqrt{\frac{u^2+t^2}{r'^2}-1}\right]=-r'.^*$$

On peut considérer les équations (6) et (7) comme déterminant d'une manière complète la développée de l'hélice H.

La discussion de l'équation (4) montre que les branches de la courbe représentée par cette équation, et partant du point m, satisfont aux conditions suivantes :

1° Elles ont en m un point de rebroussement du premier genre : leur tangente commune, en ce point, est la droite om.

* Cette équation ne diffère de l'équation (8) du n° 156, page 396, que par la substitution de la quantité r' au produit $r.tg^2\alpha$.

2° Elles ont, pour asymptotes, les droites menées à la distance r du point o sous l'inclinaison

$$o = \pm \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\sin \alpha}.$$

Remarque. — En désignant, par γ, l'angle sous lequel la courbe coupe son rayon vecteur, on a généralement

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{\frac{\lambda^2}{r'^2} - 1}}{1 + \frac{\lambda^2}{r'^2} \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

CHAPITRE IX.

DES SURFACES.

Génération des surfaces par une ligne mobile.

PRINCIPES FONDAMENTAUX.

158. Étant donnée une surface quelconque, on peut la considérer comme le lieu d'un système de lignes qui se succèdent continûment, et l'on est libre de déterminer ces lignes d'une infinité de manières différentes. Admettons, pour plus de simplicité, qu'elles résultent des intersections faites dans la surface par un plan mobile de direction constante. Il s'ensuit que la surface admet, pour génératrice, une ligne située tout entière dans le plan mobile, entraînée par ce plan, et changeant, en général, de forme en même temps qu'elle change de position. Imaginons qu'on fixe, sur la génératrice, un de ses points, et qu'on assujettisse ce point

à glisser sur la surface le long d'une trajectoire déterminée. Rien ne s'opposant à ce qu'on procède ainsi, nommons

A la surface donnée;
Q un plan mobile, de direction constante;
S_x la section faite dans la surface A par le plan Q;
m un point supposé fixe sur la ligne S_x;
S_y la trajectoire du point m sur la surface A.

Soit μ un point mobile assujetti à glisser sur la ligne S_x et *sortant du lieu* m à l'instant que l'on considère.

La vitesse V du point μ, sur la surface A, a pour composantes:
1° La vitesse V_x du point μ sur la ligne S_x;
2° La vitesse V_y du point m sur la trajectoire S_y.

Ces deux composantes sont dirigées respectivement suivant les tangentes menées, par le point m, aux sections S_x et S_y. Soit P le plan déterminé par ces deux tangentes. Les vitesses V_x, V_y étant dirigées dans le plan P, il s'ensuit que ce plan contient nécessairement leur résultante V et, par conséquent aussi, la tangente menée, par le point m, à la trace du point μ sur la surface A.

Observons que le plan P demeure invariable indépendamment du degré de grandeur attribué séparément à chacune des deux composantes V_x, V_y. Observons, en outre, qu'en changeant le rapport de ces composantes, on dirige, comme on veut, dans ce plan, la résultante V. Cela revient à dire qu'on est libre de choisir pour trace du point μ sur la surface A, l'une quelconque des lignes tracées sur cette surface à partir du point m. Quelle que soit cette ligne, sa tangente, en m, est comprise dans le plan P.

Concluons que le plan P contient, en général *, les tangentes menées en m à toutes les courbes tracées par ce point sur la surface A.

On désigne sous le nom de plan tangent le plan mené, en un point d'une surface, par deux quelconques des droites qui tou-

* On voit aisément que la démonstration serait en défaut, si l'une ou l'autre des deux vitesses V_x, V_y était nulle, ou qu'il y eût discontinuité dans le changement de forme subi par la ligne S_x au sortir du lieu qu'elle occupe.

chent la surface en ce point. Le résultat auquel nous venons de parvenir peut, en conséquence, s'énoncer comme il suit :

Il n'existe, en général, pour chaque point d'une surface qu'un seul plan tangent. Ce plan contient à la fois toutes les droites qui touchent la surface en ce point *.

159. Nous avons établi au n° 104 (voir pages 267 et suivantes) que le changement de forme de la ligne S_x ne peut altérer en aucune façon la vitesse angulaire qui anime la directrice du point μ au sortir du lieu m. Cette vitesse est la même que si la ligne S_x persistait dans sa forme actuelle et qu'elle tournât autour du point m comme le fait sa tangente en ce point. Plaçons-nous à l'instant précis où le point μ sort du lieu m, et nommons

ω, la vitesse qui anime la ligne S_x dans sa rotation autour du point m;

W, la vitesse avec laquelle la directrice du point μ s'écarte angulairement de la tangente en m à la ligne S_x;

Ω, la vitesse totale angulaire de cette même directrice.

On a évidemment

$$(1) \quad \Omega = W + \omega.$$

Partons de là et, considérant ce qui se passe dans le plan Q, lorsqu'on le regarde comme fixe, c'est-à-dire lorsqu'on fait abstraction de la translation qui l'anime, proposons-nous la question suivante :

Soit mX *une droite quelconque menée par le point* m *et supposée fixe dans le plan* Q. *On sait que la ligne* S_x *tourne autour du point* m *avec la vitesse* ω. *Cela posé, on demande de déterminer la différentielle de la vitesse avec laquelle le point* μ *s'écarte de la droite* mX, *au sortir du lieu* m *sur la ligne* S_x.

* Ce principe a déjà été démontré au n° 27 de la deuxième partie. Le lecteur peut d'ailleurs se reporter au n° 104 de la troisième partie, pour ce qui concerne l'indépendance existant, d'une part, entre le changement de forme de la génératrice mobile, d'autre part, entre la vitesse actuelle du point μ sur la ligne S_x et la rotation de la directrice de ce point au sortir du lieu m.

Supposons le point μ situé en n sur la ligne S_x et représentons, par nt, la tangente en ce point.

Soient $z = np$ la perpendiculaire abaissée du point n sur la droite $m\mathrm{X}$;

$x = mp$ la distance du point m au pied de cette perpendiculaire;

α l'angle de la tangente nt avec la droite $m\mathrm{X}$.

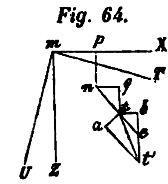
La vitesse communiquée au point n de la ligne S_x par la rotation ω établie autour du point m a, pour composantes :

1° Une vitesse $\omega . x$ dirigée suivant pn;

2° Une vitesse $-\omega . z$ parallèle à $m\mathrm{X}$.

Soit v la vitesse qui anime le point μ sur la ligne S_x. Cette vitesse a, pour composantes :

Fig. 64.



1° Une vitesse $v . \sin \alpha$ dirigée suivant np;

2° Une vitesse $v . \cos \alpha$ parallèle à $m\mathrm{X}$.

De là résulte, pour la vitesse totale avec laquelle le point μ s'écarte de la droite $m\mathrm{X}$, au sortir du lieu n,

$$\dot{z} = dz = v . \sin \alpha + \omega . x.$$

On a, de même,

$$\dot{x} = dx = v . \cos \alpha - \omega . z,$$

ce qui donne

$$v = \frac{\dot{x} + \omega . z}{\cos \alpha},$$

et, par suite,

$$(2) \ldots \ldots \quad dz = (\dot{x} + \omega . z) \operatorname{tg} \alpha + \omega . x.$$

Regardons la vitesse $\dot{x}$ comme constante et, après avoir différencié l'équation (2), reportons le point n en m, ce qui revient à annuler les variables x et z dans le résultat de la différentiation. On trouve ainsi

$$(3) \ldots \quad d^2 z = \frac{\dot{x} . \dot{x}}{\cos^2 \alpha} + \omega . \dot{x}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{\dot{x}(\dot{x} + \omega)}{\cos^2 \alpha}.$$

La vitesse $\dot{\alpha}$ n'étant autre chose que la vitesse angulaire désignée ci-dessus par Ω dans l'équation (1), on a

$$\dot{\alpha} = \omega + \mathrm{W}.$$

Il vient donc, en substituant,

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d^2z = \frac{\dot{x}(\mathrm{W} + 2\omega)}{\cos^2\alpha} \, ^* .$$

Ce résultat peut s'énoncer, comme il suit,

Lorsque la ligne S_x *ne tourne pas autour du point* m, *la différentielle* $\mathrm{d}^2\mathrm{z}$ *est égale à la vitesse du point décrivant multipliée*

* Soient (mX, mZ), (mT, mU) deux systèmes d'axes coordonnés rectangulaires, l'un fixe, l'autre mobile avec la ligne S_x et participant à la rotation de cette ligne autour du point m. En désignant par η l'angle variable XmT, on a

$$z = t \sin\eta + u \cos\eta, \qquad x = t \cos\eta - u \sin\eta,$$

t, u étant les coordonnées du point n par rapport aux axes mobiles (mT, mU), en même temps que x, z sont les coordonnées de ce même point par rapport aux axes fixes mX, mZ. (Voir la fig. 64, page 403.)

De là résulte, en premier lieu,

$$dz = dt \,.\, \sin\eta + du \cos\eta + (t \cos\eta - u \sin\eta)d\eta,$$
$$dx = dt \cos\eta - du \sin\eta - (t \sin\eta + u \cos\eta)d\eta.$$

Différenciant une seconde fois, et annulant les quantités t, u, x, z, η dans le résultat de la différentiation, on trouve

$$d^2z = d^2u + 2dtd\eta = d^2u + 2\omega dx, \qquad d^2x = d^2t - 2dud\eta = d^2t - 2\omega.dy.$$

Soit α l'angle que la tangente en m à la ligne S_x fait avec la droite mT, on a, généralement,

$$du = dt \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha,$$

et, par suite,

$$d^2u = \frac{dt \,.\, d\alpha}{\cos^2\alpha} + d^2t \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{W}.dx}{\cos^2\alpha} + d^2t \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha,$$

la différentielle $d\alpha$ représentant ici la vitesse angulaire avec laquelle la directrice du point μ tourne par rapport à la droite mT, et étant égale, en conséquence, à la quantité W.

par la vitesse angulaire de la directrice et divisée par le carré du cosinus de l'angle que la tangente en m *fait avec la droite* mX.

Lorsque la ligne S_x *tourne autour du point* m, *la rotation établie autour de ce point produit, en ce qui concerne la différentielle* d^2z, *le même effet qu'une rotation double établie autour du point décrivant.*

Dans le cas particulier où la droite *m*X touche en *m* la ligne S_r, on a, plus simplement,

(5). . . . . $d^2z = \dot{x}\,[W + 2\omega]$.

De là résultent les énoncés suivants :

Lorsqu'un point assujetti à décrire une courbe sort d'un lieu

On a d'ailleurs, d'après ce qui précède,

$$d^2t = d^2x + 2\omega . dy.$$

De là résulte, après substitution et réduction,

$$d^2z = \frac{dx(W + 2\omega)}{\cos^2\alpha} + d^2x \operatorname{tg}\alpha.$$

Cette dernière équation se réduit à

$$d^2z = \frac{W + 2\omega}{\cos^2\alpha} . dx,$$

lorsqu'on prend x pour variable indépendante et qu'on annule, en conséquence, la différentielle d^2x.

Ce résultat est celui du texte. Si le point *n* restait quelconque, et que l'on se bornât à annuler la variable η, on trouverait généralement

$$d^2z = d^2u + 2dtd\eta + xd^2\eta - z(d\eta)^2$$
$$d^2x = d^2t - 2dud\eta - zd^2\eta - x(d\eta)^2$$

et, par suite,

$$d^2z = \frac{(W + 2\omega)(dx + \omega . z)}{\cos^2\alpha} + d^2x . \operatorname{tg}\alpha + d\omega(x + z\operatorname{tg}\alpha) + \omega^2(x\operatorname{tg}\alpha - z).$$

On observera que, dans le cas particulier où l'angle α se réduit à zéro, l'équation du texte subsiste avec ses conséquences, indépendamment de la constance attribuée à la vitesse $\dot{x}$ ou dx.

quelconque déterminé, la différentielle de la vitesse, avec laquelle il s'écarte de la tangente en ce lieu, a, pour expression, le produit de sa vitesse propre par la vitesse angulaire de sa directrice.

Si l'écart est pris par rapport à la droite fixe suivant laquelle la tangente est d'abord dirigée, et que cette tangente tourne autour du point de contact, la rotation établie autour de ce point produit, en ce qui concerne la différentielle de la vitesse d'écart, le même effet qu'une rotation double établie autour du point décrivant.

160. Au lieu d'opérer comme nous venons de le faire, on peut procéder directement par voie géométrique. En effet, on a d'abord, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure,

$$\dot{z} = (\dot{x} + \omega.z)\ \text{tg}\,\alpha + \omega.x.$$

Il est clair, d'ailleurs, que cette vitesse d'écart se compose de deux parties distinctes, l'une $\omega.x$ provenant de la rotation établie autour du point m, l'autre $(\dot{x} + \omega.z)\ tg\alpha$ due au glissement du point μ sur la directrice nt. La composante $(\dot{x} + \omega z)\ tg\alpha$ s'obtient en menant par le point n une parallèle à mX, prenant sur cette parallèle une longueur nq égale à la somme $\dot{x} + \omega.z$ et achevant le triangle nqt dont l'angle en q est droit. Cela donne

$$qt = (\dot{x} + \omega.z)\ \text{tg}\,\alpha.$$

S'agit-il maintenant de la partie correspondante de la différentielle $\ddot{z}$? Elle n'est autre chose que la vitesse avec laquelle le point t glisse sur la droite qt, lorsque le point q se meut sur nq avec la vitesse $d[\dot{x} + \omega z]$, et que l'hypoténuse nt tourne autour du point n avec la vitesse $\dot{\alpha} = \text{W} + \omega$.

La vitesse $d[\dot{x} + \omega z]$, ayant pour expression générale $\ddot{x} + \dot{\omega} z + \omega \dot{z}$, se réduit à

$$\omega.\dot{z} = \omega.\dot{x}\ \text{tg}\,\alpha,$$

dans le cas où le point n est reporté en m et qu'on considère la vitesse $\dot{x}$ comme constante.

Par le point t menons une parallèle à mX (voir la fig. 64, page 403) et, sur cette parallèle, prenons la longueur

$$tb = \omega . \dot{x} \operatorname{tg} \alpha.$$

La vitesse du point t a son extrémité située quelque part sur la droite bt' menée par le point b parallèlement à qt.

Élevons en t une perpendiculaire à nt et, sur cette perpendiculaire, prenons la longueur

$$ta = (\mathrm{W} + \omega)\, nt = \frac{(\mathrm{W} + \omega)\, nq}{\cos \alpha} = \frac{(\mathrm{W} + \omega)\, \dot{x}}{\cos \alpha}.$$

La vitesse du point t a son extrémité située quelque part sur la droite at' menée par le point a parallèlement à nt.

Soit t' le point situé à la rencontre des droites bt', at' : tt' est la vitesse du point t, et bt' la composante cherchée.

Prolongeons la droite nt jusqu'à sa rencontre en c avec le segment bt'. On a évidemment

$$bt' = bc + ct' = bt . \operatorname{tg} \alpha + \frac{at}{\cos \alpha} = \omega . \dot{x} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{(\mathrm{W} + \omega)\, \dot{x}}{\cos^2 \alpha}.$$

La partie de la différentielle $\dot{z}$ qui correspond à la vitesse $\omega . x$ est d'ailleurs $\omega . \dot{x}$. De là résulte, en premier lieu,

$$\ddot{z} = \omega . \dot{x} + \omega . \dot{x} \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{(\mathrm{W} + \omega)\, \dot{x}}{\cos^2 \alpha},$$

et, après réduction,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \ddot{z} = \frac{\dot{x}\, (\mathrm{W} + 2\omega)}{\cos^2 \alpha},$$

résultat identique à celui du n° 159, et comportant, en conséquence, les mêmes énoncés.

Théorème des tangentes réciproques.

161. Soient une surface quelconque A;

Fig. 63.

O un point de cette surface;

OX, OY deux droites menées par le point O tangentiellement à la surface A;

OZ la perpendiculaire élevée en O sur le plan XOY;

S_y la section faite dans la surface A par le plan ZOY;

Q un plan mobile assujetti à rester parallèle au plan ZOX;

S_x la section faite dans la surface A par le plan Q;

m le point commun aux deux sections S_x, S_y.

Prenons les droites OX, OY, OZ pour axes coordonnés, et plaçons-nous à l'instant précis où le plan Q sort du lieu ZOX, le point *m* étant considéré comme fixe sur la section S_x et glissant avec la vitesse $\dot{y}$ le long de la section S_y.

Imaginons qu'à ce même instant il y ait en *m* un point mobile μ, assujetti à rester sur la section S_x et sortant du lieu *m* avec la vitesse $\dot{x}$.

En désignant par W_y la vitesse angulaire de la directrice du point *m* sur la ligne S_y, la différentielle de la vitesse avec laquelle ce point s'écarte de la tangente OY au sortir du lieu O a pour expression le produit

$$\dot{y} . W_y. \text{*}$$

Soit ω_y la vitesse angulaire de la tangente en *m* à la ligne S_x et W_x celle qui anime la directrice du point μ par rapport à cette même tangente. Si, *toutes choses égales d'ailleurs*, le point *m* était fixe, la différentielle de la vitesse avec laquelle le point μ s'écarterait de la droite OX au sortir du lieu *m* aurait, pour expression, le produit

$$\dot{x}[W_x + 2\omega_y]. \text{*}$$

* Voir, au besoin, le n° 159 ou le n° 160, pages 402 et suivantes.

En réalité, la vitesse du point m se communique à tous les points de la ligne S_x et, par conséquent, au point μ. Il suit de là que la différentielle de la vitesse avec laquelle le point μ s'écarte du plan XOY, au sortir du lieu O, est la somme des deux différentielles précédentes. On peut donc écrire

(1). . . . $\ddot{z} = d^2z = \dot{y}.W_y + 2\dot{x}.\omega_y + \dot{x}W_x.$

On voit d'ailleurs, aisément, que la direction suivie par le point μ, au sortir du lieu O, est complétement déterminée, par les deux vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$ *.

Au lieu d'opérer comme nous venons de le faire, on peut substituer la section S_x à la section S_y et réciproquemment, c'est-à-dire considérer la section faite dans la surface parallèlement au plan ZOY comme étant celle qui se déplace et que le point μ décrit, tandis que le point m glisse sur la section S_x supposée fixe dans le plan ZOX. Si l'on désigne alors par ω_x la vitesse angulaire de la tangente en m à la ligne S_y, il vient, comme tout à l'heure,

(2). . . . . $\ddot{z} = d^2z = \dot{x}.W_x + 2\dot{y}\omega_x + \dot{y}.W_y.$

Rien d'ailleurs n'est changé dans la direction suivie par le point μ, au sortir du lieu O. Il faut donc que les équations (1) et (2) subsistent en même temps. De là résulte, en général,

(3). . . . . $\dot{x}.\omega_y = \dot{y}.\omega_x,$

et, pour le cas particulier où l'on prend la vitesse $\dot{x}$ égale à la vitesse $\dot{y}$,

(4). . . . . $\omega_x = \omega_y.$

* Soit λ l'angle XOY, et α celui que fait avec l'axe OX la direction OL suivie par le point μ, au sortir du lieu O, on a évidemment

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\lambda-\alpha)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Dans le cas particulier où l'on pose $\dot{x} = \dot{y}$, la droite OL est dirigée suivant la bissectrice de l'angle XOY.

Traduite en langage ordinaire, l'équation (4) exprime une propriété curieuse qui comporte de nombreuses applications et qu'on peut énoncer, comme il suit :

Soit P un plan tangent en O à une surface A; OX, OY les traces sur le plan P de deux sections normales S_x, S_y. Nous désignons, sous le nom de *tangentes réciproques*, deux tangentes conjuguées entre elles et respectivement assujetties, l'une à rester parallèle au plan de la section S_x tandis que son point de contact glisse sur la section S_y, l'autre à rester parallèle au plan de la section S_y tandis que son point de contact glisse sur la section S_x.

Cela posé, voici l'énoncé dont il s'agit :

Lorsque deux tangentes réciproques sortent en même temps des sections normales qui les déterminent, et que leurs vitesses de translation sont les mêmes en grandeur, leurs rotations autour des directions suivies par leurs points de contact sont égales et de signe contraire.

L'équation (4) exprime directement qu'il y a égalité entre les vitesses angulaires avec lesquelles les tangentes réciproques considérées s'écartent simultanément des positions dont elles sortent à l'origine de leur déplacement. Pour passer de ces vitesses angulaires aux rotations mentionnées dans l'énoncé qui précède, il faut les diviser chacune par un même facteur, le sinus de l'angle que font entre elles les traces OX, OY. L'égalité des vitesses angulaires qui figurent dans l'équation (4) implique, en conséquence, celle des rotations qui leur correspondent respectivement autour des directions déterminées par ces traces. On voit, d'ailleurs, aisément que ces rotations sont de signe contraire, les écarts exprimés par les produits $\dot{y}.\omega_x$, $\dot{x}.\omega_y$ étant nécessairement de même signe.

De l'égalité $f''_{x,y}(x,y) = f''_{y,x}(x,y)$.

162. Sans rien changer à ce qui précède, imaginons que les axes OX, OY ne soient pas tangents en O à la surface A.

Si l'on désigne, par α, l'angle que la tangente en O à la section

S_x fait avec la droite OX et, par β, l'angle que la tangente en O à la section S_y fait avec la droite OY, il est visible qu'en opérant, comme tout à l'heure, on trouvera d'abord

$$(1).\quad \ddot{z} = d^2z = \frac{\dot{y}.W_y}{\cos^2\beta} + \frac{2\dot{x}.\omega_y}{\cos^2\alpha} + \frac{\dot{x}.W_x}{\cos^2\alpha},$$

et, ensuite,

$$\ddot{z} = d^2z = \frac{\dot{x}.W_x}{\cos^2\alpha} + \frac{2\dot{y}.\omega_x}{\cos^2\beta} + \frac{\dot{y}.W_y}{\cos^2\beta},$$

le tout, conformément au théorème général du n° 159 ou du n° 160.

Les équations (1) et (2) impliquent, comme conséquence,

$$(3).\quad \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\dot{x}\cos^2\beta}{\dot{y}\cos^2\alpha}.$$

Supposons qu'on détermine les vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$ de manière à ce qu'il existe entre elles le même rapport qu'entre les carrés des cosinus des angles α et β; on aura

$$(4).\quad \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta},$$

et, par suite,

$$(5).\quad \omega_x = \omega_y.$$

L'équation (5) subsiste, en général, sous la double condition que l'axe OZ soit perpendiculaire au plan XOY et que l'équation (4) soit satisfaite. L'énoncé qu'elle comporte est analogue à celui que nous avons formulé dans le numéro précédent.

Soit

$$(6).\quad z = f(x, y),$$

l'équation de la surface A; on en déduit généralement

$$(7).\quad \operatorname{tg}\alpha = f'_x(x, y).$$

Différencions l'équation (7) en y considérant la variable x comme constante et en observant que la différentielle $\dot{x}$ n'est autre chose que la vitesse angulaire désignée ci-dessus par ω_y. On trouve ainsi

$$(8). \quad \frac{\omega_y}{\cos^2 \alpha} = \dot{y} . f''_{x,y}(x, y).$$

On a, de même,

$$\operatorname{tg} 6 = f'_y(x, y),$$

et, par suite,

$$(9). \quad \frac{\omega_x}{\cos^2 6} = \dot{x} . f''_{y,x}(x, y).$$

La comparaison des équations (8) et (9) donne, en vertu de l'équation (3),

$$(10). \quad f''_{x,y}(x, y) = f''_{y,x}(x, y).$$

Ce résultat, qui nous est déjà connu, s'établit ainsi très-simplement. On sait, d'ailleurs, qu'en le posant *à priori*, d'après la méthode des limites, on en déduit immédiatement le théorème des tangentes réciproques.

163. L'égalité

$$f''_{x,y}(x, y) = f''_{y,x}(x, y),$$

peut s'établir sans autre secours que celui de la géométrie plane. Étant donnée l'équation générale

$$(1). \quad z = f(x, y),$$

considérons-la comme déterminant, pour chaque valeur de la variable y, une ligne plane désignée par S et rapportée à deux axes coordonnés rectangulaires OX, OY.

Soit m un point quelconque supposé fixe sur la ligne S et α l'angle que la touchante en ce point fait avec l'axe OX. On a, généralement,

$$(2). \quad \operatorname{tg} \alpha = f'_x(x, y).$$

Assujettissons le point m à conserver toujours la même abscisse et différencions l'équation (2) dans cette hypothèse. On trouve ainsi,

$$\frac{\dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha} = \dot{y}.f''_{x,y}(x, y).$$

$\dot{\alpha}$ étant la vitesse angulaire qui anime la ligne S dans sa rotation autour du point m, alors que ce point glisse sur l'ordonnée qui lui correspond, et qu'entraînée par lui, la ligne S sort du lieu qu'elle occupe en changeant de forme et de position.

Soit μ un point mobile assujetti à rester sur la ligne S et sortant du lieu m à l'instant que l'on considère. L'ordonnée de ce point étant représentée par z, il est visible que la partie de la différentielle $\ddot{z}$ ou d^2z qui correspond au glissement du point m sur son ordonnée a pour expression

$$\dot{y}^2.f''_y(x, y).$$

La partie de cette différentielle qui correspond au mouvement du point μ sur la ligne S est donnée par la formule (4) du n° 159, page 404. On a ainsi

$$\frac{\dot{x}(\mathrm{W} + 2\dot{\alpha})}{\cos^2 \alpha} = \frac{\mathrm{W}.\dot{x}}{\cos^2 \alpha} + 2\dot{x}.\dot{y}.f''_{x,y}(x, y),$$

et de là résulte évidemment

$$(3). \quad . \quad . \ \ddot{z} = d^2z = \frac{\mathrm{W}\dot{x}}{\cos^2 \alpha} + 2\dot{x}\dot{y}f''_{x,y}(x, y) + \dot{y}^2 f''_y(x, y).$$

Observons ici que pour avoir l'expression de la quantité W, il suffit de différencier l'équation (2) en y considérant la variable y comme constante. La valeur qu'on obtient ainsi pour $\dot{\alpha}$ est précisément celle de la vitesse angulaire W. Ce procédé donne

$$\frac{\mathrm{W}}{\cos^2 \alpha} = \dot{x}f''_x(x, y).$$

Il vient donc, en substituant,

$$(4). \quad \ddot{z} = d^2z = \dot{x}^2 f''_x(x, y) + 2\dot{x}\dot{y} f''_{x,y}(x, y) + \dot{y}^2 . f''_y(x, y).$$

Cela posé, différencions deux fois de suite l'équation (1) et effectuons cette opération en nous conformant à la marche suivie dans ce qui précède, c'est-à-dire en considérant comme constantes les deux vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$. Le résultat étant

$$(5). \quad \ddot{z} = d^2z = \dot{x}^2 f''_x(x, y) + \dot{x}\dot{y} [f''_{x,y}(x, y) + f''_{y,x}(x, y)] + \dot{y}^2 f''_y(x, y),$$

on voit, par sa comparaison avec l'équation (4), qu'il implique l'égalité

$$(6). \quad \ldots\ldots \quad f''_{x,y}(x, y) = f''_{y,x}(x, y).$$

Cette égalité peut d'ailleurs s'écrire, comme il suit,

$$(7). \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{d^2z}{dx.dy}\right) = \left(\frac{d^2z}{dy.dx}\right).$$

Plan tangent. — Normale. — Plans normaux.

164. Nous avons vu au n° 158, page 402, qu'il existe, en général, pour chaque point d'une surface un plan unique, contenant toutes les droites qui touchent la surface en ce point. Ce plan est déterminé par deux quelconques de ces droites : on le désigne sous le nom de *plan tangent*.

Veut-on chercher directement l'équation du lieu qui contient, pour un point quelconque d'une surface, toutes les tangentes menées par ce point? Voici comment on peut procéder généralement.

Soient A la surface donnée, et

$$(1). \quad \ldots\ldots\ldots \quad F(x, y, z) = o$$

son équation. Concevons un point μ assujetti à rester sur la sur-

face A et sortant du lieu m à l'instant que l'on considère. On a, en général,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF}{dz}\right) dz = o.$$

les quantités dx, dy, dz étant les trois composantes de la vitesse du point μ, ou, ce qui revient au même, les projections de cette vitesse sur les axes coordonnés.

Soit mn le segment de droite qui représente, en direction, sens et grandeur, la vitesse du point μ au sortir du lieu m. En désignant, par t, u, v, les coordonnées du point n et, par x, y, z, celles du point m, on a

$$dx = t - x, \qquad dy = u - y, \qquad dz = v - z.$$

De là résulte, en substituant,

$$(3). \quad . \ (t - x)\left(\frac{dF}{dx}\right) + (u - y)\left(\frac{dF}{dy}\right) + (v - z)\left(\frac{dF}{dz}\right) = o.$$

L'équation (3) est celle d'un plan passant par le point m et complétement déterminé par les valeurs que les dérivées partielles $\left(\frac{dF}{dx}\right)$, $\left(\frac{dF}{dy}\right)$, $\left(\frac{dF}{dz}\right)$ affectent en ce point. Elle est en même temps le lieu des points n et, par conséquent, celui de toutes les droites qui touchent en m la surface A. Ce résultat s'accorde avec les déductions du n° 158. Il fournit, en outre, l'équation générale du plan tangent en un point quelconque d'une surface.

Si l'équation de la surface est donnée sous la forme

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad z = f(x, y)$$

et qu'on désigne, comme on le fait généralement, par p et q les dérivées partielles $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, l'équation (2) devient

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dz = pdx + qdy,$$

et l'on en déduit, pour celle du plan tangent,

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad v - z = p(t - x) + q(u - y).$$

165. Sans rien changer à ce qui précède, proposons-nous de déterminer les équations de la droite menée par le point m perpendiculairement au plan tangent. Cette droite est la *normale* au point m de la surface A. Désignons-la par N.

Soit n un point quelconque supposé fixe sur la normale N. Représentons, par t, u, v, les coordonnées de ce point; par x, y, z, celles du point μ; par λ, la distance $n\mu$. On a généralement, les axes coordonnés étant rectangulaires,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad \lambda^2 = (t - x)^2 + (u - y)^2 + (v - z)^2.$$

Cela posé, si nous considérons le point μ à l'instant précis où il sort du lieu m, sa vitesse est perpendiculaire à la droite $n\mu$. Il s'ensuit que la vitesse de glissement $d\lambda$ se réduit à zéro. De là résulte

$$(2). \quad . \quad . \quad (t - x)dx + (u - y)dy + (v - z)dz = o.$$

L'équation (2) subsiste, en général, pour toutes les directions que le point μ peut prendre au sortir du lieu m. Elle subsiste, en outre, non-seulement pour tous les points de la normale N, mais aussi pour tous ceux du plan mené par le point m perpendiculairement à la direction suivie par le point μ dans son déplacement effectif. Ces remarques impliquent évidemment les déductions suivantes :

1° L'équation (2) est celle du plan mené par le point m perpendiculairement à la direction déterminée par les composantes dx, dy, dz*. Elle peut ainsi représenter tous les plans menés par la normale et désignés sous le nom de *plans normaux*.

* Les cosinus des angles qu'une tangente quelconque fait avec les axes coordonnés, supposés rectangulaires, étant $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, les équations de cette tangente sont de la forme

$$t - x = \frac{dx}{dz}(v - z), \quad u - y = \frac{dy}{dz}(v - z).$$

Il s'ensuit, conformément à l'équation (5) du n° 130, page 341, que le plan

2° Si l'on considère, en particulier, deux quelconques de ces plans, leur intersection détermine la normale.

Posons $y = \text{cons}^{\text{te}}$. Le plan normal, qui correspond à cette hypothèse, a pour équation

$$(3). \quad \ldots\ldots \quad t - x + p(v - z) = o.$$

On a de même, en posant $x = \text{cons}^{\text{te}}$,

$$(4). \quad \ldots\ldots \quad u - y + q(v - z) = o.$$

Il suit de là que les équations (3) et (4) déterminent la normale N et résolvent ainsi la question proposée.

166. Les équations (2) et (5) du n° 164 subsistent, en même temps que l'équation (2) du n° 165, pour toutes valeurs attribuées séparément à chacune des deux différentielles dx et dy. Cette circonstance exige que l'on ait

$$(1). \quad -p = \frac{\left(\frac{dF}{dx}\right)}{\left(\frac{dF}{dz}\right)} = \frac{t - x}{v - z}, \qquad -q = \frac{\left(\frac{dF}{dy}\right)}{\left(\frac{dF}{dz}\right)} = \frac{u - y}{v - z}.$$

De là résulte

$$(2). \quad t - x + p(v - z) = o, \quad u - y + q(v - z) = o,$$

ou bien encore

$$(3) \; (t - x)\left(\frac{dF}{dz}\right) = (v - z)\left(\frac{dF}{dx}\right), \quad (u - y)\left(\frac{dF}{dz}\right) = (v - z)\left(\frac{dF}{dy}\right).$$

Les équations (2) déterminent, ainsi que les équations (3), une seule et même droite, la normale N.

mené par le point m perpendiculairement à cette tangente a, pour équation,

$$(t - x)dx + (u - y)dy + (v - z)dz = o.$$

On peut donc écrire *à priori* l'équation (2) et lui attribuer directement le sens exprimé dans le texte.

En procédant comme nous venons de le faire en dernier lieu, on démontre directement que les tangentes menées par le point m à la surface A sont toutes perpendiculaires à une seule et même droite. La conséquence est que ces tangentes sont toutes situées dans un seul et même plan, ce qui vérifie les déductions des numéros 158 et 164.

CHAPITRE X.

COURBURE DES SURFACES.

Théorie géométrique de la courbure des surfaces.

COURBURE DES SECTIONS NORMALES.

167. Soient A une surface quelconque; O un point de cette surface; N la normale en ce point; Π un plan mené par la normale N; S la section faite dans la surface A par le plan Π.

Lorsque le plan Π tourne autour de la normale N, la ligne S ne change pas seulement de position; en général, elle change aussi de forme, et sa courbure en O varie incessamment. Considérons cette courbure. Elle est, par hypothèse, continûment variable, et redevient la même après chaque demi-révolution du plan Π. De là résulte évidemment cette première conséquence:

Il existe, au moins, deux sections normales dont la courbure en O est, pour l'une plus grande, pour l'autre plus petite que celles des sections qui précèdent et suivent immédiatement.

168. Soit P le plan tangent en O à la surface A; S_x, S_y deux sections normales passant par le point O et dirigées perpendiculairement l'une sur l'autre; OX, OY les traces des sections S_x, S_y sur le plan P.

Désignons par m un point mobile assujetti à décrire la section S_y et sortant du lieu O à l'instant que l'on considère.

Désignons, en même temps, par T_y une droite assujettie à toucher en m la surface A et à rester parallèle au plan de la section S_x.

Cela posé, considérons l'intersection de la surface A par un cylindre droit, à base circulaire de rayon suffisamment petit, et ayant pour axe la normale N. Soit I cette intersection. En général, elle est *fermée*, et ses différents points s'écartent inégalement du plan qui touche en O la surface A. Il suit de là * qu'il est, *au moins*, deux points de la courbe I pour chacun desquels la tangente à cette courbe est parallèle au plan P et, *par conséquent*, *perpendiculaire* à la section normale correspondante.

Cette propriété de la courbe I prend naissance avec elle, c'est-à-dire lorsque le rayon du cylindre qui la détermine s'engendre continûment à partir de zéro. La conséquence immédiate est que la trace OY comporte, *au moins*, deux directions distinctes, satisfaisant chacune à l'énoncé suivant :

L'état de mouvement qui anime la tangente T_y *au sortir du lieu* OX *est une translation simple.*

Si l'on considère l'état de mouvement qu'affecte, au sortir du lieu P, le plan tangent en m à la surface A, l'énoncé qui précède implique évidemment cet autre énoncé qui n'en diffère que par la forme :

La caractéristique du plan tangent en m *est perpendiculaire à la section normale* S_y.

La coïncidence, existant entre les traces qui satisfont à ces deux énoncés et les directions des sections normales dont la courbure en O est un *maximum* ou un *minimum*, est en quelque sorte évidente. Nous allons néanmoins la démontrer.

* La continuité qui subsiste, par hypothèse, implique l'absence de tout changement brusque dans les directions tangentielles. On sait d'ailleurs qu'en O les tangentes sont toutes situées dans le plan P.

169. Appuyons-nous sur la condition remplie par la tangente T_y et consistant en ce que l'état de mouvement, qui anime cette droite au sortir du lieu OX, se réduit à une simple translation. Il suit de là, conformément aux principes du n° 104, page 267, que tout commence, *à partir du point* O, comme si la surface A s'engendrait par le déplacement de la section S_x, *cette section conservant sa forme et se mouvant tout entière par translation avec la vitesse du point* m *sur la section* S_y. On observera que, *dans cette hypothèse*, les vitesses simultanées des différents points de la section S_x sont toujours égales à celle du point *m* et qu'*elles commencent toutes* par être parallèles à la droite OY.

Désignons par T_x une droite assujettie à rester parallèle au plan de la section S_y et à toucher la surface A en un point qui sorte du lieu O suivant la section normale S_x *. Il résulte de l'observation précédente que la tangente T_x sort du lieu OY comme la tangente T_y sort du lieu OX, c'est-à-dire avec un état de mouvement qui se réduit à une simple translation. La *réciprocité* qui s'établit ainsi entre les tangentes T_x, T_y implique le résultat suivant :

Les directions qui satisfont à l'énoncé du n° 168 *sont conjuguées deux à deux, rectangulairement.*

170. Les sections S_x, S_y restant déterminées comme ci-dessus, considérons deux sections normales quelconques également inclinées sur la section S_x et représentées par leurs traces OL, OL′ (fig. 66).

Les conditions qui régissent la génération de la surface A, *à partir du point* O, étant les mêmes pour chacun des côtés de la droite OX, il en résulte nécessairement que les deux sections normales OL, OL′ ont même courbure en O **. Cette égalité de cour-

* Il est visible que les droites T_x, T_y forment entre elles un système de *tangentes réciproques*. La propriété dont elles jouissent *à ce titre* n'a pas besoin d'être invoquée ici, comme conséquence du théorème général démontré précédemment. Elle s'établit, d'elle-même, dans les conditions les plus simples.

** Nous avons dit que tout commençait, à partir du point O, comme si la surface A admettait pour génératrice la section S_x, et que cette ligne se mût par

bure s'applique à toutes les sections normales qui se succèdent, à partir de la section S_x, et qui sont dirigées symétriquement de part et d'autre. Il s'ensuit évidemment que chacune des deux sections S_x, S_y est une section de courbure *maximum* ou de courbure *minimum*. Ce résultat peut s'énoncer comme il suit :

Les sections normales qui satisfont à l'énoncé du n° 168 sont, en même temps, des sections de plus grande ou de plus petite courbure.

Veut-on démontrer la réciproque de ce théorème? Il suffit de substituer aux sections normales leurs cercles osculateurs. Cela fait, on voit immédiatement que, parmi ces cercles, les *maximum* ou *minimum* satisfont seuls à l'énoncé du n° 168.

Pour plus de simplicité, nous désignerons sous le nom de *sections principales* les sections qui satisfont à l'énoncé du n° 168, et qui sont, en conséquence, des sections de plus grande ou de plus petite courbure.

Soit μ un point mobile assujetti à décrire la section normale OL, et sortant du lieu O à l'instant que l'on considère.

Fig. 66.

Représentons, par Ob, la vitesse actuelle V du point μ et, par Oa, ab, ses composantes orthogonales $\dot{x}$, $\dot{y}$. Soient, en même temps, R, R′ les rayons de courbure qui correspondent au point O dans les sections S_x, S_y.

Concevons que le point μ entraîne avec lui deux droites respectivement assujetties à toucher en μ la surface A et à rester parallèles, l'une au plan de la section S_x, l'autre au plan

translation avec la vitesse qui anime le point *m* sur la section S^y. Voici quel est le sens et la portée précise de cet énoncé.

Étant donné un point μ assujetti à rester sur la surface A, et *sortant du lieu* O, à l'instant que l'on considère tout commence par rapport à ce point et par rapport à sa directrice, comme si la surface A s'engendrait par le déplacement de la section S_x, cette section conservant sa forme et se mouvant par translation avec la vitesse du point *m* sur la section S_y. On sait, d'ailleurs, qu'il y a ici *réciprocité complète* entre ces deux sections.

de la section S_y. Les rotations de ces droites sont

$$(1)\quad\ldots\ldots\quad W_x = \frac{Oa}{R} = \frac{\dot{x}}{R},$$

pour la première, et

$$(2)\quad\ldots\ldots\quad W_y = \frac{ab}{R'} = \frac{y}{R'},$$

pour la seconde. Représentons par Oc la rotation W_x, par Oe la rotation W_y, et achevons le rectangle $Ocne$. On sait, d'après le théorème du n° 40 de la première partie, page 85, que la diagonale On est la caractéristique du plan qui touche en μ la surface A, et que la rotation de ce plan autour de cette droite est représentée en sens et grandeur par le segment On.

Imaginons que la section OL puisse être une section principale, comme le sont déjà, par hypothèse, les sections S_x, S_y. Il faudra que la caractéristique On soit perpendiculaire à la droite OL et, par suite, qu'il y ait égalité entre les deux angles aOb, nOc. Cette égalité impliquant la suivante

$$(3)\quad\ldots\quad \frac{ab}{Oa} = \frac{nc}{Oc} = \frac{W_y}{W_x} = \frac{ab}{Oa}\cdot\frac{R}{R'},$$

il est visible qu'elle a toujours lieu ou qu'au contraire, elle n'a jamais lieu, selon que les rayons de courbure R, R' sont égaux ou inégaux. De là résultent les déductions suivantes :

1° *Il n'existe, en général, pour chaque point d'une surface, que deux sections principales; l'une de plus grande, l'autre de plus petite courbure. Elles sont disposées rectangulairement.*

2° *Lorsqu'il existe en un point d'une surface deux sections principales disposées obliquement l'une par rapport à l'autre, ou ayant même courbure, les sections normales intermédiaires sont toutes principales et leur courbure, en ce point, est la même pour toutes.*

On appelle *Ombilics* ou *points ombilicaux* les points singuliers où les sections normales ont toutes même courbure.

171. Complétons la solution précédente, et, à cet effet, commençons par substituer à la rotation O*n* ses deux composantes O*c* $= W_x$, O*e* $= W_y$.

Si l'on désigne par α l'angle *a*O*b*, et qu'on décompose chacune des rotations O*c*, O*e* en deux autres établies respectivement, l'une autour de O*b*, l'autre autour de la perpendiculaire élevée en O sur O*b*, on voit aisément que la rotation du plan tangent autour de la directrice du point μ et celle de cette même directrice sont exprimées simultanément, l'une par la somme des premières composantes, l'autre par la somme des secondes. De là résulte, en nommant Ω la rotation du plan tangent autour de la directrice du point μ et en tenant compte des signes des composantes,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \Omega = W_y . \cos\alpha - W_x . \sin\alpha.$$

On a, de même, en désignant par W la rotation de la directrice du point μ,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad W = W_x \cos\alpha + W_y . \sin\alpha.$$

On a, d'ailleurs,

$$\dot{x} = V\cos\alpha, \qquad \dot{y} = V\sin\alpha,$$

et, par suite, ρ, R, R′ étant pour le point O les rayons de courbure des sections normales OL, OX, OY,

$$W = \frac{V}{\rho}, \quad W_x = \frac{\dot{x}}{R} = \frac{V\cos\alpha}{R}, \quad W_y = \frac{\dot{y}}{R'} = \frac{V\sin\alpha}{R'}.$$

Ces valeurs substituées dans l'équation (1) donnent, après réduction,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \Omega = V\left[\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right]\frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

Substituées dans l'équation (2), elles donnent, de même,

$$(4). \quad \dots\dots\dots \quad \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{x}^2}{R} + \frac{\dot{y}^2}{R'},$$

ou, bien encore,

$$(5). \quad \dots\dots \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \alpha}{R} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'}.$$

L'équation (3), jointe à l'équation (4) ou à l'équation (5), résout complétement la question proposée.

Mettons à profit l'indétermination de la vitesse V, représentée par le segment Ob et posons, en général,

$$V = Ob = \sqrt{\rho}.$$

L'équation (4) devient

$$(6). \quad \dots\dots\dots \quad \frac{\dot{x}^2}{R} + \frac{\dot{y}^2}{R'} = 1.$$

$\dot{x}$, $\dot{y}$ n'étant autre chose que les coordonnées du point b.

L'équation (6) est celle d'une ellipse rapportée à son centre et à ses demi-axes principaux $\sqrt{R}$, $\sqrt{R'}$. L'équation (5) est l'équation polaire de cette même ellipse, qu'on désigne, en général, sous le nom d'*indicatrice*. On observera que chacun des demi-diamètres de l'indicatrice détermine, par sa direction, une section normale; par le carré de sa longueur, le rayon de courbure qui correspond au point O de cette même section.

Lorsque les courbures des sections S_x, S_y sont de sens contraire l'*indicatrice* se compose de deux hyperboles conjuguées, ayant chacune pour axe réel l'axe imaginaire de l'autre. L'indicatrice devient un cercle dans le cas où les courbures des sections S_x, S_y sont égales et de même sens : elle devient une droite dans le cas où l'une de ces deux courbures se réduit à zéro.

On voit aisément comment les déductions du n° 170 sont toutes impliquées par les équations (3), (4), (5). Bornons-nous à résumer

les points principaux qui résultent directement de la discussion de l'équation (4), et qui sont rendus plus manifestes encore, soit par l'inspection de l'équation (5), soit par la considération de l'indicatrice.

1° *Les sections rectangulaires* OX, OY *se distinguent des autres sections normales en ce que leur courbure est un* maximum *pour l'une, un* minimum *pour l'autre. Elles sont dites* SECTIONS DE PLUS GRANDE ET DE PLUS PETITE COURBURE, *ou bien encore*, SECTIONS PRINCIPALES;

2° *Si l'on groupe deux par deux les sections normales qui font un même angle avec une même section principale, la courbure est la même pour les deux sections d'un même groupe. Elle diffère, en général, d'un groupe à un autre;*

3° *Lorsqu'en un point d'une surface les sections principales ont même courbure, cette courbure est commune à toutes les sections normales passant par le même point;*

On appelle OMBILIC *le point singulier où toutes les sections normales ont ainsi même courbure;*

4° *Lorsque deux surfaces ont un point commun, et qu'en ce point leurs sections principales ont entre elles un contact du second ordre, ce même contact subsiste entre toutes les sections normales correspondantes. On peut dire alors qu'il y a, entre ces deux surfaces,* OSCULATION COMPLÈTE;

5° *Soient* ρ, ρ' *les rayons de courbure de deux sections normales rectangulaires, choisies comme on voudra. Les angles que ces sections font avec une même section principale étant complémentaires l'un de l'autre, il en résulte que la somme inverse des rayons* ρ, ρ' *est constante. On a ainsi*

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{cons}^{\text{te}}.$$

172. On observera que la section faite dans une surface, par un plan parallèle au plan tangent, tend à devenir semblable à l'indicatrice et semblablement placée, à mesure que l'intervalle com-

pris entre ces deux plans diminue. Veut-on le démontrer? On peut substituer aux sections principales leurs paraboles osculatrices et, pour plus de simplicité, disposer ces paraboles de manière à ce que le contact ait lieu en leur sommet. Le paraboloïde osculateur ainsi déterminé aura, pour équation,

$$2z = \frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R'},$$

(R, R′ étant le rayon de courbure des sections principales) et l'indicatrice ne sera autre chose que la projection de la section faite dans ce paraboloïde par le plan $z = \frac{1}{2}$. Mais, d'un autre côté, les sections faites dans le paraboloïde par des plans parallèles à celui de l'indicatrice sont toutes semblables entre elles et semblablement placées. Il est, d'ailleurs, évident que, à raison de l'osculation établie entre ce paraboloïde et la surface donnée, les sections faites de part et d'autre par un même plan parallèle au plan tangent commun, tendent à s'identifier à mesure que le plan sécant se rapproche indéfiniment du point d'osculation. De là se déduit immédiatement le principe énoncé ci-dessus. Il en résulte, pour le cas général des surfaces du second degré, les conséquences suivantes :

La similitude qui subsiste entre toutes les sections parallèles à un même plan tangent s'étend d'elle-même jusqu'à l'indicatrice correspondante.

Dans l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes et le paraboloïde elliptique, les diamètres conjugués avec les sections circulaires déterminent par leurs extrémités les points ombilicaux.

173. Reprenons les données du n° 169, page 420, et proposonsnous de parvenir, suivant une autre marche, à la solution des numéros 170 et 171.

Soit μ un point assujetti à décrire la section mobile S_x et sortant du lieu O à l'instant que l'on considère.

La vitesse qui anime le point μ parallèlement à l'axe OX étant représentée par $\dot{x}$; celle qui anime le point m parallèlement à

l'axe OY étant représentée en même temps par $\dot{y}$, les vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$ sont les composantes de la vitesse totale qui anime le point μ au sortir du lieu O. Désignons, par V, cette vitesse totale et, par S, la section normale qu'elle détermine comme trajectoire du point μ sur la surface A.

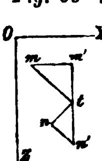
Soient W, W_x, W_y les vitesses angulaires qui animent les directrices des points μ et m, et qui correspondent respectivement, la première à la vitesse V du point μ sur la ligne S, la seconde à la vitesse $\dot{x}$ de ce même point sur la ligne S_x, la dernière à la vitesse $\dot{y}$ du point m sur la ligne S_y. Si l'on désigne généralement, par z, la distance du point μ au plan tangent XOY, il est visible que la valeur affectée, au sortir du lieu O, par la quantité $\ddot{z} = d^2z$ peut s'exprimer indifféremment par le produit V.W, ou par la somme $\dot{x}W_x + \dot{y}W_y$. La première expression s'applique au cas où l'on considère directement le mouvement du point μ sur la ligne S; la seconde, à celui où l'on substitue à ce mouvement les deux mouvements simultanés dont il se compose, savoir : 1° le mouvement du point μ sur la ligne mobile S_x; 2° le mouvement du point m sur la ligne S_y *. De là résulte immédiatement l'équation générale

$$(1).\quad\ldots\ldots\quad V.W = \dot{x}.W_x + \dot{y}.W_y.$$

* Ces valeurs de la quantité $\ddot{z} = d^2z$ se déduisent de la formule (5) du n° 159, page 403, en posant $\omega = o$. On peut y parvenir directement et d'une façon plus simple en opérant comme il suit, d'après la marche tracée au n° 160.

Soit μ un point mobile assujetti à décrire une courbe plane S et sortant du lieu m suivant la direction mt. La ligne S est rapportée, par hypothèse, à deux axes coordonnés rectangulaires OX, OZ et la vitesse $\dot{x}$ qui anime le point μ parallèlement à l'axe OX est supposée constante. Représentons par mm' la vitesse $\dot{x}$ et achevons le triangle rectangle $mm't$. On a d'abord

Fig. 66bis.



$$\dot{z} = dz = m't.$$

Soit tn la vitesse de circulation imprimée au point t par la rotation W_x de la directrice du point μ autour du lieu m. Menons par le point n la droite nn' parallèle à mt et limitons cette droite en n' à sa rencontre avec le prolonge-

Désignons par R, R′ et ρ les rayons de courbure qui correspondent respectivement pour le point O, le premier à la section S_x, le second à la section S_y, le troisième à la section S. On a

$$W_x = \frac{\dot{x}}{R}, \quad W_y = \frac{\dot{y}}{R'}, \quad W = \frac{V}{\rho}.$$

Ces valeurs substituées dans l'équation (1) donnent

$$\frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{x}^2}{R} + \frac{\dot{y}^2}{R'}.$$

On retrouve ainsi l'équation (4) du n° 171, page 424, et avec elle, toutes les déductions formulées à sa suite *.

174. Au lieu de procéder, comme nous l'avons fait à partir du n° 167, par déductions successives, on peut s'en tenir à la

ment de la droite $m't$. De là résulte, ainsi qu'on l'a vu au n° 160, et comme il est, d'ailleurs, aisé de le reconnaître immédiatement,

$$\ddot{z} = d^2z = tn'.$$

Désignons, par α, l'angle tmm' et son égal ntn'. On a, d'après la figure,

$$tn' = \frac{tn}{\cos\alpha} = \frac{W_x . mt}{\cos\alpha} = \frac{W_x . mm'}{\cos^2\alpha} = \frac{\dot{x} . W_x}{\cos^2\alpha}.$$

De là résulte, en général, pour le cas où l'angle α se réduit à zéro,

$$\ddot{z} = d^2z = \dot{x} . W_x.$$

* Soit α l'angle que la direction de la vitesse V fait avec l'axe OX. Cet angle est, en même temps, celui que font entre elles les deux sections normales S et S_x. On a, d'ailleurs,

$$\dot{x} = V\cos\alpha, \quad \dot{y} = V . \sin\alpha.$$

L'équation (3) devient, en conséquence,

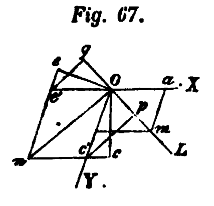
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'}.$$

Cette dernière équation n'est autre chose que l'équation (5) du n° 171.

marche suivante, plus générale, plus directe, et non moins facile.

Soient une surface A; O un point de cette surface; P le plan tangent en O; S_y une section quelconque normale en O à la surface A; OY la trace sur le plan P de la section normale S_y.

Soient encore O′ et P′ un point et un plan mobiles, respectivement assujettis, le point O′ à rester sur la surface A, le plan P′ à toucher cette surface en O′.



Imaginons, d'abord, que le point O′ sorte du lieu O suivant la section S_y. L'état de mouvement qui anime le plan P′, au sortir du lieu P, consiste en une rotation autour d'une certaine droite OX passant par le point O et située dans le plan P. Soit S_x la section normale dirigée suivant OX et T_y une droite assujettie, d'une part, à toucher en O′ la surface A, d'autre part, à rester parallèle au plan de la section S_x. Il est visible que *la tangente* T_y *sort du lieu* OX *par translation simple*, c'est-à-dire, *sans vitesse angulaire actuelle*. Pour le reconnaître, il suffit d'observer que dans la rotation établie autour de la caractéristique OX, les droites menées dans le plan P′, parallèlement à cette caractéristique, ne changent pas de direction. De là résulte la déduction suivante:

Étant donné un point μ *assujetti à rester sur la surface* A *et sortant du lieu* O *à l'instant que l'on considère, tout commence, par rapport à ce point et à sa directrice, comme si la surface* A *s'engendrait par le déplacement de la section* S_x, *cette section conservant sa forme et se mouvant, par translation, avec la vitesse du point* O′ *sur la section* S_y.

Partant de là, désignons par T_x une droite assujettie à rester parallèle au plan de la section normale S_y et à toucher la surface A en un point qui sorte du lieu O suivant la direction OX. On voit, d'après l'énoncé précédent, que la droite T_x sort du lieu OY, *par translation simple*, c'est-à-dire, *sans vitesse angulaire actuelle.* Cette propriété doit avoir lieu nécessairement, si la droite OY

est la caractéristique du plan P′, pour un déplacement du point O′ effectué à partir du lieu O suivant la direction OX. Elle est impossible, au contraire, si la droite OY n'est pas cette caractéristique. Concluons qu'il y a *réciprocité* entre les deux droites OX, OY, la première ne pouvant être la caractéristique qui correspond au glissement du point O′ sur la section S_y, sans que la seconde ne soit, en même temps, la caractéristique qui correspond au glissement de ce point sur la section S_x *.

Supposons que le point μ soit assujetti à décrire la section mobile S_x. Il suffit de conserver les notations du numéro qui précède et de reproduire littéralement les mêmes déductions **, pour écrire en premier lieu,

$$(1) \ldots\ldots \quad V.W = \dot{x}.W_x + \dot{y}W_y,$$

et, en second lieu,

$$(2) \ldots\ldots \quad \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{x}^2}{R} + \frac{\dot{y}^2}{R'}.$$

Soit OL la direction de la vitesse V, ou, ce qui revient au même, celle de la section normale décrite par le point μ. Si l'on prend sur OL la longueur O*m* égale à $\sqrt{\rho}$, et qu'on profite de l'indétermination de la vitesse V pour la représenter par O*m*, l'équation (2) devient

$$(3) \ldots\ldots \quad \frac{\dot{x}^2}{R} + \frac{\dot{y}^2}{R'} = 1,$$

les quantités $\dot{x}$, $\dot{y}$ n'étant autre chose que les coordonnées du point *m*.

* Il est visible que les droites T_x, T_y forment entre elles un système de *tangentes réciproques*. La propriété dont elles jouissent *à ce titre* n'a pas besoin d'être invoquée ici, comme conséquence du théorème général démontré précédemment. Elle s'établit, d'elle-même, dans des conditions beaucoup plus simples.

** La seule différence consiste en ce que le point désigné par *m* au n° 175, l'est ici par O′.

L'équation (3) est celle d'une ellipse rapportée à son centre et à ses demi-axes conjugués $\sqrt{R}$, $\sqrt{R'}$. Chacun des demi-diamètres de cette ellipse détermine par sa direction une section normale, par le carré de sa longueur le rayon de courbure qui correspond au point O de cette même section. L'ellipse, dont il s'agit, a reçu le nom d'*indicatrice*. On voit aisément pourquoi. Elle est remplacée par deux hyperboles, ayant chacune pour axe réel l'axe imaginaire de l'autre, lorsque les rayons de courbure R, R′ ne sont pas dirigés dans le même sens. Dans tous les cas, il suffit de considérer l'*indicatrice* pour arriver directement à toutes les déductions formulées dans les numéros qui précèdent. On observera que la *réciprocité* établie entre les directions OX, OY conduit à un théorème qu'on peut énoncer comme il suit :

Les droites, dont l'une fixe la direction du déplacement que l'on considère, l'autre la caractéristique correspondante du plan tangent, forment entre elles et, par rapport à l'indicatrice, un système de diamètres conjugués.

Ce théorème a été donné pour la première fois par M. Dupin. Les droites qui se déterminent ainsi, l'une par l'autre, ont reçu le nom de *tangentes conjuguées*. Il ne faut point les confondre avec *nos tangentes réciproques*.

Désignons par α, β les angles que la droite OL fait avec les axes OX, OY et par λ l'angle de ces mêmes axes. On a

$$x = V\frac{\sin\beta}{\sin\lambda}, \qquad y = V\frac{\sin\alpha}{\sin\lambda}.$$

Ces valeurs substituées dans l'équation (2) donnent, en général,

$$(4)\ldots\ldots\quad \frac{\sin^2\lambda}{\rho} = \frac{\sin^2\beta}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'},$$

ce qui détermine le rayon ρ en fonction des rayons R, R′ et de l'un ou l'autre des angles α, β, dont la somme, égale à λ, est donnée en même temps que les sections normales S_x, S_y.

Veut-on parvenir aux équations (2), (3), (4) sans passer par l'équation (1), c'est-à-dire sans emprunter le secours du théorème établi dans le numéro 159 ou 160 et reproduit plus simplement dans la note du n° 173? Voici comment on peut procéder.

Les directions OX, OY restant déterminées comme ci-dessus, elles satisfont à la condition de *réciprocité* démontrée dans le présent numéro. Partant de là, considérons le point μ comme assujetti à décrire une section normale et prenons-le à l'instant précis où il sort du lieu O suivant la direction O*m* de cette section.

Soit V la vitesse actuelle du point μ et W la vitesse angulaire simultanée de sa directrice. Représentons par O*m* la vitesse V, et par O*a*, *am* ses deux composantes $\dot{x}$, $\dot{y}$. Élevons en O deux perpendiculaires, l'une O*c* sur OX, l'autre O*e* sur OY (voir la fig. 67, page 429).

Concevons que le point μ entraîne avec lui deux droites respectivement assujetties à toucher en μ la surface A et à rester parallèles, l'une au plan normal OX, l'autre au plan normal OY. Les rotations de ces droites sont W_x pour l'une, W_y pour l'autre. Représentons la première par O*c*, la seconde par O*e* et achevons le quadrilatère O*cne* dont les côtés *cn*, *en* sont respectivement parallèles aux droites OX, OY. On sait, conformément au théorème du n° 40 de la première partie, page 85, que la diagonale O*n* est la caractéristique du plan qui touche en μ la surface A, et que la rotation de ce plan autour de cette droite est représentée en sens et grandeur par le segment O*n*.

Soient *c'*, *e'* les points où les côtés *cn*, *en* viennent couper les axes OY, OX. Substituons à la rotation O*n* ses deux composantes O*c'*, O*e'*, et, des points *c'*, *e'*, abaissons sur O*m* les perpendiculaires *c'p*, *e'q*. Si l'on décompose, à leur tour, chacune des rotations O*c'*, O*e'* en deux autres établies respectivement, l'une autour de O*m*, l'autre autour de la perpendiculaire élevée en O sur O*m*, il est aisé de voir que la rotation de la directrice du point μ est la somme des dernières composantes et qu'il vient, en conséquence,

$$W = c'p + e'q.$$

On a, d'ailleurs, d'après les notations précédentes et ainsi qu'on le voit aisément sur la figure,

$$Oc = W_x = Oc'.\sin\lambda = \frac{c'p}{\sin 6}.\sin\lambda, \quad Oe = W_y = Oe'\sin\lambda = \frac{e'q}{\sin\alpha}.\sin\lambda.$$

De là résulte

$$c'p = \frac{\sin 6}{\sin\lambda}W_x, \quad e'q = \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda}W_y,$$

et, par suite,

(5). . . . $W.\sin\lambda = W_x.\sin 6 + W_y.\sin\alpha.$

L'identité qui subsiste entre les équations (4) et (5) s'établit, sans difficulté, par la considération du triangle O*am* dont les côtés O*m*, O*a*, *am* représentent en grandeur les vitesses V, $\dot{x}$, $\dot{y}$ et fournissent, en conséquence, les égalités

$$\frac{\dot{x}}{V} = \frac{\sin 6}{\sin\lambda}, \quad \frac{\dot{y}}{V} = \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda}.$$

On a, en outre,

$$W = \frac{V}{\rho}, \quad W_x = \frac{\dot{x}}{R}, \quad W_y = \frac{\dot{y}}{R'}.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (5), donnent,

$$\frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{x}^2}{R} + \frac{\dot{y}^2}{R'}.$$

On est ainsi ramené à l'équation (2) et le reste s'achève comme ci-dessus.

Pour compléter cette solution, il ne reste plus qu'à déterminer la vitesse angulaire avec laquelle le plan tangent tourne autour de

la directrice du point μ. Cette vitesse angulaire est évidemment représentée par la somme algébrique

$$Oq - Op.$$

Il est visible, d'ailleurs, que, pour passer des valeurs trouvées plus haut pour les segments $e'q$, $e'p$ à celles des segments Oq, Op, il suffit de substituer aux sinus des angles α, 6 les cosinus de ces mêmes angles. On a donc

$$Oq - Op = W_y . \frac{\cos \alpha}{\sin \lambda} - W_x \frac{\cos 6}{\sin \lambda} .$$

De là résulte, après substitution et toute réduction faite,

$$(6). \quad . \quad . \quad Oq - Op = \frac{V}{2 \sin^2 \lambda} \left[\frac{\sin 2\alpha}{R'} - \frac{\sin 26}{R} \right].$$

175. Appuyons-nous directement sur le théorème des tangentes réciproques, sans autre intermédiaire, et faisons voir, par un dernier exemple, comment l'application de ce théorème à la question qui nous occupe fournit une solution géométrique, sinon tout à fait aussi simple, du moins aussi complète que les précédentes.

Soient OX, OY deux droites rectangulaires menées par le point O tangentiellement à la surface A; O' et P' un point et un plan mobiles assujettis respectivement, le point O' à sortir du lieu O en restant sur la surface A, le plan P' à toucher cette surface en O'.

Quelle que soit la direction suivie par le point O', au sortir du lieu O, nous admettrons que sa vitesse est égale à l'unité. Si l'on désigne alors, par $\overline{W}$, la vitesse angulaire de la directrice du point O' et, par R, le rayon de courbure de la ligne décrite, on a, généralement,

$$\overline{W} = \frac{1}{R} .$$

La vitesse $\overline{W}$, ainsi déterminée, est le *module* de la courbure cor-

respondante. Pour éviter toute confusion, nous l'écrivons en la surchargeant d'un trait horizontal. Il en sera de même de toutes les vitesses angulaires que nous aurons à considérer dans le module qui les détermine. La présence du trait placé sur leur signe représentatif indiquera suffisamment l'hypothèse admise en ce qui les concerne.

Soient S_x, S_y, S_l les sections normales respectivement dirigées suivant les droites OX, OY, OL; $\overline{W}_x$, $\overline{W}_y$, $\overline{W}_l$ les modules de la courbure que présente en O chacune de ces trois sections.

Supposons que le point O′ sorte du lieu O suivant la section S_x et nommons

T une droite assujettie à toucher en O′ la surface A et à rester parallèle au plan de la section S_l;

$\bar{\varpi}$ la vitesse angulaire qui anime la droite T au sortir du lieu OL *.

Le point de contact du plan P′ avec la surface A se déplaçant, par hypothèse, suivant la section S_x, nous connaissons les rotations simultanées de deux droites situées dans ce plan et se mouvant avec lui. L'une de ces droites est la directrice du point O′, l'autre la droite T. La rotation de la première a son axe dirigé suivant OY et $\overline{W}_x$ pour grandeur. Représentons-la par O*b*. La rotation de la seconde a son axe dirigé suivant OX et $\bar{\varpi}$ pour grandeur. Représentons-la par O*a*.

Soit *n* le point de rencontre des deux droites *bn*, *an*, respectivement parallèles, l'une à OX, l'autre à OL. La rotation de la normale au plan P′ est représentée en direction, sens et grandeur, par la diagonale O*n* du quadrilatère O*anb*. (1re partie, n° 40, page 85).

Fig. 68.

Projetons le point *n* en *q* sur la droite O*a*. Le segment O*q* représente en direction, sens et grandeur la rotation de la normale autour de la droite OX. De là résulte, en désignant cette rotation par

* Ce que nous désignons ici par $\bar{\varpi}$, ce n'est pas la vitesse avec laquelle la droite T s'écarte angulairement de la position dont elle sort, c'est la vitesse angulaire qui correspond à la rotation établie autour de la droite OX.

$\bar{N}_x$, et l'angle XOL par α,

(1). . . . . $\bar{N}_x = Oa - aq = \bar{\omega} - \bar{W}_x . \cot \alpha.$

Substituons la section S_l à la section S_x, et réciproquement. La formule (1) ne cesse pas d'être applicable. Il faut seulement remplacer l'indice x par l'indice l et changer les signes des deux quantités $\bar{\omega}$ et α *. De là résulte immédiatement

(2). . . . . $\bar{N}_l = \bar{W}_l \cot \alpha - \bar{\omega}.$

$\bar{N}_l$ étant la vitesse angulaire avec laquelle la normale au plan P' tourne autour de la droite OL lorsque le point O' sort du lieu O suivant la section S_l.

Veut-on considérer, en particulier, le cas où il s'agit de deux sections rectangulaires S_x, S_y? La comparaison des équations (1) et (2), où l'on doit poser $\alpha = 90^\circ$ donne

(3). . . . . $\bar{N}_x = - \bar{N}_y.$

Le théorème exprimé par l'équation (3) a été exposé par M. Bertrand. On peut l'énoncer comme il suit:

Lorsque deux droites assujetties à rester normales à une même surface sortent en même temps d'une position commune, suivant deux directions rectangulaires et avec une égale vitesse des points où elles s'appuyent sur cette surface, leurs rotations, autour des directions qu'elles suivent respectivement en ces points, sont égales et de sens contraire.

On observera que ce théorème est impliqué, comme cas particulier, par celui que nous avons exposé de diverses manières et notamment au n° 161, page 408, sous le nom de *théorème des tangentes réciproques*.

* Les changements de signe des quantités $\bar{\omega}$ et α ont leur raison d'être, le premier dans le théorème des tangentes réciproques, le second dans l'inversion qui résulte, par rapport à l'angle α, de la substitution faite mutuellement et réciproquement entre les deux directions OX, OL.

176. Poursuivons. La rotation $\overline{N}_t$ changeant de signe dans l'intervalle des deux sections rectangulaires S_x, S_y, il s'ensuit que ces deux sections comprennent, en général, une section intermédiaire pour laquelle la rotation $\overline{N}_t$ doit s'annuler. Cette conséquence peut ainsi s'établir sans calcul. On peut aussi la déduire des équations (1), (2), (3).

Tirons de l'équation (1) la valeur de $\bar{\varpi}$ et transportons cette valeur dans l'équation (2). Il vient

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \overline{N}_t = (\overline{W}_t - \overline{W}_x) \cot \alpha - \overline{N}_x.$$

On a de même, en substituant la section S_y à la section S_x et tenant compte de l'équation (3),

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \overline{N}_t = (\overline{W}_y - \overline{W}_t) \operatorname{tg} \alpha + \overline{N}_x. \; ^*$$

La combinaison des équations (4) et (5) permet d'éliminer $\overline{W}_t$ et d'écrire, en conséquence,

$$(6). \quad . \quad . \quad \overline{N}_t = \cos 2\alpha . \left[\overline{N}_x - \frac{\overline{W}_x - \overline{W}_y}{2} \operatorname{tg} 2\alpha \right].$$

L'équation (6) conduit aux déductions suivantes :

1° *En général,* $\overline{N}_x$ *n'étant pas nul et* $\overline{W}_x$ *n'étant pas égal à* $\overline{W}_y$, *il existe entre les sections* S_x, S_y *une section normale intermédiaire pour laquelle on a*

$$\overline{N}_t = o.$$

L'angle α, *compris entre cette section et la section* S_x, *est déterminé* par l'équation de condition

$$(7). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 . \overline{N}_x}{\overline{W}_x - \overline{W}_y};$$

* Pour passer de l'équation (4) à l'équation (5) il faut remplacer l'indice x par l'indice y, et l'angle α par son complément changé de signe.

2° $\overline{N}_x$ *n'étant pas nul et* $\overline{W}_x$ *étant égal à* $\overline{W}_y$ *la section pour laquelle on a*

$$\overline{N}_t = o,$$

est la section dirigée suivant la bissectrice de l'angle XOY.

3° $\overline{N}_x$ *étant nul, l'équation* (6) *devient*

$$(8). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \overline{N}_t = \frac{W_y - W_x}{2} \sin 2\alpha,$$

et, dès lors, selon que les modules $\overline{W}_x$, $\overline{W}_y$ *sont les mêmes ou différents,* $\overline{N}_t$ *est nul pour toutes les sections intermédiaires ou ne l'est pour aucune.*

La section S_x pouvant être quelconque, supposons-la choisie d'après la condition

$$\overline{N}_x = o.$$

Dans cette hypothèse, si l'on égale les valeurs fournies pour $\overline{N}_t$ par les équations (4) et (5), on a

$$(9). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \overline{W}_t = \overline{W}_x \cos^2 \alpha + \overline{W}_y \sin^2 \alpha.$$

Soient R, R' et ρ les rayons de courbure qui correspondent, pour le point O, aux sections respectives S_x, S_y et S_t; on a, conformément à la définition des modules $\overline{W}^x$, $\overline{W}^y$, $\overline{W}_t$,

$$\overline{W}_x = \frac{1}{R}, \quad \overline{W}_y = \frac{1}{R'}, \quad \overline{W}_t = \frac{1}{\rho}.$$

Il vient donc, en substituant,

$$(10). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \alpha}{R} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'}.$$

L'équation (10) n'est autre chose que l'équation (5) du n° 171. Elle implique, comme conséquences, toutes les déductions formulées dans ce numéro.

Soit ρ' le rayon de courbure de la section normale dirigée à angle droit sur la section S_l. Il vient, en vertu de l'équation (10),

$$(11) \ldots\ldots \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{\sin^2\alpha}{R} + \frac{\cos^2\alpha}{R'}.$$

Multipliées membre à membre, les équations (10) et (11) donnent, après réduction,

$$(12) \ldots \quad \frac{1}{\rho\cdot\rho'} = \frac{1}{RR'} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right]\sin^2 2\alpha.$$

On a d'ailleurs, d'après l'équation (8),

$$(13) \ldots\ldots \quad \overline{N}_l = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right]\sin 2\alpha. \; *$$

De là résulte, eu égard à l'équation (12),

$$(14) \ldots\ldots \quad \overline{N}_l^2 = \frac{1}{\rho\rho'} - \frac{1}{RR'}.$$

Cette relation curieuse nous servira plus loin.

On observera que les sections principales sont caractérisées par la condition qu'elles remplissent, à l'exclusion des autres sections normales, cette condition consistant en ce que la rotation représentée par $\overline{N}$ est égale à zéro. De là résulte la déduction suivante :

Lorsqu'une droite se déplace en restant normale à une surface, selon qu'elle suit ou qu'elle ne suit pas la direction d'une section principale, les vitesses de ses différents points sont ou non dirigées dans un seul et même plan.

Cette déduction n'exige aucun calcul pour s'établir *à priori*. Elle résulte évidemment des considérations géométriques développées

* Cette formule a été donnée pour la première fois, pensons-nous, par M. Bertrand.

dans les numéros qui précèdent et notamment dans le n° 168, page 419. Nous y reviendrons plus loin.

177. Reprenons les données et les notations du n° 173, page 427, avec cette seule différence que les sections rectangulaires S_x, S_y soient quelconques, et qu'en conséquence, la tangente T_y tourne au sortir du lieu OX. Désignons, d'ailleurs, par $\omega = \bar{\omega}\dot{y}$ la vitesse angulaire qui correspond à cette rotation.

Eu égard à l'équation (5) du n° 159, page 405, l'équation (1) du n° 173, page 427, est remplacée par l'équation suivante :

$$(1), \quad V.W. = \dot{x}.W_x + 2\dot{x}\omega + \dot{y}W_y = \dot{x}W_x + 2\dot{x}\dot{y}\bar{\omega} + \dot{y}.W_y.$$

De là résulte, en opérant comme au n° 173 (voir la note, page 427)

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{R} + 2\bar{\omega}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{R'}.$$

Considérons la section normale dirigée à angle droit sur celle dont le rayon de courbure est représenté par ρ. Si nous représentons, par ρ', le rayon de courbure de cette section, et que nous remplacions l'angle α par l'angle $\frac{\pi}{2} + \alpha$, il vient

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{\sin^2\alpha}{R} - 2\bar{\omega}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{R'}.$$

La combinaison des équations (2) et (3) donne

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}.$$

L'équation (4) exprime que la somme inverse des rayons de courbure de deux sections normales rectangulaires est constante. Il s'ensuit qu'il existe deux de ces sections ayant même courbure. Cela posé, faisons l'angle α égal à $\frac{\pi}{4}$. Il vient en ce cas

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right] + \bar{\omega}.$$

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right] - \bar{\omega}.$$

La combinaison des équations (5) et (6) donne, en général,

$$(7). \quad \ldots \ldots \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = 2\bar{\omega}.$$

Supposons les sections rectangulaires qui correspondent aux rayons ρ, ρ' choisies de manière à ce que ces deux rayons soient égaux. Il en résulte

$$\bar{\omega} = o,$$

et l'équation (1) devient, en conséquence,

$$(8). \quad \ldots \ldots \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \alpha}{R} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'}.$$

L'équation (8) résout, ainsi qu'on l'a déjà vu, la question proposée. Elle suffit à toutes les déductions que nous avons développées précédemment. Les équations (5), (6), (7) fournissent, en outre, plusieurs résultats curieux susceptibles de s'exprimer, comme il suit, d'après les notations du n° 175, pages 434 et suivantes :

La moyenne des courbures, étant la même pour l'ensemble de toutes les sections normales que pour deux sections quelconques rectangulaires, constitue ce qu'on nomme la *courbure moyenne* de la surface au point considéré. Soit $\overline{W}$ le module de cette courbure moyenne et $\overline{W}'$, $\overline{W}''$ ceux des courbures de deux sections rectangulaires inclinées chacune à 45° sur les sections normales S_x, S_y. On a, généralement,

$$(9). \quad \ldots \quad \bar{\omega} = \overline{W}' - \overline{W} = \overline{W} - \overline{W}'' = \frac{\overline{W}' - \overline{W}''}{2}.$$

Il est visible, d'ailleurs, qu'on peut substituer l'axe des x à l'axe des y et réciproquement. La seule modification qui résulte de cette substitution est un changement de signe du module $\bar{\omega}$.

Courbure des sections obliques.

178. Soient A une surface; *m* un point mobile sur cette surface; N la normale en ce point; O le lieu du point *m* à l'instant que l'on considère; OZ le lieu de la normale N à ce même instant.

Soient, en même temps,

S_1 une section oblique faite par le point O dans la surface A;

T la tangente en O à la section S_1;

S la section normale dirigée suivante la droite T;

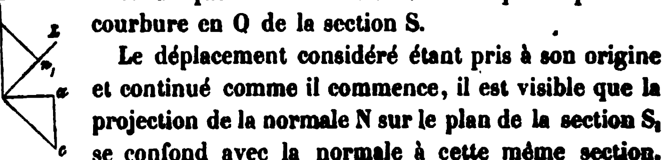
φ l'angle que la section oblique S_1 fait avec la section normale S.

Prenons pour plan de la figure le plan P mené par le point O perpendiculairement à la droite T.

Lorsque le point *m* sort du lieu O suivant la direction de la tangente T, la normale N sort du lieu OZ, et son mouvement angulaire se compose, en général, de deux rotations simultanées ayant respectivement pour axes, l'une la droite T, l'autre la droite O*a* menée, dans le plan P, perpendiculairement à la droite OZ.

Désignons par W la vitesse angulaire qui anime la normale N dans sa rotation autour de l'axe O*a*, et observons que c'est uniquement de cette rotation que dépend la courbure en O de la section S.

Fig. 69.



Le déplacement considéré étant pris à son origine et continué comme il commence, il est visible que la projection de la normale N sur le plan de la section S_1 se confond avec la normale à cette même section. Soit N_1 cette dernière normale. Elle est située d'abord en OL, à l'intersection du plan P avec le plan de la ligne S_1. On voit, d'ailleurs, aisément que son mouvement angulaire au sortir du lieu OL dépend exclusivement de la rotation de la normale N autour de l'axe O*a*.

Soit *n* un point pris sur la normale N à la distance 1 du point O et n_1 la projection de ce point sur le plan de la section S_1. La vitesse communiquée au point *n* par la rotation W est représentée en grandeur par W, en direction par une perpendiculaire au plan

P. Cette perpendiculaire étant parallèle à la droite T et, par conséquent, au plan de la section S_1, il s'ensuit que la projection du point n sur le plan de la section S_1 a même vitesse que le point n. Concluons que la vitesse imprimée au point n_1 par la rotation de la normale N_1, autour du point m, est représentée en grandeur par W, cette vitesse étant prise à l'instant précis où le point m sort du lieu O suivant la direction de la droite T.

Désignons par W_1 la rotation qui anime la normale N_1 autour du point m et qui communique au point n_1 la vitesse W mentionnée ci-dessus. L'angle ZOL n'étant autre que l'angle φ, la distance On_1 est égale à $\cos\varphi$, et l'on a, en conséquence,

$$W_1 . \cos\varphi = W.$$

De là résulte, en désignant par ρ et par ρ_1 les rayons de courbure qui correspondent au point O dans chacune des sections S et S_1,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \rho_1 = \rho . \cos\varphi.$$

Il est clair, en effet, que pour une même vitesse totale V du point m, au sortir du lieu O, le rapport existant entre les rayons de courbure ρ, ρ_1 est l'inverse du rapport établi entre les vitesses angulaires simultanées W, W_1.

Le théorème exprimé par l'équation (1) est dû à Meunier. On peut l'énoncer comme il suit :

Le rayon de courbure d'une section oblique est la projection sur le plan de cette section du rayon de courbure de la section normale menée par la même tangente.

179. *Autrement.* Soit Q le plan tangent en m à la surface A. Lorsque le point m sort du lieu O, le plan Q tourne autour de la caractéristique qui correspond à la direction suivie par le point m. Soit D cette caractéristique. Elle est située dans le plan tangent en O et, en général, elle est oblique sur la tangente T. L'état de mouvement du plan Q consistant en une rotation simple autour de la droite D, on peut toujours décomposer cette rotation en deux

autres respectivement établies, l'une autour de la tangente T, l'autre autour d'une perpendiculaire à cette tangente. La rotation établie autour de la tangente T est sans effet par rapport à cette droite. Il est donc permis d'en faire abstraction et de considérer exclusivement l'autre composante. Cela posé, si l'on remarque que le plan tangent en m contient toutes les tangentes menées par ce point à la surface A, il est visible que la question à résoudre se ramène aux termes suivants :

Soient Ot la direction suivie par le point m au sortir du lieu O;

Fig. 70.

Oa l'axe de rotation situé dans le plan tangent en O et dirigé à angle droit sur Ot.

tb, tb_1 deux droites menées par le point t perpendiculairement à Ot, et situées respectivement, l'une dans le plan de la section normale S, l'autre dans le plan de la section oblique S_1.

Un plan Q tournant autour de la droite Oa avec la vitesse W et sortant du lieu aOt à l'instant que l'on considère, on demande de déterminer les vitesses angulaires qui animent, au sortir du lieu Ot les intersections du plan Q avec les plans fixes Otb, Otb_1.

L'intersection du plan Q avec le plan btb_1 étant et restant parallèle à l'axe Oa, il s'ensuit que les points où les intersections du plan Q avec les plans fixes Otb, Otb_1 rencontrent les droites tb, tb_1 sortent du lieu t avec des vitesses respectivement proportionnelles aux côtés tb, tb_1 du triangle b_1tb dont la base bb_1 est, en même temps, parallèle à l'axe Oa et perpendiculaire à la droite bt. Mais, d'un autre côté, il existe entre ces vitesses le même rapport qu'entre les vitesses angulaires qu'il s'agit de déterminer. On a donc, avec les notations du n° 177, page 440,

$$\frac{W}{W_1} = \frac{tb}{tb_1} = \cos\varphi.$$

De là résulte, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure

$$\rho_1 = \rho \cos\varphi.$$

Autrement et plus simplement. La rotation W, établie autour de

la droite Oa, communique une vitesse angulaire W à l'intersection du plan Q avec le plan de la section normale S. Soit Oc la normale élevée en O sur le plan de la section S_1 (voir la figure 69 page 442). Le plan Q tournant autour de la droite Oa avec la vitesse W, on peut substituer à cette rotation les deux rotations composantes dont les axes sont dirigés respectivement l'un suivant OZ, l'autre suivant Oc. La rotation composante établie autour de l'axe OZ fait tourner le plan Q sur lui-même; elle est donc sans effet sur l'intersection de ce plan avec celui de la section S_1. Reste la rotation composante établie autour de l'axe Oc et représentée en grandeur par $\frac{W}{\cos\varphi}$. La vitesse angulaire que cette rotation communique à l'intersection du plan Q avec le plan de la section S_1 est évidemment $\frac{W}{\cos\varphi}$. De là résulte, en conséquence,

$$W_1 = \frac{W}{\cos\varphi}.$$

et, par suite,

$$\rho_1 = \rho.\cos\varphi.$$

Théorème de Hachette.

180. Désignons sous le nom de *centre inverse de courbure* le point du rayon de courbure dont la distance à la courbe est exprimée par la valeur inverse de ce même rayon. Eu égard à cette définition, il est visible que le théorème de Meunier, démontré n° 178, page 443, comporte l'énoncé suivant :

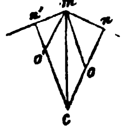
Les centres inverses de courbure de toutes les sections faites suivant une même tangente sont sur une même droite perpendiculaire à la section normale correspondante.

Considérons deux surfaces A, A′ et leur intersection Σ. Par un point quelconque m de la ligne Σ menons un plan tangent à chacune des deux surfaces A, A′. Le plan tangent à la surface A coupe en général la surface A′ suivant une courbe S′ De même aussi le

plan tangent à la surface A′ coupe la surface A suivant une certaine courbe S.

Soient o, o' les centres inverses de courbure qui correspondent au point m dans les courbes S, S′. Sur les droites mo, mo' prises pour côtés, construisons le parallélogramme $moco'$.

Fig. 71.



Cela posé, voici en quoi consiste le théorème qui est dû à Hachette et que nous nous proposons de démontrer :

Le point c *est le centre inverse de courbure de la ligne* Σ.

Par le point m menons les droites mn, mn' respectivement normales, l'une à la surface A, l'autre à la surface A′. Les droites mn, mo, mc, mo', mn' seront toutes dans un même plan, normal en m à chacune des trois courbes Σ, S, S′. Il est visible, d'ailleurs, que les angles nmo', $n'mo$ seront droits.

Soit D la tangente en m aux trois courbes Σ, S, S′. Soient en même temps n, n' les centres inverses de courbure des sections normales faites suivant la droite D, l'une dans la surface A, l'autre dans la surface A′. Si l'on tire les droites no, $n'o'$ et qu'on les prolonge jusqu'à leur rencontre en c, le théorème de Meunier implique les déductions suivantes :

1° Les droites no, $n'o'$ sont respectivement perpendiculaires, l'une à la normale mn, l'autre à la normale mn' ;

2° Le centre inverse de courbure de la courbe Σ se trouve en même temps sur chacune des droites no, $n'o'$. Il est donc situé en c à l'intersection de ces droites.

On sait, d'ailleurs, que les angles nmo', $n'mo$ sont droits. Il y a donc parallélisme, d'une part entre les droites oc, mo', d'autre part entre les droites $o'c$, mo. De là, et de ce qui précède, résulte évidemment le théorème énoncé ci-dessus.

Lignes de courbure.

181. Nous avons vu qu'il existe, en général, pour chaque point d'une surface deux directions rectangulaires, satisfaisant à l'énoncé du n° 168, page 419, ou, ce qui revient au même, à la condition

$$\overline{\overline{\mathrm{N}}}_t = o,$$

du n° 176, page 437. Lorsque la normale à la surface se déplace suivant l'une ou l'autre de ces deux directions, les vitesses de ses différents points sont toutes dirigées dans le plan de la section normale correspondante. Il s'ensuit que l'un de ces points, celui qui coïncide avec le centre de courbure de cette même section a une vitesse nulle. Les sections déterminées par les directions dont il s'agit sont dites, ainsi qu'on l'a vu déjà, *sections principales*. Voici d'ailleurs les conséquences.

1° Les sections principales sont les seules pour lesquelles il existe, sur la normale à la surface, un point dont la vitesse soit nulle à l'origine du déplacement de cette même normale. Elles déterminent sur la surface, par la direction des tangentes qui leur correspondent, deux systèmes de lignes, dites *lignes de courbure*;

2° Les lignes de courbure se coupent partout à angle droit. Elles sont les seules, parmi toutes les lignes tracées sur la surface, pour lesquelles le lieu géométrique des normales correspondantes soit une surface développable *;

3° Dans les surfaces de révolution, les lignes de courbure sont les méridiens et les parallèles.

Tangentes conjuguées.

182. Reportons-nous aux données et notations du n° 175, page 434, et raisonnons dans l'hypothèse où les sections S_x, S_y sont deux sections principales.

* La théorie des surfaces développables est exposée plus loin n° 205 et suivants.

Considérons, dans chacun des systèmes formés par la section S_t et l'une ou l'autre des sections principales S_x, S_y, celle des deux tangentes réciproques dont le point de contact est assujetti à glisser sur la section S_t.

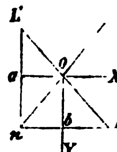


Fig. 72.

La rotation de l'une peut être représentée par OL, pourvu qu'on ait égard à l'équation de condition $\overline{X}_x = o$ et que l'on pose, en conséquence,

$$(1). \quad \ldots \ldots \quad OL = \bar{\omega} = \overline{W}_x \cot \alpha \,{}^*$$

La rotation de l'autre peut, de même, être représentée par OL', en prenant

$$(2). \quad \ldots \ldots \quad OL' = \overline{W}_y \,.\, \mathrm{tg} \,.\, \alpha.$$

Ces deux rotations étant ainsi déterminées, celle de la normale en résulte, pour le déplacement qui correspond à la direction OL. Elle est représentée par O*n*, le point *n* étant donné par l'intersection des droites L*n*, L'*n*, respectivement parallèles, l'une à OX, l'autre à OY. (1re partie, n° 40, page 85).

Soit γ l'angle que la droite O*n* fait avec l'axe OX. On a immédiatement

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{Ob}{bn} = \frac{OL \,.\, \sin\alpha}{OL' \cos\alpha} = \frac{\overline{W}_x}{\overline{W}_y} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

De là résulte

$$(3). \quad \ldots \ldots \quad \mathrm{tg}\,\alpha \,.\, \mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\overline{W}_x}{\overline{W}_y} = \frac{R'}{R}.$$

Les tangentes OL, O*n*, dont l'une fixe la direction du déplace-

* Cette valeur fournie par l'équation (1) du n° 175, page 436, s'applique, avec un signe contraire, à celle des tangentes réciproques du système S_x, S_t dont le point de contact glisse sur la section S_x. On peut, en vertu du théorème des tangentes réciproques, considérer cette même valeur comme s'appliquant à celle des tangentes réciproques, du système S_x, S_t dont le point de contact glisse sur la section S_t. Il suffit d'en changer le signe.

ment que l'on considère, et l'autre celle de l'axe instantané qui correspond, dans le plan tangent, à cette direction, sont dites, d'après M. Dupin, *tangentes conjuguées*. L'équation (3) exprime, en vertu d'une propriété connue des sections coniques, que, relativement à l'indicatrice, les tangentes OL, O*n* forment entre elles un système de diamètres conjugués. Ce résultat nous était déjà connu. Nous l'avons établi directement au n° 174, page 431.

Théorèmes de MM. Dupin et Lamé sur les surfaces orthogonales.

183. Soient A, A′, A″ trois surfaces qui se coupent, deux à deux et à angle droit, suivant trois lignes ayant un point commun O. Soient OX, OY, OZ, les tangentes en O aux intersections des surfaces A, A′, A″. Soient de plus N, N′, N″ trois droites assujetties à sortir du lieu qu'elles occupent avec une égale vitesse de translation * et en restant, comme elles le sont en O, respectivement normales, la droite N à la surface A, la droite N′ à la surface A′, la droite N″ à la surface A″.

Considérons la rotation de la droite N autour de la direction qu'elle suit, au sortir du lieu OX, et, selon que cette direction est OY ou OZ, désignons par $\overline{N}_y$ ou par $\overline{N}_z$ la rotation dont il s'agit.

Considérons de même la rotation de la droite N′ autour de la direction qu'elle suit, au sortir du lieu OY, et, selon que cette direction est OZ ou OX, désignons par $\overline{N}'_z$ ou par $\overline{N}'_x$ la rotation dont il s'agit.

Considérons enfin la rotation de la droite N″ autour de la direction qu'elle suit, au sortir du lieu OZ, et, selon que cette direction est OX ou OY, désignons par $\overline{N}''_x$ ou par $\overline{N}''_y$ la rotation correspondante.

Cela posé, lorsque les normales N′, N″ se déplacent en même temps suivant la direction OX, elles ne cessent pas d'être rectan-

* Cette vitesse est, pour chaque droite, celle du point où elle s'appuie sur la surface qui lui correspond. *On la suppose égale à l'unité.*

gulaires. La même observation s'applique aux normales N″, N dans leur déplacement suivant OY, et aux normales N, N′ dans leur déplacement suivant OZ. De là résulte, conformément au théorème XI de la 1re partie (n° 32, page 65),

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad \overline{N}'_x = \overline{N}''_x, \qquad \overline{N}''_y = \overline{N}_y, \qquad \overline{N}_z = \overline{N}'_z.$$

D'un autre côté, s'il s'agit des déplacements d'une même normale suivant les deux directions rectangulaires qui lui correspondent, l'on a, comme déduction du théorème des tangentes réciproques, et conformément au dernier énoncé du n° 175, page 436,

$$(2). \quad . \quad \overline{N}''_x = -\overline{N}''_y, \qquad \overline{N}_y = -\overline{N}_z, \quad . \quad \overline{N}'_z = -\overline{N}'_x.$$

Le double système des équations (1) et (2) peut s'écrire de la manière suivante :

$$(3). \quad \overline{N}'_x = \overline{N}''_x = -\overline{N}''_y, \quad \overline{N}''_y = \overline{N}_y = -\overline{N}_z, \quad \overline{N}_z = \overline{N}'_z = -\overline{N}'_x.$$

De là résulte immédiatement

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad \overline{N}'_x = \overline{N}''_x = -\overline{N}_y = \overline{N}_z = \overline{N}'_z = -\overline{N}'_x,$$

et, comme l'égalité $\overline{N}'_x = -\overline{N}'_x$ n'est possible qu'autant que la quantité $\overline{N}'_x$ est nulle, il s'ensuit que l'on a nécessairement

$$(5). \quad \overline{N}'_x = o, \quad \overline{N}''_x = o, \quad \overline{N}_y = o, \quad \overline{N}''_y = o, \quad \overline{N}_z = o, \quad \overline{N}'_z = o.$$

Nous avons vu, au n° 176, page 439, que les sections principales sont les seules pour lesquelles on ait

$$\overline{N}_t = o.$$

On a donc ce premier théorème :

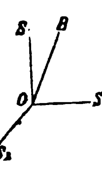
Lorsque trois surfaces se coupent orthogonalement suivant trois lignes ayant un point commun, ces lignes sont, sur chacune des trois surfaces, tangentes aux lignes de courbure menées par le point commun aux trois intersections.

Il vient ensuite, comme conséquence, cet autre théorème, qui est celui de M. Dupin :

Lorsque trois séries de surfaces se coupent orthogonalement, leurs intersections ne sont autre chose que leurs lignes de courbure respectives.

183 *bis.* Soient S, S_1, S_2 trois courbes issues d'un même point O et résultant des intersections, deux à deux, de trois surfaces SOS_1, S_1OS_2, S_2OS. On suppose que ces surfaces font partie d'un système triple de surfaces orthogonales. Il s'ensuit, comme on vient de le voir, que les courbes S, S_1, S_2 sont, relativement aux surfaces SOS_1, S_1OS_2, S_2OS et pour le point O, leurs lignes de courbure respectives, c'est-à-dire les lignes de courbure qui se croisent en ce point et qui sont, en général, au nombre de deux pour chacune de ces surfaces.

Fig. 73.



Donnons-nous les modules des courbures affectées en O par les sections principales et désignons-les respectivement, par $\overline{W}$ et ϖ_1 pour la surface SOS_1; par $\overline{W}_1$ et ϖ_2 pour la surface S_1OS_2; par $\overline{W}_2$ et ϖ pour la surface S_2OS, les indices étant les mêmes pour chacun de ces modules que pour celle des courbes S, S_1, S_2 qui touche en O la section principale correspondante.

Menons par le point O une droite quelconque OB, supposée fixe, et nommons

m un point mobile sortant du lieu O à l'instant que l'on considère;

D une droite issue du point *m* et entraînée par ce point;

T, T_1, T_2 les tangentes en *m*, soit aux courbes S, S_1, S_2, soit aux sections principales qui touchent ces courbes en O;

α, α_1, α_2, les angles que font avec la droite OB les tangentes T, T_1, T_2;

V, V_1, V_2 les diverses valeurs affectées par la vitesse du point *m* selon qu'elle est dirigée suivant la première, la seconde ou la dernière des tangentes T, T_1, T_2.

Cela posé, imaginons d'abord que le point *m* sorte du lieu O en glissant sur la surface S_2OS, et assujettissons la droite D à rester

normale à cette surface. Si la direction suivie par le point m est celle de la section principale dont la courbure a pour module la quantité $\bar{\omega}$, la droite D ne cesse pas de coïncider avec la droite T_1, et l'on a

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\cos\alpha_1 = V\bar{\omega} \, . \cos\alpha \, ,$$

cette équation pouvant s'écrire immédiatement, d'après le théorème général formulé comme il suit * :

La différentielle du cosinus de l'angle qu'une droite mobile fait avec une droite fixe est égale au produit de la vitesse angulaire de la droite mobile par le cosinus de l'angle que fait avec la droite fixe la perpendiculaire élevée sur la droite mobile dans le plan de rotation.

Si, toutes choses égales d'ailleurs, la direction suivie par le

* Voici, au besoin, la démonstration géométrique de ce théorème.

Soient OB une droite fixe; OD une droite mobile autour du point O ; COD le plan de rotation de la droite OD; B un point quelconque de la droite OB; C et D les pieds des perpendiculaires abaissées respectivement, l'une du point B sur le plan COD, l'autre du point C sur la droite OD.

Fig. 73bis.

Désignons par α_1 l'angle variable BOD et par α l'angle actuel des droites OB, CD. On a évidemment

$$\cos\alpha_1 = \frac{OD}{OB} \, ,$$

et, par suite,

$$d\cos\alpha_1 = \frac{1}{OB}\, d(OD).$$

Mais, d'un autre côté, si l'on désigne par ω la vitesse angulaire qui anime à la fois les deux droites OD, CD dans leur rotation simultanée, autour du point O pour l'une, et du point C pour l'autre, on a de même

$$d(OD) = \omega \, . \, CD.$$

De là résulte, en substituant,

$$d\cos\alpha_1 = \omega \, . \, \frac{CD}{OB} = \omega \, . \cos\alpha. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

point m est celle de la section principale dont la courbure a $\overline{W}_2$ pour module, la droite D ne cesse pas de coïncider avec la droite T_1 et l'on a de même

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d_2 \cos \alpha_1 = V_2 \overline{W}_2 \cos \alpha_2,$$

les indices qui affectent la caractéristique d et la vitesse V ayant même sens de part et d'autre.

Imaginons maintenant que le point m sorte du lieu O en glissant sur la courbe S et considérons la droite D comme étant la directrice du point m sur cette courbe. Ainsi déterminée, la droite D se confond avec la droite T et l'on a, comme ci-dessus,

$$d \cos \alpha = - V \overline{\Omega} \cos 6 \; *$$

les quantités $\overline{\Omega}$ et 6 se rapportant au point O de la courbe S et exprimant pour ce point, l'une le module de la courbure, l'autre l'angle que la normale principale fait avec la droite OB.

On sait, d'après le théorème de Hachette (voir n° 180, page 445) que la module $\overline{\Omega}$, porté sur la normale principale de la ligne S, à partir du point O, est la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés adjacents à ce point, d'une part, le module $\bar{\omega}$ porté sur la droite T_1, d'autre part, le module $\overline{W}$ porté sur la droite T_2. Il suit de là que si l'on projette en même temps sur la droite OB ces deux côtés et la diagonale, on a l'égalité

$$\overline{\Omega} \cos 6 = \bar{\omega} \cos \alpha_1 + \overline{W} \cos \alpha_2.$$

De là résulte, en substituant,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad d \cos \alpha = - V [\bar{\omega} \cos \alpha_1 + \overline{W} \cos \alpha_2].$$

* Il est aisé de voir que le second membre de cette équation doit être pris, toutes choses égales d'ailleurs, avec un signe contraire à celui dont se trouve affecté le second membre de l'équation (1). Les droites T, T_1 entraînées toutes deux par le point m sont et demeurent rectangulaires. Il s'ensuit que les cosinus des angles qu'elles font avec la droite OB varient en sens inverse, l'un croissant si l'autre décroît et réciproquement.

Reprenons les équations (1) et (2). En leur ajoutant celles qui s'en déduisent par simple voie de permutation tournante, on a les six équations

$$(4).\quad \left\{\begin{array}{lll} d\cos\alpha_1 = \mathrm{V}\bar{\omega}\cos\alpha, & d_1\cos\alpha_2 = \mathrm{V}_1.\bar{\omega}_1\cos\alpha_1, & d_2\cos\alpha = \mathrm{V}_2.\bar{\omega}_2\cos\alpha_2, \\ d\cos\alpha_2 = \mathrm{V}\overline{\mathrm{W}}\cos\alpha, & d_1\cos\alpha = \mathrm{V}_1\overline{\mathrm{W}}_1\cos\alpha_1, & d_2\cos\alpha_1 = \mathrm{V}_2.\overline{\mathrm{W}}_2\cos\alpha_2. \end{array}\right.$$

Le même procédé s'applique à l'équation (3) et fournit les trois équations

$$(5).\quad \left\{\begin{array}{l} d\cos\alpha = -\mathrm{V}\left[\bar{\omega}\cos\alpha_1 + \overline{\mathrm{W}}\cos\alpha_2\right], \\ d_1\cos\alpha_1 = -\mathrm{V}_1\left[\bar{\omega}_1\cos\alpha_2 + \overline{\mathrm{W}}_1\cos\alpha\right], \\ d_2\cos\alpha_2 = -\mathrm{V}_2\left[\bar{\omega}_2\cos\alpha + \overline{\mathrm{W}}_2\cos\alpha_1\right]. \end{array}\right.$$

La simultanéité des équations (4) et (5) permet de les combiner entre elles et d'en déduire, par voie de différentiation, les formules dont nous poursuivons la recherche. Les substitutions que nous aurons à faire exigeant la détermination préalable de chacun des couples $(d_2\mathrm{V}, d\mathrm{V}_2)$, $(d\mathrm{V}_1, d_1\mathrm{V})$, $(d_1\mathrm{V}_2, d_2\mathrm{V}_1)$ nous observerons qu'on parvient sans difficulté aux six équations *

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{lll} d_1\mathrm{V} = \mathrm{V}.\mathrm{V}_1\bar{\omega}, & d_2\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_1\mathrm{V}_2\bar{\omega}_1, & d\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_2.\mathrm{V}\bar{\omega}_2, \\ d_2\mathrm{V} = \mathrm{V}\mathrm{V}_2\overline{\mathrm{W}}, & d\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_1\mathrm{V}\overline{\mathrm{W}}_1, & d_1\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_2\mathrm{V}_1\overline{\mathrm{W}}_2. \end{array}\right.$$

Différencions, par rapport à la caractéristique d_2, la première

* S'agit-il de la différentielle $d_2\mathrm{V}$? La vitesse V, dirigée suivant la droite T peut se rapporter indifféremment à chacune des deux sections principales faites tangentiellement à cette droite, l'une dans la surface SOS_1, l'autre dans la surface $\mathrm{S}_2\mathrm{OS}$. Si on la rapporte à la première de ces sections, on a

$$\mathrm{V} = \mathrm{W}.\gamma,$$

γ étant le rayon de courbure qui correspond au module $\overline{\mathrm{W}}$.

La différentielle $d_2\mathrm{V}$ exprime, par hypothèse, la vitesse avec laquelle varie la quantité V lorsque le point m sort du lieu O avec la vitesse V dirigée suivant la section faite dans la surface $\mathrm{S}_2\mathrm{OS}$ par un plan parallèle aux droites T, T_1 et

des équations (4) et, par rapport à la caractéristique d la dernière de ces mêmes équations. L'identité

$$d_2 . d \cos \alpha_1 = d . d_2 \cos \alpha_1,$$

qui subsiste en vertu de la règle établie au n° 55 de la 2me partie (page 148), donne

$$d_2(V\bar{\omega} \cos \alpha) = d(V_2 \overline{W}_2 \cos \alpha_2).$$

De là résulte, en développant,

$$V \cos \alpha . d_2 \bar{\omega} + V\bar{\omega} d_2 \cos \alpha + \bar{\omega} \cos \alpha . d_2 V = V_2 \cos \alpha_2 . d\overline{W}_2$$
$$+ V_2 \overline{W}_2 . d \cos \alpha_2 + \overline{W}_2 \cos \alpha_2 . dV_2,$$

puis, substituant les valeurs fournies par les équations (4) et (6),

$$V \cos \alpha . d_2 \bar{\omega} + VV_2 . \bar{\omega}\bar{\omega}_2 \cos \alpha_2 + VV_2 . \bar{\omega}\overline{W} \cos \alpha = V_2 \cos \alpha_2 . d\overline{W}_2$$
$$+ VV_2 \overline{W} . \overline{W}_2 \cos \alpha + VV_2 . \bar{\omega}_2 \overline{W}_2 \cos \alpha_2 .$$

Divisons par le produit $V.V_2$ et remplaçons les rapports $\frac{d_2\bar{\omega}}{V_2}$, $\frac{d\overline{W}_2}{V}$ par les expressions équivalentes $\frac{d\bar{\omega}}{ds_2}$, $\frac{d\overline{W}_2}{ds}$ (les dénominateurs dé-

que ce plan se meut avec la vitesse de translation représentée par V_2, *la position dont il sort étant celle d'une section principale*. Il suit de là que tout se réduit à considérer le point m comme s'il sortait du lieu O en glissant sur le rayon de courbure γ avec la vitesse $\dot{\gamma} = V_2$ et que ce rayon tournât avec la vitesse W autour du centre de courbure qui lui correspond. De là résulte, en vertu de l'équation précédente,

$$d_2 V = W . \dot{\gamma} = W.V_2,$$

et, substituant à W le produit égal $V.\overline{W}$

$$d_2 V = V.V_2 \overline{W}.$$

On peut obtenir de même les autres équations, ou les déduire de celle-ci par voie de permutation tournante.

terminant la variable à considérer pour la différentiation indiquée au numérateur). On trouve ainsi les équations suivantes, dont la première s'obtient directement, et les deux autres par voie de permutation tournante,

$$(8).\ \begin{cases} \dfrac{d\omega}{ds_2}\cos\alpha - \dfrac{d\overline{W}_2}{ds}\cos\alpha_2 = [\overline{W}_2 - \bar{\omega}]\,[\overline{W}\cos\alpha + \bar{\omega}_2\cos\alpha_2], \\ \dfrac{d\bar{\omega}_1}{ds}\cos\alpha_1 - \dfrac{d\overline{W}}{ds_1}\cos\alpha = [\overline{W} - \bar{\omega}_1]\,[\overline{W}_1\cos\alpha_1 + \bar{\omega}\cos\alpha], \\ \dfrac{d\bar{\omega}_2}{ds_1}\cos\alpha_2 - \dfrac{d\overline{W}_1}{ds_2}\cos\alpha_1 = [\overline{W}_1 - \bar{\omega}_2][\overline{W}_2\cos\alpha_2 + \bar{\omega}_1\cos\alpha_1]. \end{cases}$$

La droite OB pouvant être quelconque, disposons-en pour la faire coïncider successivement avec chacune des trois tangentes T, T_1, T_2. Il suffit pour cela d'annuler alternativement chacun des trois angles α, α_1, α_2 et d'égaler, en même temps, les deux autres à 90°. On trouve ainsi trois identités et les six équations

$$(9).\ \begin{cases} \dfrac{d\bar{\omega}}{ds_2} = [\overline{W}_2 - \bar{\omega}]\overline{W}, \quad \dfrac{d\bar{\omega}_1}{ds} = [\overline{W} - \bar{\omega}_1]\overline{W}_1, \quad \dfrac{d\bar{\omega}_2}{ds_1} = [\overline{W}_1 - \bar{\omega}_2]\overline{W}_2, \\ \dfrac{d\overline{W}}{ds_1} = [\bar{\omega}_1 - \overline{W}]\bar{\omega}, \quad \dfrac{d\overline{W}_1}{ds_2} = [\bar{\omega}_2 - \overline{W}_1]\bar{\omega}_1, \quad \dfrac{d\overline{W}_2}{ds} = [\bar{\omega} - \overline{W}_2]\bar{\omega}_2. \end{cases}$$

Au lieu de combiner entre elles les équations (4) on peut les combiner avec les équations (5), sans rien changer d'ailleurs au procédé suivi. Cette combinaison nouvelle a l'avantage de reproduire les relations précédentes et d'en fournir trois autres. Bornons-nous à un résumé succinct.

Différencions la première des équations (5) par rapport à l'une ou l'autre des caractéristiques d_1, d_2. Si nous différencions en même temps la troisième et la cinquième des équations (4) par rapport à la caractéristique d, les identités résultantes

$$d_1 d\cos\alpha = d.d_1\cos\alpha\ , \qquad d_2 d\cos\alpha = d.d_2\cos\alpha$$

donnent

$$d_1 V\,[\bar{\omega}\cos\alpha_1 + \overline{W}\cos\alpha_2] = -\,d(V_1\overline{W}_1\cos\alpha_1),$$

$$d_2 V\,[\bar{\omega}\cos\alpha_1 + \overline{W}\cos\alpha_2] = -\,d(V_2.\bar{\omega}_2\cos\alpha_2).$$

De là résulte, en développant, faisant les substitutions permises en vertu des équations (4), (5), (6), et réduisant comme pour les équations (8),

$$(10)\begin{cases}\left[\dfrac{d\bar{\omega}}{ds_1}+\dfrac{d\overline{W}_1}{ds}\right]\cos\alpha_1+\dfrac{d\overline{W}}{ds_1}\cos\alpha_2=[\omega_1-\overline{W}]\,\bar{\omega}\cos\alpha_2-[\bar{\omega}^2+\overline{W}_1^2+\bar{\omega}_1\overline{W}]\cos\alpha_1,\\[2ex] \left[\dfrac{d\overline{W}}{ds_2}+\dfrac{d\bar{\omega}_2}{ds}\right]\cos\alpha_2+\dfrac{d\bar{\omega}}{ds_2}\cos\alpha_1=[\overline{W}_2-\bar{\omega}]\overline{W}\cos\alpha_1-[\bar{\omega}_2^2+\overline{W}^2+\bar{\omega}\overline{W}_2]\cos\alpha_2.\end{cases}$$

On sait qu'il suffit d'annuler successivement chacun des trois angles α, α_1, α_2 et d'égaler, en même temps, les deux autres à 90°, pour que la droite OB coïncide alternativement avec chacune des trois tangentes T, T_1, T_2. Cela posé, si l'on fait d'abord $\alpha = o$, les équations (10) sont satisfaites identiquement. Si l'on pose ensuite $\alpha_1 = o$, il vient

$$\frac{d\bar{\omega}}{ds_1}+\frac{d\overline{W}_1}{ds}=-\,[\bar{\omega}^2+\overline{W}_1^2+\bar{\omega}_1\overline{W}],\qquad \frac{d\bar{\omega}}{ds_2}=[\overline{W}_2-\bar{\omega}]\overline{W}.$$

On a de même pour $\alpha_2 = o$

$$\frac{d\overline{W}}{ds_2}+\frac{d\bar{\omega}_2}{ds}=-\,[\bar{\omega}_2^2+\overline{W}^2+\bar{\omega}\overline{W}_2],\qquad \frac{d\overline{W}}{ds_1}=[\bar{\omega}_1-\overline{W}]\,\bar{\omega}.$$

On voit, d'ailleurs, aisément, par voie de permutation tournante, que ces équations impliquent le système complet des équa-

tions (9) et, en outre, les trois relations suivantes dont chacune est deux fois reproduite,

$$(11)\ldots\begin{cases}\dfrac{d\bar{\omega}}{ds_1}+\dfrac{d\overline{W}_1}{ds}=-[\bar{\omega}^2+\overline{W}_1^2+\bar{\omega}_1\overline{W}],\\[2mm] \dfrac{d\bar{\omega}_1}{ds_2}+\dfrac{d\overline{W}_2}{ds_1}=-[\bar{\omega}_1^2+\overline{W}_2^2+\bar{\omega}_2\overline{W}_1],\\[2mm] \dfrac{d\bar{\omega}_2}{ds}+\dfrac{d\overline{W}}{ds_2}=-[\bar{\omega}_2^2+\overline{W}^2+\bar{\omega}\,\overline{W}_2].\end{cases}$$

Désignons par γ, γ_1, γ_2 et par c, c_1, c_2 les rayons de courbure qui correspondent respectivement, les premiers aux modules $\overline{W}$, $\overline{W}_1$, $\overline{W}_2$, les derniers aux modules $\bar{\omega}$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$. Si on les prend avec leurs valeurs absolues, et que l'on tienne compte, d'après les conventions adoptées, du sens des rotations, il faut poser

$$\overline{W}=-\frac{1}{\gamma},\quad \overline{W}_1=-\frac{1}{\gamma_1},\quad \overline{W}_2=-\frac{1}{\gamma_2},$$
$$\bar{\omega}=-\frac{1}{c},\quad \bar{\omega}_1=-\frac{1}{c_1},\quad \bar{\omega}_2=-\frac{1}{c_2}.$$

Les formules (9) et (11), lorsqu'on y substitue ces valeurs, prennent la forme suivante, sous laquelle on les doit à M. Lamé,

$$(12).\begin{cases}\dfrac{d\frac{1}{c}}{ds_2}=\dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{\gamma_2}\right),\quad \dfrac{d\frac{1}{c_1}}{ds}=\dfrac{1}{\gamma_1}\left(\dfrac{1}{c_1}-\dfrac{1}{\gamma}\right),\quad \dfrac{d\frac{1}{c_2}}{ds_1}=\dfrac{1}{\gamma_2}\left(\dfrac{1}{c_2}-\dfrac{1}{\gamma_1}\right),\\[3mm] \dfrac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_1}=\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{1}{c_1}\right),\quad \dfrac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds_2}=\dfrac{1}{c_1}\left(\dfrac{1}{\gamma_1}-\dfrac{1}{c_2}\right),\quad \dfrac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds}=\dfrac{1}{c_2}\left(\dfrac{1}{\gamma_2}-\dfrac{1}{c}\right),\\[3mm] \dfrac{d\frac{1}{c}}{ds_1}+\dfrac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds}=\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{1}{\gamma_1^2}+\dfrac{1}{\gamma c_1},\quad \dfrac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2}+\dfrac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1}=\dfrac{1}{c_1^2}+\dfrac{1}{\gamma_2^2}+\dfrac{1}{\gamma_1 c_2},\\[3mm] \dfrac{d\frac{1}{c_2}}{ds}+\dfrac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2}=\dfrac{1}{c_2^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}+\dfrac{1}{c\gamma_2}.\end{cases}$$

Il y a lieu d'observer que ces équations sont au nombre de neuf, tandis que les rayons de courbure dont elles dépendent sont seulement au nombre de six. On peut en inférer que trois quelconques de ces neuf équations rentrent dans les six autres *.

Théorème de Sturm, et autres, sur les déplacements d'une normale à une surface.

184. Reportons-nous aux données du n° 182 et à la figure 72, page 448.

Lorsque le point O', supposé mobile sur la surface A, sort du lieu O, suivant la direction OL et *avec une vitesse égale à l'unité*, la rotation de la normale est représentée par O*n*. Cette rotation se décompose en deux autres, l'une établie autour de l'axe OX et représentée en sens et grandeur par O*a*, l'autre établie autour de l'axe OY et représentée en sens et grandeur par O*b*. On a, d'ailleurs,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad Oa = OL'.\cos\alpha, \qquad Ob = OL.\sin\alpha,$$

et, comme les formules (1) et (2) du n° 182, page 448, donnent

$$OL' = \overline{W}_y.\mathrm{tg}\,\alpha, \qquad OL = \overline{W}_x.\cot\alpha,$$

il en résulte

$$(2). \quad Oa = \overline{W}_y.\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{R'}, \qquad Ob = \overline{W}_x\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{R}.$$

Soient c, c' les points de la normale qui coïncident originairement avec les centres de courbure des sections principales S_x, S_y. Les vitesses qui animent les points c, c' se composent de la vitesse

* Nous avons suivi pour l'établissement des formules de M. Lamé la marche tracée par M. Ossian Bonnet, dans un mémoire publié en 1848 sur la théorie générale des surfaces (*Journal de l'école Polytechnique*, 32me cahier, t. XIX, pages 22 et suivantes). La seule différence à noter consiste en ce que nous avons procédé géométriquement, sans aucune intervention d'infiniment petits.

avec laquelle le point O′ sort du lieu O et de celles qui résultent des rotations simultanées Oa, Ob. Les composantes de la vitesse du point O′ suivant les axes OX, OY sont l'une $\cos\alpha$, l'autre $\sin\alpha$.

De là résulte :

1° Pour la vitesse qui anime le point c parallèlement à OX,

$$(3). \quad \cos\alpha - R.Ob = o;$$

2° Pour la vitesse qui anime ce même point parallèlement à OY,

$$(4). \quad \sin\alpha - R.Oa = \left(1 - \frac{R}{R'}\right)\sin\alpha = \frac{R'-R}{R'}\sin\alpha;$$

3° Pour la vitesse qui anime le point c' parallèlement à OX,

$$(5). \quad \cos\alpha - R'.Ob = \left(1 - \frac{R'}{R}\right)\cos\alpha = \frac{R-R'}{R}\cos\alpha;$$

4° Pour la vitesse qui anime ce même point parallèlement à OY,

$$(6). \quad \sin\alpha - R'.Oa = o.$$

Les équations (3) et (6) montrent, conformément au théorème de Sturm, que c'est en s'appuyant sur deux droites, parallèles au plan tangent et rectangulaires entre elles, que la normale à une surface sort du lieu qu'elle occupe. Cette circonstance est remarquable en ce que les droites dont il s'agit restent les mêmes pour tous les déplacements possibles à partir d'un même lieu. On voit, d'ailleurs, comment elles sont situées, chacune d'elles passant par le centre d'une des sections principales et étant dirigée perpendiculairement au plan de cette section.

La simultanéité des équations (3), (4), (5), (6) implique les déductions suivantes :

Lorsqu'une droite assujettie à rester normale à une surface

sort du lieu qu'elle occupe, son état de mouvement résulte, en général, de deux rotations simultanées.

L'une de ces rotations est établie autour du point c. *Elle fait tourner la normale dans le plan de la section* S_x *avec la vitesse angulaire* $\frac{\cos\alpha}{R}$. *La vitesse qu'elle communique au point* c' *est dirigée parallèlement à l'axe* OX *et représentée en grandeur par l'expression*

$$\frac{R-R'}{R}\cos\alpha.$$

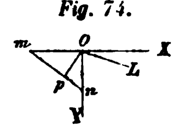
L'autre est établie autour du point c'. *Elle fait tourner la normale dans le plan de la section* S_y *avec la vitesse angulaire* $\frac{\sin\alpha}{R'}$. *La vitesse qu'elle communique au point* c *est représentée en grandeur par l'expression*

$$\frac{R'-R}{R'}\sin\alpha.$$

On observera que ces déductions s'appliquent au cas où le point O' sort du lieu O avec une vitesse égale à l'unité.

185. Projetons en *m* sur OX, en *n* sur OY les extrémités des vitesses qui animent simultanément les points *c'* et *c*. Si nous tirons la droite *mn* et que, du point O, nous abaissions sur cette droite la perpendiculaire O*p*, il suffit de se reporter au théorème VII de la première partie (n° 17, page 45) pour reconnaître que la vitesse du point central est représentée par O*p*, et que ce point est situé sur la normale de manière à diviser l'intervalle *c'c* comme le point *p* divise le segment *mn*. Désignons par *e* le point central et par γ les angles égaux O*np*, *m*O*p*. On a, d'après ce qui précède,

Fig. 74.



$$(1)\ldots\ldots\quad ce=(R'-R)\frac{pn}{mn},$$

$$(2)\ldots\ldots\quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{Om}{On}=\frac{R'}{R}\cot\alpha,$$

l'équation (2) pouvant s'écrire sous cette autre forme

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma = \frac{R'}{R}.$$

Rapprochée de l'équation (3) du n° 182, page 448, la dernière équation montre que la droite O*p* coïncide avec la caractéristique du plan tangent qui correspond au déplacement considéré. Ce résultat est évident *à priori*. Il est clair, en effet, que l'état de mouvement de la normale est réductible à une translation représentée par O*p* et à une rotation établie autour d'un axe mené par le point *e* parallèlement à O*p*.

Ajoutons R aux deux membres de l'équation (1) et désignons par *r* la distance du point central *e* au point O. Il vient

$$(3)\quad \ldots\ldots \quad r = R\frac{pm}{mn} + R'\frac{pn}{mn}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{pm}{mn} = \frac{pm}{Om}\cdot\frac{Om}{mn} = \sin^2\gamma, \qquad \frac{pn}{mn} = \frac{pn}{On}\cdot\frac{On}{mn} = \cos^2\gamma.$$

Ces valeurs substituées dans l'équation (3) donnent

$$(4)\quad \ldots\ldots \quad r = R\sin^2\gamma + R'\cos^2\gamma,$$

et, par suite,

$$(5)\quad \ldots\ldots \quad \frac{r}{R.R'} = \frac{\cos^2\gamma}{R} + \frac{\sin^2\gamma}{R'}.$$

Soit ρ_1 le rayon de courbure de la section normale dirigée suivant O*p*. On a

$$(6)\quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos^2\gamma}{R} + \frac{\sin^2\gamma}{R'}.$$

La comparaison des équations (5) et (6) fournit la relation générale

$$(7)\quad \ldots\ldots \quad \rho_1 . r = RR' = \text{cons}^{\text{te}}.$$

Désignons sous le nom de *sections conjuguées* deux sections normales quelconques, dirigées respectivement suivant deux diamètres conjugués de l'indicatrice. L'équation (7) implique le théorème suivant :

Le produit du rayon de courbure d'une section normale par la distance de la surface au point central de la section conjuguée est constamment égal au produit des rayons de courbure principaux.

186. Reprenons l'équation (2) du n° 185, page 461,

$$(1). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{R'}{R}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

L'on en déduit

$$(2). \ \cos^2\gamma = \frac{R^2.\sin^2\alpha}{R^2\sin^2\alpha + R'^2\cos^2\alpha}, \quad \sin^2\gamma = \frac{R'^2\cos^2\alpha}{R^2\sin^2\alpha + R'^2\cos^2\alpha}.$$

Ces valeurs substituées dans l'expression de la quantité r donnent

$$(3). \quad \ldots \quad r = R^2.R'^2\,\frac{\dfrac{\cos^2\alpha}{R} + \dfrac{\sin^2\alpha}{R'}}{R^2\sin^2\alpha + R'^2\cos^2\alpha}.$$

Soit ρ le rayon de courbure de la section normale dirigée suivant OL. On a

$$(4). \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'}.$$

La combinaison des équations (1) et (4) fournit la relation

$$(5). \quad \ldots\ldots \quad \rho.r = \frac{R^2.R'^2}{R^2\sin^2\alpha + R'^2\cos^2\alpha},$$

ou, mieux encore,

$$(6). \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\rho.r} = \frac{\cos^2\alpha}{R^2} + \frac{\sin^2\alpha}{R'^2}.$$

L'équation (6) est l'équation polaire d'une ellipse rapportée à son centre et ayant ses axes principaux R, R′ respectivement dirigés, le premier suivant la droite OX, le second suivant la droite OY.

Chacun des rayons vecteurs de cette courbe détermine, par sa position une section normale, par sa longueur la moyenne proportionnelle entre le rayon de courbure de cette section et la distance centrale correspondante *.

On peut désigner sous le nom de *deuxième indicatrice* l'ellipse représentée par l'équation (6). La considération de cette courbe n'offre pas les mêmes avantages que celle de la première indicatrice. Elle permet néanmoins de faire ressortir quelques résultats plus ou moins curieux. Bornons-nous à signaler la propriété suivante que l'inspection de l'équation (6) suffit d'ailleurs pour mettre en évidence.

Soient ρ' et r' le rayon de courbure et la *distance centrale* * qui correspondent à la section normale dirigée à angle droit sur OL. On a évidemment

$$(7). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{\rho . r} + \frac{1}{\rho' . r'} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} = \text{cons}^{\text{te}},$$

et, de là résulte l'énoncé suivant :

La somme inverse des produits du rayon de courbure par la distance centrale est constante pour deux sections quelconques rectangulaires.

Imaginons qu'on superpose les plans des deux indicatrices, en faisant coïncider les centres respectifs de ces courbes et les directions de leurs axes principaux. A une même direction quelconque

* Pour abréger, nous désignons sous le nom de *distance centrale* la distance comprise, pour la section que l'on considère, entre la surface et le point central correspondant.

correspondront deux rayons vecteurs exprimés respectivement l'un par $\sqrt{\rho}$, l'autre par $\sqrt{\rho . r}$. Le quotient de ces deux rayons détermine la quantité $\sqrt{r}$, c'est-à-dire la racine carrée de la distance centrale correspondante. Ce résultat peut s'énoncer comme il suit :

Le rapport qui s'établit pour une même direction entre le rayon vecteur de la deuxième indicatrice et celui de la première est la racine carrée de la distance centrale correspondante à cette direction.

Multiplions membre à membre l'équation (6) du présent numéro et l'équation (7) du numéro précedent, page 462. Il vient

$$(8) \ldots \quad \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{R'}{R}\cos^2\alpha + \frac{R}{R'}\sin^2\alpha.$$

Remplaçant le rapport $\frac{R'}{R}$ par sa valeur $tg\,\alpha \,.\, tg\gamma$, on trouve, toutes réductions faites,

$$(9) \ldots \quad \rho_1 \sin . 2\gamma = \rho \sin . 2\alpha.$$

Les équations (8) et (9) expriment les relations qui s'établissent entre les rayons de courbure de deux sections normales conjuguées.

187. Le point central étant le point de la normale dont la vitesse est la moindre en grandeur, on peut, en procédant comme il suit, déterminer directement la position qu'il occupe.

Soit n le centre de courbure de la section normale désignée par S_i dans le n° 182, page 448, et dirigée suivant la droite OL.

Lorsque le point O′ sort du lieu O suivant la section S_i, la normale peut être considérée comme animée de deux rotations simultanées, établies respectivement, l'une autour du point n dans le plan de la section S_i, l'autre autour du point O dans un plan perpendiculaire à celui de cette même section. La vitesse angulaire qui correspond à la première de ces rotations est W_i; celle qui correspond à

Fig 75.

la seconde est N_t. Les vitesses qu'elles communiquent à un même point e' de la normale sont rectangulaires entre elles et elles ont pour valeurs respectives, l'une le produit $ne'.W_t$, l'autre le produit $Oe'.N_t$. Si nous représentons la première par ne', nous pouvons représenter la seconde par $e'h'$, l'angle $ne'h'$ étant droit et le segment $e'h'$ ayant pour longueur

$$Oe'.\frac{N_t}{W_t} = e'h'.$$

Tirons la droite Oh' et désignons par λ l'angle $Oh'e'$. On a

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{Oe'}{e'h'} = \frac{W_t}{N_t}.$$

Concluons que la direction de la droite Oh' est complétement déterminée par le rapport des vitesses angulaires W_t, N_t, et que la vitesse totale du point e' est représentée *en grandeur* par l'hypoténuse nh' du triangle rectangle $ne'h'$.

Cette conclusion étant générale et s'appliquant, en conséquence, à toutes les positions que le point e' peut prendre sur la normale On, il est visible que, pour déterminer le point central e, il suffit d'abaisser du point n sur la droite Oh' la perpendiculaire nh et de projeter en e sur On le pied de cette perpendiculaire. De là résulte immédiatement

$$Oe = Oh . \sin \lambda = On \sin^2 \lambda,$$

et, avec les notations du numéro qui précède,

(1). . . . . $r = \rho \sin^2 \lambda.$

Sans changer la figure, imaginons qu'elle soit tracée dans le plan qui touche en O la surface A', et que la droite OL, menée par le point O perpendiculairement à On, représente la direction suivie par le point O' au sortir du lieu O. Les droites On, OL représentent respectivement, l'une l'axe de la rotation W_t, l'autre celui de la rotation N_t. Il s'ensuit que la rotation résultante aura

pour axe une droite partant du point O et faisant avec OL un angle ayant pour tangente le rapport

$$\frac{W_t}{N_t}.$$

Mais telle est déjà la condition remplie par la droite Oh'. On voit donc que l'angle λ de la formule (1) n'est autre chose que celui que font entre elles les deux tangentes conjuguées représentées respectivement par OL et On dans la figure 72, n° 182, page 448. De là résulte, en conséquence,

$$\lambda = \alpha + \gamma.$$

La formule (1) détermine très-simplement le rapport qui existe pour une section quelconque entre le rayon de courbure de cette section et la distance centrale correspondante. Combinée avec la formule (7) du n° 185, page 462, elle donne

(2). . . . . . $\rho_1 . \rho \sin^2 \lambda = RR' = \text{const}^{te}$,

et, par conséquent, aussi

(3). . . . $\sqrt{\rho} . \sqrt{\rho_1} . \sin \lambda = \sqrt{R} . \sqrt{R'} = \text{const}^{te}$.

Considérons l'indicatrice déterminée par les demi-axes principaux $\sqrt{R}$, $\sqrt{R'}$. Les rayons vecteurs $\sqrt{\rho}$, $\sqrt{\rho_1}$ y correspondent à deux diamètres quelconques conjugués faisant entre eux l'angle λ. Cela posé, il est aisé de voir que les équations (1) et (3) ont pour traduction immédiate les énoncés suivants :

1° *Les racines carrées du rayon de courbure et de la distance centrale sont déterminées pour une même section, l'une par le rayon vecteur qui correspond à cette section dans l'indicatrice, l'autre par la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de ce rayon sur le diamètre conjugué;*

2° *Le parallélogramme construit dans l'indicatrice sur deux diamètres conjugués a pour surface équivalente celle du rectangle construit sur les axes principaux.*

Ce dernier énoncé exprime une propriété connue des sections coniques. Au lieu de procéder comme nous l'avons fait, on peut poser *à priori* l'équation (3). Il suffit alors de combiner cette équation avec l'équation (7) du n° 185, page 462, pour parvenir à l'équation (1) du présent numéro et formuler, par suite, le premier énoncé.

188. Reprenons l'équation (6) du n° 186, page 465,

$$\frac{1}{\rho . r} = \frac{\cos^2 \alpha}{R^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'^2},$$

et l'équation (1) du n° 187, page 466,

$$r = \rho . \sin^2 \lambda.$$

La combinaison de ces deux équations donne

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \lambda} = \frac{\sin^2 \lambda}{r^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{R^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'^2}.$$

Considérons l'ellipse que nous avons désignée sous le nom de *deuxième indicatrice*. Elle est déterminée par ses demi-axes principaux R, R'.

Soient *m* un point de cette ellipse ; O son centre ; *mn* la normale en *m* *; O*n* une perpendiculaire élevée en O sur le rayon vecteur O*m* ; O*e* la perpendiculaire abaissée du point O sur la normale *mn*.

Fig. 76.

Les droites O*n*, *mn* étant respectivement perpendiculaires, l'une au rayon vecteur O*m*, l'autre au diamètre conjugué avec ce rayon, les angles O*nm*, *m*O*e* sont égaux entre eux et à l'angle λ. Il s'ensuit que *le rayon de courbure de la sec-*

* La normale dont il s'agit ici n'est plus la normale à la surface, mais bien la normale à l'ellipse que l'on considère. Le plan de la figure est celui de cette même ellipse.

tion dirigée suivant Om *est représenté par* mn *et la distance centrale correspondante par* me. En effet, l'équation (1) donne

$$Om = \rho \sin \lambda = \frac{r}{\sin \lambda},$$

et, l'on a, d'après la figure,

$$Om = mn . \sin \lambda = \frac{me}{\sin \lambda}.$$

Il vient donc évidemment

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \rho = mn, \qquad r = me.$$

On voit ainsi comment il suffit d'une construction très-simple pour obtenir, en même temps, le rayon de courbure et la distance centrale qui correspondent à une même section quelconque déterminée. Sous ce rapport, la *deuxième indicatrice* ne le cède en rien à la première. Peut-être même doit-elle être considérée comme lui étant préférable.

Veut-on déterminer, en fonction de l'angle α et des rayons de courbure principaux, la distance centrale r? On a

$$\frac{\cos^2 \alpha}{R^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'^2} = \frac{1}{\rho . r} = \frac{1}{r}\left[\frac{\cos^2 \alpha}{R} \pm \frac{\sin^2 \alpha}{R'}\right],$$

et l'on en déduit

$$r = R . \frac{1 \pm \frac{R}{R'} \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \frac{R^2}{R'^2} \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

le signe à prendre étant le supérieur ou l'inférieur selon que la première indicatrice est une ellipse ou une hyperbole, autrement dit, selon que les courbures des sections principales sont de même sens ou de sens contraire.

189. Reprenons la formule (8) du n° 176, page 438. En y rem-

plaçant les modules $\overline{W}_y$ et $\overline{W}_x$ par leurs valeurs respectives $\frac{1}{R'}$ et $\frac{1}{R}$, elle devient

$$(1). \quad \ldots\ldots \quad \overline{N}_l = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right] \sin 2.\alpha$$

On peut écrire aussi, comme on l'a vu au n° 187, page 466,

$$(2). \quad \ldots\ldots \quad \overline{N}_l = \overline{W}_l \cot \lambda = \frac{\cot \lambda}{\rho},$$

λ étant l'angle que la section normale que l'on considère fait avec

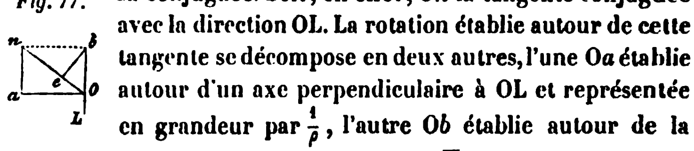


Fig. 77.

sa conjuguée. Soit, en effet, O*n* la tangente conjuguée avec la direction OL. La rotation établie autour de cette tangente se décompose en deux autres, l'une O*a* établie autour d'un axe perpendiculaire à OL et représentée en grandeur par $\frac{1}{\rho}$, l'autre O*b* établie autour de la droite OL et représentée en grandeur par $\overline{N}_l$. Cela posé, la simple inspection de la figure suffit pour établir immédiatement l'équation (2).

On a, généralement,

$$\overline{W}_l = \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \alpha}{R} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'}.$$

De là résulte pour la vitesse avec laquelle varie le module $\overline{W}_l$, lorsqu'on passe d'une section normale à une autre,

$$(3). \quad \ldots\ldots \quad d(\overline{W}_l) = \left[\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right] \sin 2\alpha . d\alpha.$$

Prenons la rotation $d\alpha$ égale à l'unité. La combinaison des équations (1) et (3) donne

$$(4). \quad \ldots\ldots\ldots \quad d(\overline{W}_l) = 2\overline{N}_l.$$

et l'on a l'énoncé suivant :

Le module de la vitesse [*] *avec laquelle la courbure des sections normales varie de l'une à l'autre est égal à deux fois le module de la rotation de la normale autour de la direction déterminée par la section que l'on considère.*

La formule (2) revient à

(5). . . . . $\rho.\overline{N}_l.\mathrm{tg}\,\lambda = 1$ [**].

Elle implique le théorème suivant :

Le produit des trois facteurs ρ, $\overline{N}_l$, *tg* λ *est constamment égal à l'unité pour tous les points de toutes les surfaces.*

Désignons par λ' l'angle que la section normale, dont le rayon de courbure est ρ', et qui est dirigée à angle droit sur celle dont le rayon de courbure est ρ, fait avec sa conjuguée. La quantité $\overline{N}_l$ restant la même, au signe près, conformément au théorème des tangentes réciproques, on a

(6). . . . . $\rho'.\overline{N}_l\,\mathrm{tg}\,\lambda' = 1$.

La combinaison des équations (5) et (6) donne

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\mathrm{tg}\,\lambda'}{\mathrm{tg}\,\lambda},$$

et de là résulte l'énoncé suivant :

Les rayons de courbure de deux sections normales rectangulaires sont en raison inverse des tangentes des angles que chacune de ces sections fait avec sa conjuguée.

[*] Nous disons *le module* pour exprimer que cette vitesse répond à l'hypothèse $\dot{\alpha} = d\alpha = 1$.

[**] En multipliant les deux membres de cette équation par V ou ds, on a généralement

$$ds = \rho.\mathrm{N}.\mathrm{tg}\,\lambda.$$

190. Soit ω la vitesse angulaire avec laquelle le plan tangent tourne autour de la caractéristique On, lorsque son point de contact sort du lieu O avec la vitesse V dirigée suivant OL. (Voir la figure 77, page 470.) La directrice de ce point sur la section normale OL tournant avec la vitesse $\frac{V}{\rho}$, il est visible que la vitesse du point b peut être considérée indifféremment, soit comme résultant de cette rotation et étant exprimée, en conséquence, par le produit $Ob.\frac{V}{\rho}$, soit comme s'empruntant à la rotation ω et ayant, en conséquence, pour expression le produit de la quantité ω par la perpendiculaire be abaissée du point b sur la droite On. De là résulte

$$\omega . be = Ob . \frac{V}{\rho},$$

et, remplaçant le rapport $\frac{be}{Ob}$ par sa valeur $\sin \lambda$,

$$(1)\quad\ldots\ldots\ldots\quad \omega = \frac{V}{\rho . \sin \lambda}.$$

L'état de mouvement de la normale se compose de la translation V et de la rotation ω. La translation se décompose en deux autres, l'une $V \cos \lambda$ dirigée suivant On, l'autre $V \sin \lambda$ perpendiculaire à la première. La vitesse $V \sin \lambda$ se compose par voie d'addition ou de soustraction avec celle qui résulte, pour chaque point de la normale, de la rotation ω. Il s'ensuit que le point central est celui pour lequel ces deux vitesses sont égales et de sens contraire. Il s'ensuit aussi que la vitesse de ce point est dirigée tout entière suivant la caractéristique On, et qu'elle est représentée en grandeur par la composante $V \cos \lambda$.

Soient u la vitesse du point central et r la distance de ce point au point O. On a, d'après ce qui précède,

$$(2)\quad\ldots\ldots\ldots\quad u = V \cos \lambda,$$

et, en outre,

$$(3)\quad\ldots\ldots\ldots\quad r\omega = V \sin \lambda.$$

La combinaison des équations (1) et (3) donne

$$(4). \quad \ldots\ldots\ldots \quad r = \rho \sin^2 \lambda,$$

c'est-à-dire la formule (1) du n° 187, page 466.

L'équation (1) exprime un théorème qu'on peut énoncer comme il suit :

O *étant un point mobile sur une surface et* P *le plan tangent en ce point, le rapport de la vitesse du point* O *à la rotation du plan* P *est égal au produit du rayon de courbure de la section normale correspondante par le sinus de l'angle que la direction suivie par le point* O *fait avec la caractéristique du plan* P.

Ce théorème se trouve énoncé en d'autres termes dans un mémoire de M. Ossian Bonnet sur la théorie générale des surfaces *.

Si l'on voulait exprimer la vitesse ω en fonction du rayon de courbure ρ_1 d'une section oblique inclinée de l'angle γ sur la section normale menée par la même tangente, on remplacerait ρ par le rapport $\frac{\rho_1}{\cos \gamma}$ et l'on aurait, en conséquence,

$$(5). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \omega = \frac{V \cos \gamma}{\rho_1 \sin \lambda}.$$

On peut, d'ailleurs, établir directement cette dernière formule.

THÉORIE ANALYTIQUE DE LA COURBURE DES SURFACES.

Notions préliminaires.

191. La courbure d'une surface varie, en général, d'un point à un autre. On l'estime, en chaque point, par les courbures

* Voir le *Journal de l'École polytechnique*, 32me cahier, tome XIX (1848), page 10.

qu'affectent en ce point les divers systèmes de lignes qu'on peut tracer sur la surface. Parmi ces lignes les plus simples à considérer sont celles qui résultent des intersections faites par les plans normaux. On les désigne sous le nom de *sections normales*, et l'on dit de deux surfaces qu'elles ont même courbure lorsqu'il en est ainsi des sections normales qui se correspondent de part et d'autre sous les mêmes inclinaisons relatives. S'agit-il de deux surfaces ayant un point commun et, en ce point, même plan tangent? Si, de plus, les sections normales faites en ce point par un même plan ont toutes, deux à deux, même courbure, les surfaces dont il s'agit ont entre elles un contact du second ordre, et il y a de part et d'autre osculation complète.

La question du contact du deuxième ordre entre deux surfaces se trouvant ainsi ramenée à celle d'un contact du même ordre entre deux systèmes de lignes déterminées, commençons par établir une proposition dont nous aurons plus tard à faire usage.

Lorsque deux courbes ont en un point commun (x, y, z) même tangente, on peut identifier de part et d'autre les vitesses dx, dy, dz. Il suffit pour cela d'identifier leur résultante

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Suppose-t-on, en outre, qu'en ce point les deux courbes aient même courbure? Il en résulte que les différentielles secondes d^2x, d^2y, d^2z s'identifient de part et d'autre comme celles du premier ordre, et réciproquement. Soient, en effet, α, β, γ les angles que la tangente commune aux deux courbes fait avec les axes coordonnés; on a, généralement,

$$(2). \quad dx = d\sigma . \cos\alpha, \quad dy = d\sigma . \cos\beta, \quad dz = d\sigma . \cos\gamma,$$

ce qui donne

$$(3). \; d^2x = d^2\sigma \cos\alpha - d\sigma . d\alpha . \sin\alpha, \quad d^2y = d^2\sigma . \cos\beta - d\sigma . d\beta \sin\beta,$$
$$d^2z = d^2\sigma \cos\gamma - d\sigma d\gamma \sin\gamma.$$

L'équation (1) donne, en même temps,

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d^2\sigma = \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Cela posé, si les courbes ont même courbure, les vitesses angulaires $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ correspondent, de part et d'autre, à une même rotation de la tangente commune. Elles ont donc, deux à deux, mêmes valeurs. Eu égard aux équations (3) et (4), il s'ensuit évidemment que l'égalité de courbure implique celle des différentielles secondes d^2x, d^2y, d^2z.

Réciproquement, si ces différentielles secondes ont, deux à deux, mêmes valeurs, les équations (3) et (4) fournissent, de part et d'autre, des valeurs identiques pour les vitesses angulaires $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$. L'identité de ces vitesses implique celle de leur résultante, et, par conséquent aussi, l'identité de courbure.

Concluons que *là où deux courbes ont, en un point commun, même tangente, l'égalité de courbure implique celles des différentielles secondes* d^2x, d^2y, d^2z, *et réciproquement.*

Courbure des sections normales et des sections obliques.

192. Soit une surface quelconque A, rapportée à des axes coordonnés rectangulaires, et ayant pour équation

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad z = F(x, y).$$

Pour abréger, nous représenterons, comme on le fait habituellement, par p et q les dérivées partielles du premier ordre $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$, et par r, s, t les dérivées partielles du second ordre $F''_x(x, y)$, $F''_{x,y}(x, y)$, $F''_y(x, y)$.

On a, d'abord,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dz - pdx - qdy = o,$$

puis, différenciant une seconde fois,

$$(3). \quad . \quad . \quad d^2z - pd^2x - qd^2y = r.dx^2 + 2s.dxdy + t.dy^2.$$

Soient m un point pris sur la surface A, et S une section plane faite dans cette surface par le point m.

Considérons le cercle osculateur en m à la section S et, quel que soit ce cercle, concevons-le tracé sur la sphère

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2.$$

En opérant sur l'équation (4), comme on l'a fait sur l'équation (1), on trouve, en premier lieu,

$$(5). \quad . \quad . \quad (x-a)dx+(y-b)dy+(z-c)dz=o,$$

et, en second lieu,

$$(6). \quad (x-a)d^2x+(y-b)d^2y+(z-c)d^2z=dx^2+dy^2+dz^2=d\sigma^2.$$

On sait, d'ailleurs, conformément aux déductions du n° 191, que les quantités dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z peuvent être considérées comme identiques dans les équations simultanées (2), (3), (5), (6).

Sans rien changer à ce qui précède, nous pouvons assujettir la sphère à toucher en m la surface A. Il s'ensuit que le centre de cette sphère se trouve sur la normale en m à la surface A et que ses coordonnées a, b, c satisfont à l'équation de cette droite, De là résulte immédiatement *

$$(7). \quad . \quad x-a=-p(z-c), \qquad y-b=-q(z-c).$$

Ces valeurs substituées dans l'équation (4) donnent

$$(8). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \rho=(z-c)\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Substituées dans l'équation (5), elles vérifient l'identité de cette

* En désignant par t, u, v les coordonnées courantes de la normale, on sait, conformément aux formules (3) et (4) du n° 165, page 417, que cette droite a pour équations générales

$$t-x+p(v-z)=o, \qquad u-y+q(v-z)=o.$$

équation avec l'équation (2). Substituées dans l'équation (6), elles donnent

$$(9). \quad \ldots \quad d^2z - pd^2x - qd^2y = \frac{d\sigma^2}{z-c},$$

et, eu égard à l'équation (3),

$$(10). \quad \ldots \quad z - c = \frac{d\sigma^2}{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}.$$

La comparaison des équations (8) et (10) fournit la relation finale

$$(11). \quad \ldots \quad \rho = \frac{d\sigma^2\sqrt{1+p^2+q^2}}{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}.$$

Les coordonnées a, b, c sont, d'ailleurs, déterminées par les équations (7) et (10).

Cela posé, la section S peut être normale ou oblique.

Dans le premier cas, la section qui lui correspond dans la sphère est un grand cercle, et elle a pour rayon de courbure le rayon ρ déterminé par l'équation (11). Dans le second cas, la section correspondante est un petit cercle. Néanmoins la sphère sur laquelle ce cercle est tracé ne change pas si les quantités dx, dy, dz restent les mêmes, c'est-à-dire si la section oblique a même tangente que la section normale considérée d'abord. Or, en ce cas, si l'on désigne par φ l'angle des deux sections et par ρ_1 le rayon du petit cercle, on a évidemment

$$(12). \quad \ldots \quad \rho_1 = \rho . \cos \varphi.$$

De là résulte la conclusion suivante :

Pour toute section normale le rayon de courbure est fourni par l'équation (11). *Pour toute section oblique, ayant même tangente, il est fourni par l'équation* (12).

193. L'équation qui détermine le rayon ρ peut s'écrire comme il suit :

$$(1). \; r(x'-x)^2 + 2s(y'-y)(x'-x) + t(y'-y)^2 = \frac{\sigma^2}{\rho}\sqrt{1+p^2+q^2},$$

σ étant une longueur quelconque, mesurée à partir du point m suivant la tangente à la section normale que l'on considère, et x', y' les coordonnées du point suivant lequel l'extrémité de cette longueur se projette sur le plan des xy.

Le rayon vecteur σ restant arbitraire, on peut le prendre tel que, pour chaque section normale, on ait constamment

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sigma^2 = \rho.$$

Dans cette hypothèse, l'extrémité du rayon vecteur σ reste sur une certaine courbe située dans le plan tangent et ayant pour projection sur le plan des xy

$$(3) \; r(x'-x)^2 + 2s(y'-y)(x'-x) + t(y'-y)^2 = \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

La courbe déterminée par cette équation et celle du plan tangent est l'*indicatrice* déjà mentionnée dans les numéros 171 et 174, pages 424 et 431. Il suffit, d'ailleurs, de considérer cette courbe pour en déduire directement les énoncés qui suivent :

1° *Les rayons de courbure des sections normales comportent, en général, un* maximum *et un* minimum, *les plans normaux correspondants étant rectangulaires;*

2° *La somme inverse des rayons de courbure appartenant à deux sections normales rectangulaires est constante;*

3° *La courbure d'une section quelconque est déterminée par celles qu'affectent les sections de plus petite et de plus grande courbure.*

Supposons l'origine transportée au point m, et prenons pour plan des xy le plan qui touche en ce point la surface A. Les quantités p et q s'annulant toutes deux, on a, pour équation de l'indicatrice,

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 = 1.$$

Choisit-on les axes de manière à ce que cette courbe soit rapportée à ses diamètres principaux? Il vient en outre $s = o$.

Cela posé, si l'on annule les quantités p, q, s dans l'équation (11) du n° 192, page 477, on trouve, pour le rayon de courbure d'une section normale quelconque,

$$(5). \quad \ldots\ldots \quad \rho = \frac{dx^2 + dy^2}{rdx^2 + tdy^2},$$

ou, désignant par α l'angle que la tangente à la section que l'on considère fait avec l'axe des x,

$$(6). \quad \ldots\ldots \quad \rho = \frac{1}{r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha}.$$

Soient R, R′ les rayons de courbure principaux. L'équation (6) donne, pour $\alpha = o$,

$$\frac{1}{R} = r,$$

et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{R'} = t.$$

De là résulte, en général,

$$(7). \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'},$$

l'équation (7) n'étant autre chose que l'équation (5) du n° 171, page 424.

194. *Autrement.* — Conservons les données du n° 192 et désignons par m' un point mobile assujetti à rester sur la surface A.

Soient x', y', z' les coordonnées du point m'; h la perpendiculaire abaissée du point m' sur le plan qui touche en m la surface A; m'' le pied de cette perpendiculaire; x'', y'', z'' les coordonnées du point m''.

Les points m et m'' étant tous deux dans le plan tangent en m, on a

$$(1). \quad \ldots \quad z - z'' = p(x - x'') + q(y - y'').$$

Les points m' et m'' étant tous deux sur une même droite perpendiculaire au plan tangent en m, on a, en même temps,

$$(2).\quad x'-x''=-p(z'-z''),\qquad y'-y''=-q(z'-z'').$$

Il est visible, d'ailleurs, qu'en désignant par γ l'angle que la normale au plan tangent fait avec l'axe des z, on peut écrire immédiatement,

$$(3).\ \ldots\ z'-z''=h\cos\gamma=\frac{h}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.\ *$$

L'équation (1) revient à

$$(4)\ z'-z''=p(x'-x'')+q(y'-y'')+z'-z-p(x'-x)-q(y'-y).$$

Eu égard aux équations (2), l'équation (4) donne

$$(5).\ \ldots\ z'-z''=\frac{z'-z-p(x'-x)-q(y'-y)}{1+p^2+q^2}.$$

Cette valeur substituée dans l'équation (3) conduit à la relation

$$(6).\ \ .h\sqrt{1+p^2+q^2}=z'-z-p(x'-x)-q(y'-y).$$

Différencions deux fois de suite l'équation (6), en y considérant comme constantes les quantités déterminées x, y, z, p, q, et posons $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$ dans le résultat de la seconde différentiation, ce qui revient à considérer le point m' au sortir du lieu m. On trouve ainsi

$$(7).\ \ldots\ d^2h\sqrt{1+p^2+q^2}=d^2z-pd^2x-qd^2y.$$

* On peut parvenir à l'équation (3) en posant

$$h=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2},$$

et substituant pour $x'-x''$, $y'-y''$ les valeurs fournies par les équations (2).

Combinée avec l'équation (5) du n° 192, page 475, l'équation (7) donne

$$(8). \quad \dots \quad d^2h = \frac{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Supposons que le point m' décrive une section oblique S_1. En désignant par h_1 la perpendiculaire abaissée du point m' sur la tangente en m à la section S_1, et par φ l'angle que le plan de cette section fait avec celui de la section normale menée par cette même tangente, on a évidemment

$$(9). \quad \dots \quad h = h_1 . \cos \varphi.$$

De là résulte

$$d^2h = d^2h_1 \cos \varphi,$$

et, eu égard à l'équation (8),

$$(10). \quad \dots \quad d^2h_1 = \frac{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}{\cos \varphi \sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Soient $d\sigma$ la vitesse du point m' au sortir du lieu m; W_1 la vitesse angulaire simultanée de sa directrice; ρ_1 le rayon de courbure correspondant. On a, d'après la formule établie dans la note du n° 175, page 427,

$$(11). \quad \dots \quad d^2h' = W_1 . d\sigma = \frac{d\sigma^2}{\rho_1}.$$

La combinaison des équations (10) et (11) donne

$$(12). \quad \dots \quad \rho_1 = \frac{d\sigma^2 \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2} . \cos \varphi.$$

S'agit-il maintenant de la section normale S ayant même tangente que la section S_1? En désignant par ρ le rayon de courbure de cette section normale et posant $\varphi = o$, on trouve

$$(13). \quad \dots \quad \rho = \frac{d\sigma^2 \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2},$$

et l'on en déduit, comme on l'a déjà vu,

$$(14). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \rho_1 = \rho . \cos \varphi.$$

Le procédé que nous venons de suivre se simplifie beaucoup lorsqu'on prend le plan des xy parallèle au plan qui touche en m la surface A. Les quantités p et q étant nulles, l'équation (3) du n° 192, page 475, donne immédiatement

$$d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = d^2h.$$

De là résulte, en procédant comme on l'a fait tout à l'heure, à partir de l'équation (9),

$$\rho = \frac{d\sigma^2}{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2},$$

et l'on a, d'ailleurs,

$$\rho_1 = \rho . \cos \varphi.$$

195. *Autrement.* — Soient μ un point mobile assujetti à décrire une section normale; α, 6, γ les angles que la directrice du point μ fait avec les axes coordonnés. En désignant par W la vitesse angulaire de cette directrice, on a, d'après la formule (1) du n° 139, page 360,

$$(1). \quad . \; . \; . \quad W = \sqrt{(d \cos \alpha)^2 + (d \cos 6)^2 + (d \cos \gamma)^2}.$$

Prenons le point μ au sortir du lieu m. La directrice tourne autour de ce lieu et *les vitesses de ses différents points sont toutes dirigées parallèlement à la normale en* m *à la surface* A. Les formules (2) du n° 139, page 360, permettent d'exprimer cette condition en posant

$$(2). \quad . \; . \; . \; d . \cos \alpha = p . d \cos \gamma, \qquad d \cos 6 = q . d \cos \gamma.$$

La combinaison des équations (1) et (2) donne

$$(3). \quad . \; . \; . \; . \quad W = \pm \sqrt{1 + p^2 + q^2} . d \cos \gamma.$$

On a, d'ailleurs,

$$(4). \quad \cos^2\alpha + \cos^2 6 + \cos^2\gamma = 1,$$

et, par suite,

$$(5). \quad \cos\alpha . d\cos\alpha + \cos 6 . d\cos 6 + \cos\gamma . d\cos\gamma = o.$$

De là résulte, en substituant dans l'équation (5) les valeurs fournies par les équations (2) et supprimant le facteur $d\cos\gamma$ devenu commun à tous les termes de la transformée,

$$(6). \quad p\cos\alpha + q\cos 6 + \cos\gamma = o.$$

Différencions l'équation (6) en y considérant comme variables toutes les quantités qu'elle renferme. Cela revient à tenir compte non pas seulement de la rotation de la normale autour du centre de courbure correspondant, mais, en outre, de la rotation de cette droite autour de la directrice du point μ. Cette deuxième rotation n'influe ni sur la position de la directrice, ni sur sa vitesse angulaire actuelle. Elle n'altère donc en rien les différentielles $d\cos\alpha$, $d\cos 6$, $d\cos\gamma$. On peut, en conséquence, substituer dans le résultat de la différentiation les valeurs fournies par les équations (2).

En opérant comme nous venons de l'indiquer, on trouve

$$(7). \quad d\cos\gamma = \frac{dp . \cos\alpha + dq . \cos 6}{1 + p^2 + q^2},$$

et, par suite,

$$(8). \quad W = \frac{dp\cos\alpha + dq\cos 6}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Soit ρ le rayon de courbure de la section normale considérée. On a

$$(9). \quad \rho = \frac{d\sigma}{W} = \frac{d\sigma . \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{dp . \cos\alpha + dq . \cos 6}.$$

Remplaçant les quantités cos α, cos 6, dp, dq par leurs valeurs respectives $\frac{dx}{d\sigma}$, $\frac{dy}{d\sigma}$, $rdx + sdy$, $sdx + tdy$, il vient

$$(10). \quad \ldots \quad \rho = \frac{d\sigma^2 \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}.$$

C'est le résultat obtenu dans les numéros qui précèdent. Il implique toutes les conséquences déjà développées.

196. *Autrement.* — Soient x', y', z' les coordonnées courantes de la normale; x, y, z celles du point où la normale s'appuye sur la surface A. On a, généralement,

$$(1). \quad x' - x = -p(z' - z), \qquad y' - y = -q(z' - z).$$

Lorsque la normale sort du lieu qu'elle occupe, les composantes des vitesses qui animent ses différents points satisfont aux équations différentielles

$$(2). \quad \ldots \left\{ \begin{array}{l} dx' - dx = -p(dz' - dz) - (z' - z)dp, \\ dy' - dy = -q(dz' - dz) - (z' - z)dq. \end{array} \right.$$

Soit m' le point de la normale qui coïncide avec le centre de courbure de la section normale déterminée par le déplacement initial du point (x, y, z). Le point m' se distingue des autres points de la normale en ce que sa vitesse actuelle est *nécessairement* * perpendiculaire à celle du point (x, y, z). Cette condition exige que l'on ait

$$dxdx' + dydy' + dzdz' = o,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3). \quad (dx' - dx)dx + (dy' - dy)dy + (dz' - dz)dz + d\sigma^2 = o.$$

Les équations (1), (2), (3) déterminant d'une manière complète la position du point m', on a d'abord, en vertu des équations (1),

$$(4). \quad \rho = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} = (z' - z)\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

* Nous disons *nécessairement* parce que cette condition subsiste indépendamment de tout glissement de la normale sur elle-même.

ρ étant le rayon de courbure de la section normale que l'on considère.

Substituons dans l'équation (3) les valeurs fournies par les équations (2). Il vient

$$(5).\ (dz - pdx - qdy)(dz' - dz) = (z' - z)[dpdx + dqdy] - d\sigma^2\ {}^*$$

et, comme on a

$$dz = pdx + qdy,$$

il s'ensuit que l'équation (5) se réduit à

$$(6).\ \ldots\ldots\ z' - z = \frac{d\sigma^2}{dp.dx + dq.dy}.$$

La combinaison des équations (4) et (6) donne immédiatement

$$(7).\ \ldots\ldots\ \rho = \frac{d\sigma^2\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{dp.dx + dq.dy}.$$

Cette solution identique avec les précédentes se distingue, nous paraît-il, en ce qu'elle est peut-être plus directe et qu'elle offre, d'ailleurs, une extrême simplicité.

197. Considérons, en particulier, les sections principales. La condition qui les détermine consiste en ce que le point de la normale qui correspond à leur centre de courbure peut être considéré comme dépourvu de toute vitesse actuelle, lorsque la direction suivie par le point (x, y, z) au sortir du lieu m est celle de la tangente à ces mêmes sections. Si l'on annule, en conséquence, les composantes dx', dy' dz', on déduit des équations (2)

$$(8).\ \ldots\ z' - z = -\frac{dx + pdz}{dp} = -\frac{dy + qdz}{dq}.$$

* Cette analyse n'est pas seulement applicable au cas particulier traité dans le texte. Elle s'étend d'elle-même au mouvement d'une droite quelconque dont la direction se trouve déterminée en même temps que les coordonnées de l'un de ses points.

De là résulte, en ce qui concerne les directions des sections principales, l'équation de condition

$$(9). \quad \ldots\ldots \quad \frac{dx + pdz}{rdx + sdy} = \frac{dy + qdz}{sdx + tdy}.$$

Remplaçant dz par sa valeur $pdx + qdy$ et développant, on trouve

$$(10). \quad \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 - \frac{(1+p^2)t - (1+q^2)r}{(1+q^2)s - pqt}\left[\frac{dy}{dx}\right] + \frac{pqr - (1+p^2)s}{(1+q^2)s - pqt} = o.$$

L'équation (10) fait voir que les sections principales sont, en général, au nombre de deux. Elle fournit leurs directions et permet de vérifier qu'elles sont rectangulaires, soit en opérant directement, soit plus simplement en prenant le plan des xy parallèle au plan tangent, ce qui donne

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{t-r}{s}\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = o,$$

et prouve immédiatement la proposition énoncée.

L'équation (8) donne, d'une part,

$$z' - z = -\frac{dx(1+p^2) + pqdy}{rdx + sdy},$$

et, d'autre part,

$$z' - z = -\frac{(1+q^2)dy + pq.dx}{sdx + tdy}.$$

On déduit de la première de ces transformées

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r(z'-z) + 1 + p^2}{pq + s(z'-z)},$$

et, de la seconde,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{pq + s(z'-z)}{1 + q^2 + t(z'-z)}.$$

En égalant entre elles ces deux valeurs du rapport $\frac{dy}{dx}$, on trouve, après réduction,

$$(11).\quad (z'-z)^2 + \frac{(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r}{rt-s^2}(z'-z) + \frac{1+p^2+q^2}{rt-s^2} = 0.$$

Soit R le rayon de courbure de l'une ou l'autre des deux sections principales. L'équation (4) du n° 196, page 484, donne

$$z'-z = \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

De là résulte, en substituant,

$$(12).\quad \frac{R^2}{1+p^2+q^2} + \frac{(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r}{rt-s^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{1+p^2+q^2}{rt-s^2} = 0\ *.$$

Au lieu de procéder, comme nous venons de le faire, on peut opérer sur l'expression générale du rayon de courbure, chercher la différentielle de cette expression et l'égaler à zéro. On détermine ainsi les directions des sections de plus grande et de moindre courbure, l'équation qui les donne n'étant autre que l'équation (10), et celle qu'on en déduit, pour les rayons de courbure principaux, se confondant avec l'équation (12).

Si l'on appliquait à la normale l'équation (2) établie au n° 132, page 345, comme expression de la condition à remplir pour que la vitesse du point central puisse être nulle à l'origine du déplacement considéré, on devrait écrire,

$$(13).\quad \ldots\ldots\ \frac{d(x+pz)}{dp} = \frac{d(y+qz)}{dq},$$

* On voit par cette équation que les rayons de courbure principaux sont ou non de même signe, selon que le binôme $rt-s^2$ est positif ou négatif. Il s'ensuit qu'à partir du point de contact, la surface commence par être située tout entière d'un seul et même côté du plan tangent, ou, au contraire, par être située, partie d'un côté de ce plan et partie de l'autre, selon que le binôme $rt-s^2$ est plus grand ou plus petit que zéro.

ce qui donne

$$dq\,[dx + pdz + zdp] = dp\,(dy + qdz + zdq),$$

et, supprimant le terme $zdpdq$ commun aux deux membres,

$$(14)\ .\ .\ .\ .\ \frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq}.$$

Ce résultat n'est autre que celui exprimé par l'équation (8) et reproduit sous une autre forme dans l'équation (9).

Ombilics.

198. Nous avons trouvé, pour expression générale du rayon de courbure d'une section normale,

$$(1)\ .\ .\ .\ .\ .\ \rho = \frac{d\sigma^2 \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}.$$

Lorsqu'on y remplace la quantité $d\sigma^2$ par sa valeur

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pqdxdy + (1 + q^2)\,dy^2,$$

il vient

$$(2).\ \rho = \frac{(1 + p^2)\,dx^2 + 2pqdxdy + (1 + q^2)\,dy^2}{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

S'agit-il maintenant de l'un de ces points singuliers qu'on désigne sous le nom d'*ombilics* et pour lesquels les sections normales correspondantes ont toutes même courbure? Le second membre de l'équation (2) devant rester le même, indépendamment de toute valeur attribuée au rapport $\frac{dy}{dx}$, il faut que l'équation

$$1 + p^2 + 2pq\frac{dy}{dx} + (1 + q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = c\left[r + 2s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right],$$

ne cesse pas d'être satisfaite lorsqu'on y dispose arbitrairement de la quantité $\frac{dy}{dx}$, et que l'on considère toutes les autres comme constantes.

De là résulte,

$$1 + p^2 = c.r, \qquad pq = c.s, \qquad 1 + q^2 = c.t,$$

et, par suite, élimination faite de la constante quelconque c,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{p^2+1}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{q^2+1}{t}.$$

Concluons que tout point d'une surface est ou n'est pas un *ombilic*, selon que les coordonnées de ce point satisfont ou ne satisfont pas aux équations (3).

On parvient au même résultat, en partant de l'équation (10) du n° 197, et exprimant qu'elle subsiste indépendamment de toute valeur attribuée au rapport $\frac{dy}{dx}$.

LIGNES DE COURBURE.

Lieu des normales menées suivant ces lignes. Arête de rebroussement de ce lieu.

199. Les lignes de courbure étant définies, comme on l'a vu au n° 181, page 447, on reconnaît immédiatement qu'elles satisfont, en chacun de leurs points, à la condition exprimée par l'une quelconque des équations (9), (10), (13) ou (14) du n° 197. Il s'ensuit que chacune de ces mêmes équations est l'équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy.

Supposons qu'on ait déterminé les équations d'une ligne de courbure. Celles de la normale étant, comme au n° 196, page 484,

$$x' - x + p(z' - z) = o, \qquad y' - y + q(z' - z) = o,$$

il suffit d'éliminer les variables x, y, z entre ces équations et

celles de la ligne de courbure que l'on considère pour obtenir l'équation du lieu des normales menées suivant ces lignes.

Imaginons que les coordonnées courantes x', y', z' soient particularisées de manière à s'appliquer exclusivement à l'arête de rebroussement du lieu mentionné ci-dessus. Cette arête est en même temps sur le lieu des centres principaux de courbure, c'est-à-dire sur la surface qu'on obtient en éliminant les variables x, y, z entre l'équation de la surface donnée et les équations (1) et (6) du n° 196. Cette élimination faite, les équations obtenues pour le lieu des normales et pour celui des centres de courbure principaux sont les équations de l'arête de rebroussement cherchée.

CHAPITRE XI.

APPLICATIONS GÉNÉRALES CONCERNANT LES SURFACES.

Courbure des surfaces de révolution.

200. Lorsqu'une droite se déplace en restant normale à une surface, *selon que sa trace sur la surface suit ou ne suit pas la direction d'une section principale*, les vitesses simultanées de ses différents points sont ou non dirigées dans un seul et même plan. Supposons que la direction suivie soit celle d'une section principale : les vitesses des différents points de la normale sont dirigées dans un seul et même plan. Néanmoins, elles peuvent être toutes égales, ou toutes différentes. Elles sont toutes égales dans le cas particulier d'une section principale dont la courbure est nulle à l'origine du déplacement considéré. Elles sont toutes différentes dans le cas général d'une courbure quelconque, et l'on peut appliquer à ce cas général la déduction suivante, déjà indiquée au n° 181, page 447 :

Lorque la normale à une surface sort du lieu qu'elle occupe suivant la direction d'une section principale, elle a un point

dont la vitesse est nulle et réciproquement. Ce point est le centre de courbure de la section principale qui correspond au déplacement considéré.

Cela posé, s'agit-il en particulier d'une surface de révolution? Il est visible que la section méridienne est une section principale. Il est visible aussi que la direction perpendiculaire à la section méridienne est fournie par le parallèle, et que, pour cette direction, le point de la normale dont la vitesse est nulle est précisément celui où la normale vient couper l'axe de révolution. Concluons que

Dans les surfaces de révolution les rayons de courbure principaux sont respectivement, l'un celui de la section méridienne au point considéré, l'autre la partie de la normale * *comprise entre ce même point et l'axe de révolution.*

On voit aussi, sans aucune difficulté, que

Les lignes de courbure sont déterminées, en chaque point, par le méridien et le parallèle correspondants.

Courbure des surfaces développables.

201. S'agit-il d'abord des surfaces cylindriques? Les sections principales sont déterminées, en chaque point, par la section droite et par la génératrice rectiligne correspondantes. Ici donc aucune difficulté. L'une des courbures principales est nulle. L'autre est celle de la section droite au point considéré. Les lignes de courbure se confondent et coïncident avec les sections principales

* La normale à la surface se confond, en chaque point, avec la normale à la section méridienne correspondante.

S'agit-il ensuite d'une surface quelconque développable et non cylindrique? On peut, en général, la considérer comme le lieu des tangentes à son arête de rebroussement et partir des données suivantes qu'il suffit d'énoncer.

Lorsqu'une droite assujettie à décrire une surface développable sort du lieu qu'elle occupe, elle reste tangente à l'arête de rebroussement et son état de mouvement se résout en une rotation autour du point où elle touche cette arête. La vitesse de ce point étant supposée nulle, celles des autres points sont toutes perpendiculaires à la génératrice et situées dans un même plan. Il suit de là qu'il n'existe qu'un seul et même plan tangent pour tous les points d'une même génératrice, et que ce plan coïncide avec le plan osculateur de l'arête de rebroussement.

Cela posé, voici les conséquences immédiates :

Les sections principales sont dirigées, pour chaque point, l'une suivant la génératrice passant par ce point, l'autre perpendiculairement à cette même génératrice.

L'une des courbures principales est nulle. L'autre varie généralement le long de la génératrice.

Les lignes de courbure sont, d'une part, les génératrices rectilignes, d'autre part, les trajectoires orthogonales de ces mêmes génératrices.

Soient m et o deux points d'une même génératrice, l'un quelconque, l'autre situé sur l'arête de rebroussement. Lorsque la génératrice om sort du lieu qu'elle occupe, elle tourne autour du point o avec une vitesse W et communique au point m une vitesse actuelle V. De là résulte, en premier lieu,

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad V = W.h,$$

h étant la distance du point m au point o.

Soit W′ la vitesse angulaire simultanée du plan qui touche la surface le long de la génératrice om et qui coïncide en o avec le plan osculateur de l'arête de rebroussement. En désignant par R le rayon de courbure de la section principale faite en m per-

pendiculairement à la génératrice, on peut écrire immédiatement

$$(2).\quad \dots \quad R = \frac{V}{W'} = \frac{W}{W'} h = \frac{\rho'}{\rho} . h,$$

ρ et ρ' étant les rayons de première et deuxième courbure qui correspondent au point o de l'arête de rebroussement.

L'équation (2) montre que le long d'une même génératrice, le rayon principal R croît proportionnellement à la distance comprise sur cette génératrice entre l'arête de rebroussement et le point que l'on considère. Elle suffit, d'ailleurs, pour résoudre complétement la question proposée.

Si l'on pose $h = \rho$, il en résulte

$$R = \rho'.$$

De là, l'énoncé suivant :

Soit S *une ligne quelconque à double courbure ;* A *la surface développable dont la ligne* S *est l'arête de rebroussement ;* o *un point de cette arête*; om *la tangente en ce point;* S_m *la section faite dans la surface* A *par le point* m, *perpendiculairement à la droite* om. *Cela posé, si la distance* om *est prise égale au rayon de première courbure de la ligne* S *au point* o, *l'égalité subsiste entre la deuxième courbure de la ligne* S *en ce même point et la courbure en* m *de la section principale* S_m.

On observera que, dans le cas des surfaces développables, il n'existe en chaque point, pour toutes les directions, qu'une seule et même caractéristique du plan tangent, la génératrice rectiligne passant par ce point.

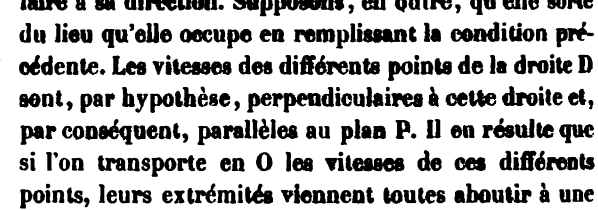
Courbure des surfaces réglées gauches.

202. Soit D la génératrice rectiligne d'une surface gauche quelconque A. Si, dans le déplacement de la génératrice D, on assujettit un de ses points à décrire la trajectoire orthogonale des

positions qu'elle prend successivement, ses autres points remplissent en même temps cette même condition *. On sait, en effet, que les vitesses simultanées des différents points d'une droite mobile sont, à la fois, toutes perpendiculaires ou toutes obliques à cette droite.

Supposons la droite D projetée en O sur un plan P perpendiculaire à sa direction. Supposons, en outre, qu'elle sorte du lieu qu'elle occupe en remplissant la condition précédente. Les vitesses des différents points de la droite D sont, par hypothèse, perpendiculaires à cette droite et, par conséquent, parallèles au plan P. Il en résulte que si l'on transporte en O les vitesses de ces différents points, leurs extrémités viennent toutes aboutir à une même droite BB′ située dans le plan P. (1re partie, Théorème VII, page 45). Il en résulte aussi que les vitesses ainsi transportées sont les projections sur le plan P de ces mêmes vitesses considérées dans leurs vraies positions.

Fig. 78.



On sait que les vitesses des différents points de la droite D, lorsqu'on les prend dans leurs vraies positions, ont pour lieu de leurs extrémités une droite oblique sur la droite D. (1re partie, Théorème VI, corollaire 2, page 45.) Désignons par Δ cette deuxième droite et observons qu'elle est située dans le plan mené par BB′ perpendiculairement au plan P.

De là résultent immédiatement les conséquences suivantes.

Il est un point de la droite D dont la vitesse représentée par la perpendiculaire Oa abaissée du point O sur la droite BB′ est moindre que toutes les autres. Ce point dit *point central*, d'après M. Chasles, est situé sur la plus courte distance des droites D, Δ.

Soit O le point central ainsi déterminé. L'état de mouvement de la droite D consiste en une translation u représentée par la vitesse Oa du point central et en une rotation ω établie autour de la droite Oa.

* Cette remarque s'applique à toutes les surfaces réglées. Il en résulte que, dans ces surfaces, il y a toujours équidistance entre deux quelconques des trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes.

Soient m un point quelconque de la droite D; On la vitessé actuelle de ce point.

Considérons les deux sections normales faites en m dans la surface A, l'une suivant la droite Om, l'autre perpendiculairement à cette droite, et désignons celle-ci par S_m. Considérons, en même temps les tangentes réciproques déterminées par ces deux sections. Celle de ces tangentes dont le point de contact glisse le long de la génératrice Om tourne autour de cette génératrice, comme la droite On tourne autour du point O dans le plan P. Or, en désignant par h la distance Om comprise entre le point m et le point central O, on a

(1). . . . . $an = h.\omega$,

et, dans cette équation, la quantité ω doit être considérée comme constante.

De là résulte, en prenant égale à l'unité la vitesse du point m sur la génératrice Om, et en représentant par nn' la vitesse correspondante du point n sur BB',

$$nn' = \omega . dh = \omega.$$

Par les points n, n' menons les droites nb', $n'b'$, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à On; désignons, d'ailleurs, par ε l'angle nOa et son égal $b'nn'$. On a, comme expression de la vitesse angulaire des tangentes réciproques considérées,

$$\frac{nb'}{On} = \frac{nn'.\cos\varepsilon}{On} = \frac{\omega}{u}\cos^2\varepsilon \text{ *}.$$

Soit α l'angle que fait avec la section S_m l'une des sections prin-

* La longueur Oa représentant, par hypothèse, la vitesse u, on a

$$Oa = u = On.\cos\varepsilon,$$

et, par suite,

$$\frac{1}{On} = \frac{\cos\varepsilon}{u}.$$

cipales passant par le point m. La formule (7) du n° 176, page 437, donne

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\overline{N}_x}{\overline{W}_x - \overline{W}_y}.$$

Or, ici l'on a

$$\overset{\bullet}{N}_x = \frac{\omega}{u} \cos^2 \varepsilon, \qquad \overline{W}_y = o, \qquad \overline{W}_x = \frac{1}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure de la section S_m. Il vient donc, en substituant,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = 2\, \frac{\omega}{u} \,.\, \rho \cos^2 \varepsilon.$$

Soient R, R′ les deux rayons de courbure principaux. On a, conformément aux équations (10) et (11) du n° 176, pages 438 et 439,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{\cos^2 \alpha}{R} + \frac{\sin^2 \alpha}{R'}, \\ 0 &= \frac{\sin^2 \alpha}{R} + \frac{\cos^2 \alpha}{R'}, \end{aligned} \right.$$

et, par suite, (α étant l'angle que la section normale dirigée suivant la génératrice rectiligne fait avec la section principale dont le rayon de courbure est R′),

$$(4). \quad . \qquad \left\{ \begin{aligned} R &= \rho\,[1 - \operatorname{tg}^2 \alpha] = 2\rho\, \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} - 1}{\operatorname{tg}^2 2\alpha}, \\ R' &= \rho\,[1 - \cot^2 \alpha] = \frac{2\rho}{1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}. \end{aligned} \right.$$

Tout est ainsi déterminé en fonction du rayon ρ de la section S_m.

On observera qu'en élevant au carré les équations (3), puis les soustrayant membre à membre, on trouve, après réduction,

$$\frac{1}{\rho^2} = \left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}\right] \cos 2\alpha.$$

203. En divisant membre à membre les équations (4) et donnant un même signe aux deux rayons de courbure principaux, on trouve

$$(5). \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{R}{R'}}.$$

On sait, d'ailleurs, que l'angle α est celui que la section normale dirigée suivant la génératrice rectiligne fait avec la section principale dont le rayon de courbure est représenté par R'.

Multipliées, membre à membre, les équations (4) donnent

$$(6). \quad \ldots\ldots \quad RR' = -\frac{4\rho^2}{\operatorname{tg}^2 2\alpha},$$

et, eu égard à l'équation (2),

$$(7). \quad \ldots\ldots \quad RR' = -\frac{u^2}{\omega^2 \cos^4 \varepsilon}.$$

On a trouvé précédemment

$$N_x = \frac{\omega}{u} \cos^2 \varepsilon.$$

On peut donc écrire

$$(8). \quad \ldots\ldots \quad (N_x)^2 = -\frac{1}{RR'}.$$

L'équation (8) exprime la propriété suivante :

Lorsque la normale à une surface gauche sort du lieu qu'elle occupe, suivant une génératrice rectiligne, et avec une vitesse de translation égale à l'unité, le carré de sa rotation autour de cette génératrice a pour valeur inverse le produit des rayons de courbure principaux correspondants.

Désignons par h' la distance comprise entre le point central O et le point de la droite D où le plan tangent à la surface A fait un

angle de 45° avec le plan tangent au point central. On a, généralement,

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{an}{Oa} = \frac{an}{u} = \frac{\omega}{u} . h.$$

De là résulte, en faisant $\varepsilon = 45°$ et remplaçant h par h',

$$\frac{u}{\omega} = h',$$

et, par suite,

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{h}{h'} \cdot$$

On a, d'ailleurs,

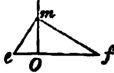
$$\frac{1}{\cos^2 \varepsilon} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon = \frac{h'^2 + h^2}{h'^2} \cdot$$

Substituant cette valeur et remplaçant $\frac{u}{\omega}$ par h' dans l'équation (7), on trouve

(9). . . . . . $\mathrm{RR}' = -\left[\frac{h^2 + h'^2}{h'}\right]^2 \cdot$

Soient $\mathrm{O}k$ la génératrice, et ef une perpendiculaire à cette génératrice menée par le point central O. Prenons Oe égal à h', joignons le point e au point considéré m, et, sur em, élevons en m la perpendiculaire mf. On a ainsi,

Fig. 79.



$$\overline{em}^2 = h^2 + h'^2 = h'.ef.$$

Il vient donc

$$ef = \frac{h^2 + h'^2}{h'},$$

et, par conséquent,

(10). . . . . $\mathrm{RR}' = -(ef)^2.$

Les équations (9) et (10) expriment plusieurs propriétés cu-

rieuses des surfaces gauches. Ces propriétés peuvent s'énoncer comme il suit :

1° *Les rayons de courbure principaux en un point quelconque d'une surface gauche, sont de signes contraires ;*

2° *Le produit des rayons de courbure principaux est le même en deux points situés sur une même génératrice à égale distance du point central ;*

3° *Le produit des rayons de courbure principaux au point central d'une génératrice quelconque est égal au carré de la distance comprise sur cette génératrice entre le point central et le point où le plan tangent fait un angle de 45° avec le plan tangent au point central ;*

4° *Si l'on substitue au point central le point où le plan tangent fait un angle de 45° avec le plan tangent au point central, le produit des rayons de courbure principaux est quatre fois plus grand ;*

5° *Le produit des rayons de courbure principaux, en un point quelconque d'une surface gauche, est égal au carré de l'hypoténuse du triangle rectangle ayant pour hauteur la distance du point donné au point central de la génératrice correspondante, et, pour segment adjacent à cette hauteur, la distance de ce même point central au point de la génératrice où le plan tangent fait un angle de 45° avec le plan tangent au point central.*

204. On a directement (voir la figure 78, page 494)

$$\cos \varepsilon = \frac{Oa}{On} = \frac{u}{V},$$

V étant la vitesse totale du point m.

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression de la quantité $\overline{N}_x$ et dans l'équation (7), il vient

$$(11) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad \overline{N}_x = \frac{\omega u}{V^2},$$

et

$$RR' = -\frac{V^4}{\omega^2 u^2}.$$

De là résulte, en ne considérant que les valeurs absolues des rayons de courbure principaux,

$$(12). \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\sqrt{RR'}} = \frac{\omega u}{V^2} = \overline{N}_x.$$

Soit m un point d'une surface A; R, R' les rayons de courbure principaux correspondants. On peut convenir, avec M. Gauss, de considérer la quantité $\frac{1}{\sqrt{RR'}}$ comme exprimant la courbure de la surface A au point m. Cela posé, il est aisé de voir que les équations (8) et (12) expriment, par rapport aux surfaces réglées gauches, les deux théorèmes énoncés comme il suit par M. Ossian Bonnet*:

1° « La courbure dans une surface gauche est égale à l'angle » des plans tangents au point considéré et au point infiniment » voisin appartenant à la même génératrice rectiligne divisée par » la distance de ces points. »

2° « La courbure de la surface varie le long d'une génératrice » rectiligne dans le rapport inverse du carré de la perpendiculaire » menée à cette génératrice et terminée à la génératrice infini- » ment voisine. »

Si l'on dégage ces énoncés de la considération des infiniment petits et qu'on les traduise en langage ordinaire, on peut les formuler de la manière suivante :

1° *La courbure dans une surface gauche est égale au module de la vitesse angulaire qui anime la normale dans son déplacement suivant la génératrice rectiligne;*

2° *La courbure de la surface varie le long d'une génératrice*

* *Journal de l'École polytechnique*, 32me cahier, tome XIX. (1848), pages 18 et 61.

rectiligne dans le rapport inverse du carré de la vitesse de circulation communiquée au point que l'on considère par le déplacement de cette même génératrice.

Appliquons au point central O la formule (11). Il vient, en faisant $V = u$,

$$\overline{N}_x = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{h'},$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\sqrt{RR'}} = \frac{1}{h'}.$$

Cette dernière formule comporte l'énoncé suivant :

La courbure au point central d'une génératrice rectiligne est égale à la valeur inverse de la distance comprise, sur cette génératrice, entre ce même point et celui où le plan tangent fait un angle de 45° avec le plan tangent au point central.

Remarque. — On observera que l'équation fondamentale

$$(\overline{N}_x)^2 = -\frac{1}{RR'}$$

peut s'établir *à priori* comme conséquence immédiate de l'équation (14) du n° 176, page 459. Il suffit pour cela d'observer que l'une des courbures exprimées par $\frac{1}{\rho}$ ou par $\frac{1}{\rho'}$ pour le cas général, devient nulle dans le cas particulier d'un déplacement effectué le long d'une génératrice rectiligne.

Théorie des surfaces enveloppes.

205. Étant donnée l'équation

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad F(x, y, z, \alpha) = 0,$$

elle représente une surface qui change, en général, de forme et

de position en même temps que l'on fait varier le paramètre α. Soient A cette surface; μ un point assujetti à s'y mouvoir; x, y, z les coordonnées de ce point.

La direction suivie par le point μ à un instant quelconque est déterminée par les valeurs correspondantes des quantités dx, dy, dz et celles-ci satisfont à l'équation différentielle

$$(2). \quad . \quad . \quad . \left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF}{dz}\right) dz = o,$$

ou bien à cette autre équation

$$(3). \quad . \quad \left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy}\right) dy + \left(\frac{dF}{dz}\right) dz + \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) d\alpha = o,$$

selon que la surface A persiste dans son état actuel ou qu'au contraire elle passe de cet état à un autre.

Posons

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = o,$$

La combinaison des équations (1) et (4) donne, en général, pour chaque valeur du paramètre α une section déterminée de la surface A. Soit S cette section. Elle est caractérisée par la condition qu'elle remplit de rendre l'équation (3) identique à l'équation (2).

Supposons le point μ assujetti à décrire la section S et désignons par m le lieu qu'il occupe sur cette ligne à l'instant que l'on considère. *L'identité des équations* (2) *et* (3) *montre que la vitesse du point* μ, *au sortir du lieu* m, *ne subit aucune modification par suite du changement d'état de la surface* A.

Étant donnécs les équations (1) et (4), elles déterminent la ligne S, et celle-ci change, en général, de forme et de position, en même temps que l'on fait varier le paramètre α. Le point μ étant astreint, par hypothèse, à rester sur la ligne S, la direction qu'il

suit à un instant quelconque est déterminée par l'équation (2) et, en outre, par l'équation différentielle

$$(5). \quad . \quad . \quad \left(\frac{d^2F}{d\alpha dx}\right) dx + \left(\frac{d^2F}{d\alpha dy}\right) dy + \left(\frac{d^2F}{d\alpha dz}\right) dz = o,$$

ou par cette autre équation

$$(6). \quad \left(\frac{d^2F}{d\alpha dx}\right) dx + \left(\frac{d^2F}{d\alpha dy}\right) dy + \left(\frac{d^2F}{d\alpha dz}\right) dz + \left(\frac{d^2F}{d\alpha^2}\right) d\alpha = o,$$

selon que la ligne S persiste dans son état actuel ou qu'au contraire elle passe de cet état à un autre.

Posons

$$(7). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left(\frac{d^2F}{d\alpha^2}\right) = o.$$

La combinaison des équations (1), (4), (7) donne, en général, pour chaque valeur du paramètre α un point déterminé. Soit m ce point. Il est caractérisé par la condition qu'il remplit de rendre l'équation (6) identique à l'équation (5). *L'identité de ces équations montre, d'ailleurs, que la vitesse du point* μ, *au sortir du lieu* m, *ne subit aucune modification par suite du changement d'état de la ligne* S.

Cela posé, voici les conséquences.

Reprenons les équations simultanées

$$(8). \quad . \quad . \quad . \quad F(x, y, z, \alpha) = o, \quad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = o.$$

La ligne qu'elles déterminent et que nous avons désignée par S a reçu le nom de *caractéristique.*

Le lieu des *caractéristiques* s'obtient en éliminant le paramètre α entre les deux équations (8). Cela revient à dire que ce lieu est représenté par l'équation

$$(9). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad F(x, y, z, \alpha) = o,$$

le paramètre α étant une fonction des variables x, y, z déterminée par l'équation de condition

$$(10). \quad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = o.$$

Soit A' le lieu dont il s'agit. Il est l'*enveloppe* des surfaces A. On voit d'ailleurs aisément que la surface A' touche chacune des surfaces A en tous les points de la caractéristique qui leur est commune. Il est clair, en effet, que si le plan tangent, en un point d'une ligne S, est déterminé, pour la surface correspondante A, par l'ensemble des équations (2) et (4), il l'est en même temps et de la même manière, pour la surface A', par la différentielle de l'équation (9).

Aux équations (9) et (10) ajoutons l'équation

$$(11). \quad \left(\frac{d^2F}{d\alpha^2}\right) = o.$$

Le point déterminé par les équations (9), (10), (11) est celui que nous avons désigné par m et qui jouit par rapport au point μ de la propriété formulée plus haut en italiques.

Le lieu des points m s'obtient en substituant dans les équations (9) et (10) la valeur déduite pour α de l'équation (11). Ce lieu est évidemment l'*enveloppe des caractéristiques*. Il prend, par rapport à la surface A' sur laquelle il est situé, le nom d'*arête de rebroussement*. On vérifie, sans la moindre difficulté, que cette arête touche chacune des *caractéristiques* au point qui leur est commun de part et d'autre.

On observera que les surfaces A peuvent, en certains cas, n'avoir pas d'*enveloppe*, et que, dans les cas où elles en ont une, cette enveloppe peut ne point avoir d'*arête de rebroussement*. Lorsque l'enveloppe n'a point d'arête de rebroussement, la caractéristique prise pour génératrice de cette surface sort du lieu qu'elle occupe sans qu'aucun de ses points puisse être considéré comme dépourvu de toute vitesse actuelle. Néanmoins il arrive, en général, pour l'un des points de la caractéristique que sa

vitesse est un *minimum*. La suite des points qui remplissent cette condition, pour les positions successives de la caractéristique, forme sur l'enveloppe une ligne particulière nommée *ligne de striction*.

206. *Autrement*. — Sans rien changer à ce qui précède, proposons-nous de déterminer directement les points de la surface A qu'on peut considérer comme fixes, à l'instant précis où cette surface sort d'un état quelconque pris, comme on voudra, parmi ceux qu'elle affecte successivement. Ces points se distinguent des autres en ce que leurs coordonnées x, y, z doivent satisfaire à l'équation (3) lorsqu'on y annule en même temps chacune des trois vitesses dx, dy, dz. De là résulte immédiatement l'équation (4) et les déductions suivantes :

Le lieu des points cherchés est représenté par l'ensemble des équations (1) *et* (4). *Il constitue la ligne* S, *désignée sous le nom de* CARACTÉRISTIQUE.

Le lieu des caractéristiques est représenté par l'équation (1) *où le paramètre* α, *déterminé par l'équation* (4), *devient fonction des variables* x, y, z. *Ce lieu constitue la surface* A', *désignée, par rapport aux surfaces* A, *sous le nom d'*ENVELOPPE.

*Il est visible que l'*ENVELOPPE A' *touche chacune des surfaces* A *en tous les points de la* CARACTÉRISTIQUE *qui leur est commune.*

Opérons sur la ligne S déterminée par les équations (1) et (4), comme nous venons de le faire sur la surface A. S'il est un point de la ligne S qui puisse être considéré comme fixe, tandis que cette ligne sort d'un état quelconque pris, comme on voudra, parmi ceux qu'elle affecte successivement, ce point se distingue des autres en ce que ses coordonnées x, y, z doivent satisfaire à l'équation (6) lorsqu'on y annule en même temps chacune des trois vitesses dx, dy, dz. De là résulte immédiatement l'équation (7) et les déductions suivantes :

Le point cherché, désigné par m, *est déterminé pour chaque valeur du paramètre* α, *par l'ensemble des équations* (1), (4), (7).

Le lieu des points m *est représenté par les équations* (1) *et* (4) *où le paramètre* α, *déterminé par l'équation* (7), *devient fonction des variables* x, y, z. *Ce lieu constitue, par rapport à la surface* A', *sur laquelle il est situé, la ligne particulière désignée sous le nom d'*ARÊTE DE REBROUSSEMENT.

*Il est visible que l'*ARÊTE DE REBROUSSEMENT *touche chacune des* CARACTÉRISTIQUES *au point qui leur est commun, de part et d'autre.*

Caractères généraux des surfaces développables.

207. On désigne sous le nom de *surfaces développables* les surfaces qui peuvent s'appliquer sur un plan, point par point, sans déchirure ni duplicature, autrement dit, sans extension ni contraction d'aucune des lignes tracées sur ces surfaces. Cette condition est évidemment remplie par les surfaces réglées qui n'ont pour tous les points d'une même génératrice qu'un seul et même plan tangent. Il s'ensuit, en effet, que si l'on assujettit le plan tangent à tourner autour de la génératrice rectiligne, tandis que celle-ci se meut de manière à décrire la surface considérée, cette même génératrice peut être regardée comme se déplaçant dans un plan qui tourne autour d'elle, et dont le mouvement n'altère, en conséquence, ni les vitesses de ses différents points, ni celles des points qui se mouvraient sur elle, ni, par conséquent, non plus les longueurs décrites en vertu de ces mêmes vitesses.

Soit A une surface réglée et développable. Soient en même temps S, S' deux lignes quelconques tracées sur cette surface. Supposons la surface A développée sur un plan P. On peut se tenir au résultat de cette première opération; on peut aussi, et cela d'une infinité de manières, se servir du plan P pour reprendre le développement effectué et le reporter, comme on veut, soit sur la surface A, soit sur une autre surface quelconque réglée et développable. Dans tous les cas, désignons par Σ, Σ' les transformées des lignes S, S'.

L'observation que nous avons faite en commençant, implique évidemment les déductions suivantes :

Quelles que soient les transformées Σ, Σ', *elles ont respectivement mêmes longueurs que les lignes données* S, S'.

Lorsque les lignes S, S' *se coupent sous un angle quelconque, leurs transformées* Σ, Σ' *se coupent sous ce même angle.*

Lorsque la ligne S *se ferme en revenant sur elle-même, de manière à couper deux fois les mêmes génératrices rectilignes, la transformée* Σ *remplit ces mêmes conditions. On voit, de plus, que les aires circonscrites, de part et d'autre, sur les surfaces correspondantes sont superposables par voie de développement et d'enveloppement. Elles ont donc nécessairement même étendue.*

208. Reportons-nous aux notations du n° 192, page 475, et supposons qu'il s'agisse d'une surface A, réglée et développable.

La direction du plan qui touche la surface A, en un point quelconque m, est déterminée par les valeurs que prennent, en ce point, les dérivées partielles p et q. On sait, d'ailleurs, que ce plan reste le même pour toute l'étendue de la génératrice rectiligne menée par le point m. Il s'ensuit que l'on a, *pour tous les points situés sur une même génératrice quelconque rectiligne*,

$$p = \text{cons}^{\text{te}}, \qquad q = \text{cons}^{\text{te}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$dp = rdx + sdy = o, \qquad dq = sdx + tdy = o.$$

De là résulte,

$$(1) \ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{r}{s} = -\frac{s}{t},$$

et, par suite,

$$(2) \ldots\ldots\ldots \quad rt - s^2 = o.$$

L'équation (1), où l'on peut remplacer les vitesses dx et dy par les segments $x' - x$, et $y' - y$ qui leur correspondent respectivement, est l'équation de la génératrice menée par le point m et projetée dans le plan des xy. Cela revient à dire, en d'autres

termes, qu'elle est l'*équation* différentielle de la projection de l'arête de rebroussement.

L'équation (2) subsiste pour tous les points de la surface A. *Elle est l'équation de condition qui caractérise, en général, les surfaces développables.*

Procédons autrement. Lorsque la normale à la surface A se déplace le long d'une même génératrice rectiligne, elle conserve une seule et même direction. Il s'ensuit que cette génératrice constitue une des lignes de courbure de la surface A et que l'un des rayons de courbure principaux doit se présenter constamment sous la forme symbolique $\frac{1}{0}$.

Cela posé, il suffit de se reporter à l'équation (12) du n° 197, page 487, pour reconnaître immédiatement qu'on doit avoir, en chacun des points de la surface A,

$$rt - s^2 = o.$$

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, il y a, en chaque point, une des sections principales dont la courbure est nulle. Il suit de là que la ligne de courbure correspondante est droite et qu'en conséquence la surface A est une surface réglée. Elle ne peut, d'ailleurs, être gauche, puisqu'en ce cas les génératrices ne correspondent pas aux directions des sections principales. Il faut donc nécessairement que la surface A soit réglée et développable.

Nous verrons plus loin qu'en dehors des surfaces réglées, il n'en est aucune qui soit développable d'après la définition donnée précédemment.

CHAPITRE XII.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES LIGNES GÉODÉSIQUES.

Définition et propriétés fondamentales.

209. On désigne sous le nom de *lignes géodésiques* les lignes d'une surface en chaque point desquelles le plan osculateur est normal à cette surface. Une propriété remarquable caractérise les lignes géodésiques. Elle consiste en ce que ces lignes sont celles qui déterminent, sur la surface, le plus court chemin d'un point à un autre. Démontrons d'abord cette propriété.

Soient S une ligne quelconque; *m* un point supposé mobile sur la ligne S; D une droite entraînée par le point *m* et assujettie à rester perpendiculaire à la ligne S; *n* un point supposé fixe sur la droite D et, par conséquent, tel que la distance *mn* demeure invariable.

Si nous considérons le point *m* au sortir d'une position quelconque déterminée, il est visible qu'il communique sa vitesse actuelle à tous les points de la droite D et que ceux-ci sont animés, en outre, de la vitesse qu'ils empruntent à la rotation de cette droite autour du point *m*. Les vitesses qui se transmettent ainsi au point *n* sont toutes normales à la droite D. Il en est donc de même de leur résultante. De là se déduit, en premier lieu, la conclusion suivante :

Quelle que soit la rotation de la droite D *autour de la tangente en* m *à la ligne* S, *le lieu des points* n *est une trajectoire orthogonale des positions successives de la droite* D.

Considérons la droite D dans l'ensemble de ses positions successives. Cela revient à considérer une suite continue de droites D, toutes perpendiculaires à la ligne S, ou, plus simplement encore, la surface réglée que ces droites déterminent comme lieu de leurs positions simultanées. Soit B cette surface.

Imaginons que les droites D se meuvent toutes à la fois, chacune d'elles tournant autour de son point *m*, où elle coupe la ligne S, et restant perpendiculaire à la tangente en ce point. La surface B changera de position et, généralement aussi, de forme. Dans tous les cas la déduction précédente ne cessera pas d'être applicable. Si donc on désigne par S′ le lieu d'une suite continue de points *m*′ pris sur les droites D, d'un même côté et à égale distance de la ligne S, il est visible que la ligne S′ sera et restera une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes de la surface B.

Concevons qu'à un instant quelconque, on fixe chacun des points *m*′ dans la position qu'il occupe à ce même instant. Concevons, en outre, que chacune des droites D continue à tourner autour de son point *m*′ comme elle tournait d'abord autour de son point *m*, c'est-à-dire en restant perpendiculaire en *m*′ à la ligne S′, au lieu de l'être en *m* à la ligne S. La déduction précédente ne cessera pas encore d'être applicable. Si donc on désigne par S″ une suite continue de points *m*″ pris sur les droites D au delà et à égale distance de la ligne S′, il est visible que la ligne S″ sera et restera une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes de la surface B.

Cela posé, considérons la ligne S comme étant tracée sur une surface quelconque A, et représentons-nous, pour chaque point de cette ligne, la ligne géodésique issue de ce point perpendiculairement à la ligne S. Si ces lignes géodésiques sont toutes décrites simultanément par autant de points partant ensemble de la ligne S et animés d'une vitesse *égale en grandeur* pour chacun d'eux, il est aisé de voir que les directrices de ces points réalisent les conditions supposées remplies tout à l'heure par les droites D *.

* Les lignes géodésiques sont caractérisées par la condition qu'elles remplissent d'avoir, en chaque point, leur plan osculateur normal à la surface A. Il s'ensuit que la directrice du point qui décrit une ligne géodésique tourne dans le plan mené par la normale à la surface et par la tangente à cette ligne. L'axe qui correspond à cette rotation est dirigé, en conséquence, suivant la tangente menée par le point décrivant perpendiculairement à la ligne décrite.

La seule différence consiste en ce qu'au lieu de laisser entre elles certains intervalles, les lignes S, S', S'', etc., se succèdent d'une manière continue, chacune d'elles étant le lieu des centres autour desquels les directrices des points décrivants tournent toutes ensemble à un certain instant. Les vitesses des points décrivants sont par hypothèse toutes égales en grandeur. Il s'ensuit que les points qui deviennent à un instant quelconque les centres simultanés de rotation des directrices sont situés primitivement sur ces droites à distance égale de la ligne S. C'est, d'ailleurs, lorsqu'ils s'appliquent sur la surface A qu'ils deviennent centres de rotation et qu'ils se fixent dans la position qu'ils occupent. Il suit de là que le lieu déterminé par leur ensemble est une trajectoire orthogonale des lignes géodésiques qu'ils décrivent, et, en outre, que les arcs de ces lignes compris entre cette trajectoire et la ligne S sont tous égaux entre eux.

De là résulte un théorème important, démontré, pensons-nous, pour la première fois par M. Gauss et formulé, comme il suit, par M. Ossian Bonnet *.

« Si sur une surface on conçoit une courbe quelconque et que,
» des différents points de cette courbe, l'on mène à angle droit
» une série de lignes géodésiques de même longueur, la courbe
» qui joindra les extrémités de ces lignes coupera chacune d'elles
» à angle droit. »

Ce théorème s'étend de lui-même au cas d'une suite continue de lignes géodésiques toutes issues d'un même point. On le reconnaît, soit en considérant ce point comme un lieu de concours et renversant ainsi les termes de la question, soit en répétant pour ce cas la démonstration précédente, soit encore en prenant une courbe fermée pour lieu de départ des lignes géodésiques et resserrant cette courbe de manière à n'en faire plus qu'un point.

210. Soient *m* et *n* deux points situés sur une surface A. Parmi les lignes géodésiques issues du point *m*, il en est une qui passe par le point *n*; soit *man* cette ligne. Si nous considérons les trajectoires orthogonales des lignes géodésiques issues du point *m* et

* Voir le mémoire déjà cité, page 27.

une courbe quelconque *ma'n* tracée sur la surface A par les points *m* et *n*, il est évident que les intersections de la courbe *ma'n* avec ces trajectoires ne se feront pas toujours à angle droit.

Cela posé, concevons deux points mobiles μ,μ' partant ensemble du lieu *m*, et assujettis à décrire simultanément, l'un la courbe *man*, l'autre la courbe *ma'n*, le premier avec une vitesse *v* constante en grandeur, le second avec une vitesse *u*.

Fig. 80.

Décomposons la vitesse *u* en deux autres, l'une *u'* dirigée normalement à celle des trajectoires orthogonales que le point μ' franchit à l'instant que l'on considère, l'autre *u''* dirigée suivant la tangente en μ' à cette même trajectoire.

La vitesse *u* pouvant être quelconque, supposons-la déterminée de manière à ce que le point μ' se trouve à chaque instant sur celle des trajectoires orthogonales que le point μ rencontre à ce même instant. Pour qu'il en soit ainsi, alors que l'écart qui s'établit entre les trajectoires orthogonales successives commence en chaque point avec une égale vitesse, il faut nécessairement et évidemment que la composante *u'* de la vitesse *u* soit constamment égale à la vitesse *v*.

La composante *u'* étant et restant égale à la vitesse *v*, il s'ensuit que partout où la courbe *ma'n* coupe obliquement les trajectoires orthogonales mentionnées ci-dessus, la vitesse *u* l'emporte sur la vitesse *v*, et que, nulle part, d'ailleurs, elle ne peut être moindre *. Ce n'est donc qu'en vertu d'une vitesse toujours supérieure, ou tantôt égale et tantôt supérieure à celle du point μ, que le point μ' peut décrire la courbe *ma'n* en même temps que le point μ décrit la courbe *man*. De là résultent immédiatement les conséquences suivantes :

1° *La courbe* man *est plus courte que la courbe* ma'n.

2° *Le plus court chemin d'un point à un autre sur une surface est la ligne géodésique passant par ces deux points.*

* On a généralement $u = \sqrt{u'^2 + u''^2} = \sqrt{v^2 + u''^2}$. La vitesse *u* ne peut donc être inférieure à *v*, et elle est nécessairement plus grande pour tous les points où l'obliquité des intersections implique l'existence de la composante *u''*.

Courbure géodésique.

211. Soient une surface A ; S′ une courbe tracée sur cette surface ; m un point *quelconque* de la courbe S′ ; P le plan qui touche en m la surface A ; S″ la projection orthogonale de la ligne S′ sur le plan P.

Considérons la courbure affectée en m par la ligne S″. Elle est évidemment nulle lorsque la courbe S′ est une ligne géodésique. Dans tout autre cas elle est, en général, plus ou moins prononcée, et elle constitue, par rapport à la ligne S′, une courbure particulière. Cette courbure est désignée sous le nom de *courbure géodésique*. De là résulte, en conséquence, la définition suivante :

La courbure géodésique *d'une courbe quelconque tracée sur une surface est la courbure affectée, pour le point que l'on considère, par la projection de la courbe sur le plan qui touche la surface en ce même point.*

Soit μ' un point mobile, assujetti à décrire la ligne S′, *animé d'une vitesse égale à l'unité*, et sortant du lieu m à l'instant que l'on considère. Désignons par N la normale en m à la surface A ; par Q le plan qui projette la directrice du point μ' sur le plan P ; par ρ' le rayon de courbure qui correspond au point m de la ligne S′ ; par μ'' la projection du point μ' sur la ligne S″.

Lorsque le point μ' sort du lieu m, le plan Q peut être considéré comme tournant autour de la normale N et cette rotation doit être telle qu'elle communique à la directrice du point μ' la vitesse angulaire $\frac{1}{\rho'}$.

Prenons pour plan de la figure le plan mené par le point m perpendiculairement à la ligne S′, et représentons, par mk la normale N ; par ma la trace du plan P ; par me celle du plan osculateur en m à la ligne S′ ; par θ l'angle ame que ces deux plans font entre eux.

Fig. 81.

Soit mh la rotation établie autour de la normale mk ou N. Elle se communique tout entière à la

directrice du point μ'. Décomposons cette rotation en deux autres, l'une établie autour de l'axe *am* et représentée par *mn*, l'autre établie autour de la perpendiculaire élevée en *m* sur *me* et représentée par *mb*. La rotation *mn* est évidemment sans effet sur le mouvement actuel de l'intersection du plan Q avec le plan osculateur en *m* à la ligne S'. Il s'ensuit que la vitesse angulaire de la directrice du point μ' dépend exclusivement de la rotation *mb*. Posons, en conséquence,

$$mb = \frac{1}{\rho'}.$$

Il en résulte, d'après la figure,

$$mh = \frac{\cos\theta}{\rho'},$$

et tel est le *module* de la courbure affectée en *m* par la ligne S''. Disons plus simplement que la *courbure géodésique* de la ligne S' est représentée, pour le point *m*, par l'expression fractionnaire

$$(1) \ldots\ldots\ldots \frac{\cos\theta}{\rho'},$$

ρ' étant le rayon de première courbure de la courbe S' au point *m*, et θ l'angle que font entre eux, pour ce point, le plan osculateur de la courbe S' et le plan tangent à la surface A.

On parvient plus simplement à l'expression (1) en considérant le cylindre qui projette la courbe S' en S''. En effet, sur ce cylindre, la ligne S'' est une section normale, et l'on peut substituer à la courbe S' la section oblique déterminée par son plan osculateur. Si donc on désigne par ρ'' le rayon de courbure qui correspond au point *m* de la ligne S'', on a, d'après la formule de Meunier, *

$$(2) \ldots\ldots\ldots \rho' = \rho''.\cos\theta,$$

* Voir au besoin le n° 178 ou le n° 179, pages 443 et 444.

et, par suite,

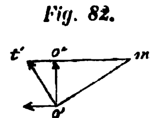
$$\frac{1}{\rho''} = \frac{\cos\theta}{\rho'}.$$

212. Soient T′, T″ deux droites menées par le point μ', à angle droit l'une sur l'autre, et assujetties à rester constamment tangentes, l'une à la ligne S′, l'autre à la surface A. Désignons par P′ le plan de ces droites et imaginons, comme tout à l'heure, que le point μ' sorte du lieu m en glissant sur la ligne S′ avec une vitesse égale à l'unité. Les droites T′, T″ font entre elles un angle constant : *elles ont, en conséquence, mêmes rotations autour des mêmes axes* *.

Considérons d'abord la droite T′. Elle coïncide avec la directrice du point μ' sur la ligne S′. Il s'ensuit que son état actuel de mouvement se résout tout entier en une rotation représentée en grandeur par $\frac{1}{\rho'}$, et ayant pour axe la perpendiculaire élevée par le centre de courbure de la ligne S′ sur le plan osculateur de cette même ligne. Dans le cas le plus général, cette rotation ne peut se composer qu'avec une rotation sans effet actuel sur la droite T′ et établie, par conséquent, autour de cette droite.

Soit o' le centre de courbure qui correspond au point m de la ligne S′ et $o't'$ la perpendiculaire élevée en o' sur le plan osculateur correspondant. La droite T″ est située dans le plan $mo't'$. Représentons-la par mt' et nommons θ l'angle qu'elle fait avec le rayon de courbure mo'. Il est aisé de voir que

Fig. 82.



la rotation $\frac{1}{\rho'}$, établie autour de l'axe ot', a pour composantes :

1° Une rotation $\frac{\cos\theta}{\rho'}$ établie autour d'un axe normal au plan P ** et représentée par la perpendiculaire $o'o''$ abaissée du point o' sur la droite mt';

* 1re partie. Théorème XI. Page 65.

** Le plan P est le lieu occupé par le plan P′ lorsque le point μ' est en m. Le segment $o't'$ étant pris pour mesure de la rotation $\frac{1}{\rho'}$, il est évident qu'elle a pour composantes les rotations représentées en grandeur, l'une par le segment $o'o''$, l'autre par le segment $o''t'$.

2° Une rotation $\frac{\sin\theta}{\rho'}$ établie autour d'un axe mené par le point o' parallèlement à cette même droite.

Ajoutons à ces deux rotations composantes celle qui résulte, en général, de la rotation du plan osculateur et qui a pour axe la droite T'. Nous aurons les trois rotations simultanées qui déterminent, en même temps, les états actuels de mouvement des droites T', T'' et celui du plan P' dans l'hypothèse où ces droites restent fixes dans ce plan.

Supprimons, en ce qui concerne le plan P', la rotation $\frac{\cos\theta}{\rho'}$ établie autour de la droite $o'o''$ et dont l'effet consiste à faire tourner ce plan sur lui-même. Il s'ensuivra que pour restituer aux droites T', T'' leur mouvement effectif, il faudra les considérer d'abord comme participant au mouvement du plan P', et, en outre, comme tournant dans ce plan autour du point o'' avec la vitesse $\frac{\cos\theta}{\rho'}$. Ce premier résultat confirme la déduction du n° 211. Il est clair, en effet, que la rotation $\frac{\cos\theta}{\rho'}$ déterminée, comme on vient de le voir, n'est autre chose que le module de la courbure géodésique définie et mesurée précédemment.

Supprimons encore, en ce qui concerne le plan P', la translation qu'il faut composer avec la rotation $\frac{\sin\theta}{\rho'}$ lorsqu'on transporte cette rotation autour de l'axe mt'. L'effet de cette translation consiste à faire glisser le plan P' sur lui-même avec une vitesse parallèle à la droite T' et égale en grandeur au produit $o'o''.\frac{\sin\theta}{\rho'}$. Il s'ensuivra que pour restituer aux droites T', T'' leur mouvement effectif, il faudra les considérer, non plus seulement comme participant au mouvement du plan P' et comme tournant, en outre, dans ce plan, autour du point o'', avec la vitesse $\frac{\cos\theta}{\rho'}$, mais, de plus, comme y glissant en même temps avec une vitesse égale en grandeur au produit $o'o''\frac{\sin\theta}{\rho'}$ et dirigée parallèlement à la droite T'.

Transportons en m autour de la normale à la surface A la rotation $\frac{\cos\theta}{\rho'}$. La translation qu'il faut composer avec cette rotation, pour qu'elle produise, après son transport, le même effet qu'avant, est égale en grandeur au produit $o''m.\frac{\cos\theta}{\rho'}$.

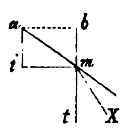
Cela posé, voici d'abord comment se résument les déductions qui précèdent.

Le plan tangent P′ roule sans tourner ni glisser sur lui-même, de manière à s'appliquer successivement sur tous les points de la ligne S′. Son mouvement consiste en deux rotations simultanées, l'une $\frac{\sin\theta}{\rho'}$ établie autour de la droite *mt′* ou T″, l'autre établie autour de la tangente T′ avec la vitesse angulaire représentée par $\overline{N}_t$ dans la formule (8) du n° 176, page 438, et dans les formules (1), (2), (4) du n° 189 *, page 470.

* Veut-on procéder directement, et d'après les données précédentes, à la détermination de cette vitesse? Voici comment on peut s'y prendre.

Considérons la caractéristique du plan P′ et représentons-la par *ma*. Soient d'ailleurs *mt*, *mt′* les droites T′, T″ et *t′a* une parallèle à T′ menée par le point *t′*.

Fig. 82bis.



La rotation $\frac{\sin\theta}{\rho'}$ établie autour de la droite *mt′* communique au point *a* de la caractéristique *ma* une vitesse perpendiculaire au plan P′ et représentée en grandeur par le produit $at'\frac{\sin\theta}{\rho'}$.

Soit $\overline{N}_t$ la rotation établie autour de la droite *mt* ou T′. La vitesse imprimée au point *a* par cette rotation est perpendiculaire au plan P′ et représentée en grandeur par le produit $mt'.\overline{N}_t$. Elle doit d'ailleurs être telle qu'en se composant avec la précédente elle l'annule. De là résulte l'égalité

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad mt'\,\overline{N}_t = at'\,\frac{\sin\theta}{\rho'}.$$

Désignons par λ l'angle *mat′* que la caractéristique *ma* fait avec la tangente *mt* ou T′. On a

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tg}\lambda = \frac{mt'}{at'},$$

et, par suite,

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \overline{N}_t \operatorname{tg}\lambda = \frac{\sin\theta}{\rho'}.$$

Soit N la normale en μ' à la surface A. Elle tourne comme le plan P′, c'est-à-dire avec la vitesse $\frac{\sin\theta}{\rho'}$ dans le plan de la section normale menée par la tangente *mt*, et avec la vitesse $\overline{N}_t$ autour de cette même tangente. Il suit de

Le point μ' glisse sur la ligne S' avec la vitesse

$$o'o''.\frac{\sin\theta}{\rho'} + o''m.\frac{\cos\theta}{\rho'} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

ce qui vérifie les données précédentes.

La droite T'' participe au mouvement du plan P' de la même

là, qu'en désignant par ρ le rayon de courbure de la section normale menée par la tangente mt, on a

$$\rho = \frac{\rho'}{\sin\theta},$$

ce qui donne, conformément au théorème de Meunier,

$$\rho' = \rho\sin\theta \text{ (*)},$$

et, en outre, eu égard à l'équation (3)

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \overline{N}_l = \frac{\cot\lambda}{\rho}.$$

On parvient directement à l'équation (3) en représentant par ma la rotation totale du plan P' et considérant ses deux composantes rectangulaires mt', mb, dont l'une, mt', est $\frac{\sin\theta}{\rho'}$, et l'autre, mb, est la quantité cherchée $\overline{N}_l$. La simple inspection de la figure permet d'écrire immédiatement l'équation (3).

Soit mX la trace sur le plan P' de la section principale dont le rayon de courbure est R. Si l'on désigne par α et par γ les angles que la droite mX fait, d'une part, avec la tangente mt, d'autre part, avec le prolongement de la caractéristique am, on a, d'après la figure,

$$\lambda = \alpha + \gamma,$$

et, conformément à la formule (3) du n° 182, page 448,

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma = \frac{R'}{R}.$$

(*) On observera que l'angle désigné ici par θ est le complément de celui que la section oblique S' fait avec la section normale menée par la tangente mt.

manière que si elle y était fixe. Elle a de plus, *dans ce plan*, deux mouvements distincts, l'un de translation qui rend commune à tous ses points la vitesse du point μ', l'autre de rotation autour du point m et correspondant à la vitesse angulaire $\frac{\cos\theta}{\rho'}$.

Ce qui vient d'être dit de la droite T'' s'applique évidemment et dans les mêmes termes à la droite T'.

Considérons la droite T'' et tenons compte exclusivement du double mouvement qu'elle a dans le plan P'. La vitesse de translation communiquée au point t' est égale à l'unité. Celle qui résulte pour ce même point de la rotation $\frac{\cos\theta}{\rho'}$ établie autour du point m dans le plan P' a pour expression le produit

$$mt'\frac{\cos\theta}{\rho'}=\frac{o'm}{\rho'}=1.$$

Ces deux vitesses sont, d'ailleurs, de même direction et de sens contraire. La conséquence est que le point t' de la droite T'' n'a point de vitesse actuelle dans le plan P'. Il s'ensuit qu'on peut modifierl'undes énoncés qui précèdent et dire plus simplement :

Lorsque le plan P' *roule, sans glisser ni tourner sur lui-même, de manière à s'appliquer successivement sur tous les points de la ligne* S', *le mouvement, qui anime la droite* T'' *dans ce plan, se réduit à une rotation simple autour du point* t', *la distance* mt' *étant égale à* $\frac{\rho'}{\cos\theta}$.

215. Le théorème que nous venons de formuler conduit à plusieurs conséquences importantes.

Le plan P' se mouvant, comme on l'a supposé tout à l'heure, il est visible que la courbe S' s'y développe sans changer de longueur et qu'elle s'y transforme en une ligne dont les centres de courbure successifs sont situés en t'. Cela revient à dire que, dans ce développement, la transformée de la ligne S' a pour courbure, en chaque point, la courbure géodésique qui correspond à ce point de la ligne S' sur la surface A.

On peut observer, d'un autre côté, que le plan P′ ne cesse pas de toucher la surface A le long de la ligne S′, et que sa caractéristique, autrement dit son axe instantané de rotation, se confond à chaque instant avec la tangente conjuguée correspondante. Le lieu de ces axes ou, ce qui revient au même, de ces caractéristiques est évidemment une surface développable sur laquelle la ligne S′ est située et qui a pour chacun des points de cette ligne même plan tangent que la surface A. Soit A_1 cette seconde surface. On peut la substituer à la première sans qu'il en résulte aucun changement dans la ligne S′ et dans le plan tangent à considérer pour chacun des points de cette ligne. Il s'ensuit que cette substitution n'altère en rien les quantités représentées ci-dessus par ρ' et par θ, ni, par conséquent non plus, la courbure géodésique de la ligne S′. On peut dire ainsi de la courbure géodésique d'une ligne quelconque S′ tracée sur une surface A, qu'elle est la courbure de la transformée de cette ligne dans le développement de la surface A_1.

Ces premiers résultats peuvent se résumer comme il suit :

Soient une ligne S′ tracée sur une surface A; m un point de cette ligne; S″ la projection orthogonale de la ligne S′ sur le plan qui touche en m la surface A. Considérons le lieu des caractéristiques qui correspondent au mouvement du plan tangent, lorsque le point m devient mobile et décrit la ligne S′. Ce lieu est une surface développable. Désignons par A_1 cette surface et par S_1 la transformée de la ligne S′ dans le développement de la surface A_1. Cela posé, voici l'énoncé dont il s'agit :

La courbure géodésique de la ligne S′ *est la même en chaque point sur chacune des deux surfaces* A, A_1. *Elle est représentée en grandeur par la courbure qu'affecte au point que l'on considère chacune des deux lignes* S″, S_1.

Théorème de Lancret. — Deuxième courbure géodésique.

214. Soient S′ une ligne quelconque tracée sur une surface A ; *m* un point décrivant la ligne S′ ; V la vitesse actuelle du point *m* ; D la tangente en *m* à la ligne S′.

Désignons par P le plan qui touche en *m* la surface A ; par Q le plan osculateur en *m* à la ligne S′ ; par N la normale au plan P ; par N′ la normale principale qui correspond au point *m* de la ligne S′ et qui, par conséquent, est située dans le plan Q.

Soient ω la rotation du plan P autour de sa caractéristique, et λ l'angle de cette caractéristique avec la droite D.

La rotation ω a pour composantes rectangulaires dans le plan P :

1° Une rotation établie autour de la droite D et représentée par

$$(1). \quad \dots\dots\dots \quad N_1 = \omega.\cos\lambda ;$$

2° Une rotation établie autour de la perpendiculaire élevée en *m* sur la droite D, et représentée par

$$(2). \quad \dots\dots\dots \quad W = \omega.\sin\lambda.$$

La rotation composante W détermine le rayon de courbure ρ de la section normale faite en *m* suivant la droite D. Cela donne

$$(3). \quad \dots\dots\dots \quad W = \frac{V}{\rho},$$

et, par suite, comme on l'a vu déjà au n° 190, page 472,

$$(4). \quad \dots\dots\dots \quad \omega = \frac{V}{\rho.\sin\lambda}.$$

Elle détermine, en même temps, le rayon de courbure ρ' qui correspond au point *m* de la ligne S′. En effet, si l'on désigne

par φ l'angle des deux normales N, N', on a, d'après le théorème de Meunier, et comme on peut, d'ailleurs, le voir directement,

$$\rho' = \rho \cos \varphi.$$

De là résulte, en désignant par W' la vitesse angulaire de la directrice du point m,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad W = \frac{V}{\rho} = \frac{V \cos \varphi}{\rho'} = W'.\cos \varphi,$$

et, par suite, comme au n° 190, page 475,

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \omega = \frac{V \cos \varphi}{\rho' \sin \lambda} = \frac{W' \cos \varphi}{\sin \lambda}.$$

On a, d'ailleurs,

$$(7). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \omega^2 = N_1^2 + W^2 = N_1^2 + W'^2 \cos^2 \varphi.$$

Soit N'_1 la rotation du plan Q autour de la droite D. En la supposant de même sens que la rotation N_1, il est visible que la différence $N'_1 - N_1$ exprime la rotation relative des deux normales N, N', c'est-à-dire la vitesse angulaire avec laquelle l'angle φ croit ou décroit. De là résulte,

$$(8). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \dot{\varphi} = N'_1 - N_1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad N_1 = N'_1 - \dot{\varphi}.$$

Le théorème exprimé par l'équation (9) peut s'énoncer, comme il suit :

La rotation du plan P *autour de la droite* D *est égale à l'excès de la rotation du plan* Q *sur la vitesse angulaire avec laquelle varie l'angle des deux normales* N, N'.

On peut observer *à priori* que le plan des droites N, N′ est le plan normal de la ligne S′. L'équation (8) peut, dès lors, s'écrire immédiatement, comme traduction directe du théorème XII de la première partie (page 67).

215. Reprenons l'équation générale

(1). . . . . $N_s = N'_s - \dot{\varphi}$.

Dans le cas particulier où la ligne S′ est une des lignes de courbure de la surface A, on a pour tous les points de cette ligne

$$N_s = o.$$

De là résulte

(2). . . . . $N'_s = \dot{\varphi}$.

Le théorème exprimé par l'équation (1) comporte l'énoncé suivant :

*Lorsque la ligne décrite est une ligne de courbure, il y a constamment égalité entre la rotation du plan osculateur autour de la tangente et sa rotation relative par rapport au plan tangent *.*

Ce curieux théorème a été énoncé, pour la première fois, par Lancret, dans son premier mémoire sur les lignes à double courbure. On voit, par ce qui précède, comment il se déduit immédiatement du théorème XII de la première partie. Il implique, d'ailleurs, la conséquence suivante :

Lorsque deux surfaces se coupent partout sous un angle constant, et que leur intersection est une ligne de courbure de l'une de ces surfaces, elle est aussi pour l'autre une ligne de courbure.

Il est clair, en effet, que chacun des deux plans tangents à considérer en chaque point tourne avec la même vitesse par rapport

* La réciproque est évidente, les lignes de courbure étant les seules pour lesquelles on ait

$$N_s = o.$$

au plan osculateur de l'intersection commune aux deux surfaces. Or, pour l'une des deux surfaces, il y a, par hypothèse, égalité constante entre la rotation absolue du plan osculateur et sa rotation relative par rapport au plan tangent. Cette même égalité subsiste donc, en même temps, pour l'autre surface.

Lorsque la ligne S′ est une des lignes géodésiques de la surface A, la normale principale N′ se confond avec la normale N et l'angle φ demeure constamment nul. On a donc

$$\dot{\varphi} = o.$$

De là résulte, en général,

$$N_s = N'_s,$$

ou, substituant à ces rotations leurs modules respectifs, ce qui revient, comme on sait, à prendre la vitesse V égale à l'unité,

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \overline{N}_s = \overline{N}'_s.$$

Quelle que soit la ligne S′, sa deuxième courbure est toujours représentée par le module $\overline{N}'_s$. Lorsque cette ligne est une des lignes géodésiques de la surface que l'on considère, le module $\overline{N}_s$ devient égal au module $\overline{N}'_s$. Cette égalité ne subsistant pas en général *, M. Ossian Bonnet considère le module $\overline{N}_s$ comme déterminant ce qu'il nomme la deuxième courbure géodésique de la ligne S′. On a, d'ailleurs, en vertu de l'équation (1),

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \overline{N}_s = \overline{N}'_s - \overline{\dot{\varphi}}.$$

On déduit de là et de ce qui précède les énoncés suivants :

1° *La deuxième courbure géodésique a même module que la rotation du plan tangent autour de la tangente.*

2° *La vitesse avec laquelle le plan tangent tourne autour de la*

* L'égalité dont il s'agit n'a pas lieu seulement pour les lignes géodésiques, elle subsiste, en même temps, et de la même manière, pour toutes les lignes qui satisferaient à la condition $\varphi =$ constante. De là résulte, en effet, $\dot{\varphi} = o$ et, par suite

$$N_s = N'_s.$$

direction suivie par le point décrivant est égale au produit de la vitesse de ce point par le module de la deuxième courbure géodésique.

3° *Lorsque la ligne décrite est une ligne de courbure, la deuxième courbure géodésique est constamment nulle et réciproquement.*

On ne perdra pas de vue que ces énoncés n'apprennent rien de neuf. Ils ne font que reproduire des résultats déjà connus sous une autre forme.

Équation générale des lignes géodésiques.

216. Considérons une courbe plane OS rapportée à des axes coordonnés curvilignes. Les abscisses et les ordonnées qui déterminent les différents points de la ligne OS sont, par hypothèse, des courbes quelconques situées dans le plan de cette ligne, sous la seule condition que les unes soient relativement aux autres leurs trajectoires orthogonales.

Soit μ un point mobile assujetti à décrire la ligne OS et sortant du lieu O à l'instant que l'on considère.

Fig. 83.

On peut se représenter le point μ comme glissant sur la ligne OX, en même temps que le point O glisse sur la ligne OY et entraîne avec lui la ligne OX. On peut supposer, d'ailleurs, que la ligne OX reste normale en O à la ligne OY, et, qu'en outre, elle ne change pas de forme. Rien n'est altéré par là, ni dans la vitesse actuelle du point μ, ni dans la rotation simultanée de sa directrice sur la ligne OS *.

Soient W_y, W_x, W_s les vitesses angulaires qui animent simultanément la directrice du point O sur la ligne OY, et les directrices du point μ sur les lignes OX, OS. Si l'on désigne par i l'angle que font entre elles les tangentes en μ aux deux courbes OX, OS, et qu'on suppose de même sens les trois vitesses angulaires W_y, W_x,

* Voir, au besoin, le principe exposé au n° 104, page 267.

W_s on a, évidemment, pour expression de la vitesse avec laquelle l'angle i varie à l'origine du déplacement considéré,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad di = W_x + W_y - W_s \text{ *}.$$

Supposons qu'il s'agisse de trois courbes tracées sur une surface A et ayant pour projections sur le plan tangent en O les lignes mentionnées ci-dessus et auxquelles l'équation (1) s'applique. Les vitesses angulaires W_x, W_y, W_s sont celles qui correspondent aux courbures géodésiques des courbes S_x, S_y, S_s tracées sur la surface A et projetées actuellement en OX, OY, OS. De là résulte

$$W_x = dx.\left[\frac{\cos\theta}{\rho'}\right]_x, \quad W_y = dy.\left[\frac{\cos\theta}{\rho'}\right]_y, \quad W_s = ds\left[\frac{\cos\theta}{\rho'}\right]_s,$$

l'indice inférieur indiquant celle des courbes à laquelle se rapportent les quantités qui figurent dans l'expression fractionnaire mise entre parenthèses.

Ces valeurs substituées dans l'équation (1) fournissent immédiatement l'équation générale

$$(2). \quad . \; di = dx\left[\frac{\cos\theta}{\rho'}\right]_x + dy.\left[\frac{\cos\theta}{\rho'}\right]_y - ds.\left[\frac{\cos\theta}{\rho'}\right]_s,$$

où les symboles différentiels peuvent être considérés comme exprimant, *au point de vue géométrique*, les vitesses qui leur correspondent.

Supposons que la courbe S_s projetée en OS, soit une des lignes géodésiques de la surface A. Le module $\left[\frac{\cos\theta}{\rho'}\right]_s$ se réduit à zéro, puisque l'on a pour tous les points de cette ligne $\theta = 90°$ On a, d'ailleurs,

$$\frac{dx}{ds} = \cos i, \quad \frac{dy}{ds} = \sin i.$$

* Il suffit de se reporter à cette équation pour résoudre, en chaque cas, les doutes qui peuvent surgir relativement aux signes des quantités qui figurent dans les équations suivantes.

Il vient donc, en substituant,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{di}{ds} = \left[\frac{\cos\theta}{\rho'}\right]_x \cos i + \left[\frac{\cos\theta}{\rho'}\right]_y \sin i.$$

L'équation (3), obtenue ainsi très-simplement, est *l'équation générale des lignes géodésiques tracées sur une surface quelconque,* les coordonnées étant curvilignes et formant les unes par rapport aux autres un double système de trajectoires orthogonales.

Application aux surfaces de révolution.

217. S'agit-il en particulier des surfaces de révolution? Lorsqu'on prend les méridiens pour lignes des ordonnées et les parallèles pour lignes des abscisses, l'équation (3) du n° 216 se réduit à

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{di}{ds} = \left[\frac{\cos\theta}{\rho'}\right]_x . \cos i.$$

Il est clair, en effet, que les méridiens sont des lignes géodésiques et, qu'en conséquence, on doit, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure pour la courbe S_1, supprimer le terme où le module $\left[\frac{\cos\theta}{\rho'}\right]_y$ intervient comme facteur.

Désignons par r le rayon du parallèle représenté par ρ' dans l'équation (4). Il est aisé de voir que l'on a, généralement,

$$\cos\theta = \frac{dr}{dy},$$

et, remplaçant dy par la valeur égale $ds . \sin i$ (voir n° 216),

$$\cos\theta = \frac{dr}{ds . \sin i}.$$

Cette valeur substituée dans l'équation (4) donne

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad di . \operatorname{tg} i = \frac{dr}{r},$$

ou, ce qui revient au même,

$$d.\log(r.\cos i) = o.$$

De là résulte

(6). . . . . $r.\cos i = \text{cons}^{\text{te}} = \text{R}\cos \varepsilon,$

R et ε étant les valeurs que les quantités r et i prennent respectivement au point où la ligne géodésique que l'on considère vient couper l'axe des abscisses.

On voit ainsi comment les lignes géodésiques d'une surface quelconque de révolution sont représentées par l'équation (6).

Soit S une ligne géodésique tracée sur une surface de révolution. Considérons un point quelconque m de la ligne S et menons, par ce point, les droites I, T respectivement tangentes, l'une à la ligne S, l'autre au parallèle correspondant. Soit n l'extrémité d'une longueur égale au rayon de ce parallèle et portée sur la tangente T à partir du point m. L'équation (6) exprime le théorème suivant :

La projection de la longueur mn *sur la droite* I *est constante pour tous les points d'une même ligne géodésique* S.

Dans le cas particulier de la sphère, on vérifie aisément que les lignes géodésiques déterminées par l'équation (6) coïncident avec les grands cercles de cette surface.

Soit, en effet, A B C un triangle sphérique rectangle en C. Si l'on représente par A, B, C les angles et par a, b, c les côtés opposés, la formule générale

Fig. 84.

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B.\sin C.\cos a,$$

où l'on doit poser C = 90°, donne

$$\cos A = \sin B.\cos a.$$

On a, d'ailleurs,

$$\cos a = \frac{r}{\text{R}}, \qquad \sin B = \cos i,$$

R étant le rayon de la sphère, r celui du parallèle mené par le point B parallèlement au plan du côté b, i l'angle que font entre elles les tangentes menées par le point B, l'une à ce parallèle, l'autre au côté c. De là résulte

(7). . . . . $R \cos A = r \cos i$,

et telle est l'équation du grand cercle AB dans le système de coordonnées que nous considérons, le grand cercle AC étant pris pour axe des abscisses.

L'identité visible des équations (6) et (7) fournit la vérification annoncée. Le fait, consistant en ce que les lignes géodésiques de la sphère sont toutes des grands cercles, n'exige en lui-même aucune démonstration. Il résulte *à priori* de la définition de ces lignes.

218. Proposons-nous de traduire en coordonnées polaires l'équation (6) du numéro précédent.

Le point m étant projeté sur un plan perpendiculaire à l'axe de révolution, plaçons l'origine au point où cet axe vient percer ce plan, et désignons par α l'angle que la projection du rayon r fait avec la droite prise pour axe dans ce même plan. On a, d'abord, (voir n° 217)

(1). . . . . $\cos i = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{r d\alpha}{ds}$,

et, en outre,

(2). . . . . . $ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2 + dz^2$,

z étant la hauteur du point m au-dessus du plan de projection.

Soit

(3). . . . . $z = f(r)$,

l'équation de la ligne méridienne en coordonnées ordinaires. On en déduit

$$dz = f'(r) . dr,$$

et, par suite,

(4). . . . . $ds^2 = dr^2 [1 + f'(r)^2] + r^2 d\alpha^2$.

Considérons l'équation (6) du n° 217, page 528. On a

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad r \cos i = r^2 \frac{d\alpha}{ds} = \text{cons}^{\text{te}} = c.$$

La combinaison des équations (4) et (5) donne, en conséquence,

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\alpha = \frac{cdr}{r} \sqrt{\frac{1 + f'(r)^2}{r^2 - c^2}}.$$

L'équation (6), ainsi déterminée et ramenée à une simple quadrature, est l'équation polaire des projections des lignes géodésiques pour le cas général des surfaces de révolution.

Dans le cas particulier de la sphère, l'origine étant au centre, on a

$$z = f(r) = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

De là résulte

$$f'(r) = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Cette valeur substituée dans l'équation (6) conduit à

$$(7). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\alpha = \frac{R . c . dr}{r \sqrt{(R^2 - r^2)(r^2 - c^2)}}.$$

On vérifie d'ailleurs aisément que l'équation (7) est l'équation polaire d'une ellipse rapportée à son centre et à son axe principal c, le second axe principal étant égal à R. Si l'on observe, en outre, qu'en désignant par ε l'angle sous lequel la ligne géodésique considérée vient couper le plan central de projection, on a

$$c = R \cos \varepsilon,$$

il est aisé de voir que l'ellipse, dont il s'agit, est la projection du grand cercle dont le plan passe par l'axe R et fait l'angle ε avec le plan de projection.

APPLICATION A L'ELLIPSOÏDE ET A L'HYPERBOLOÏDE.

Théorème de Joachimstal. — Équation générale des lignes géodésiques.

219. Soient o le centre d'un ellipsoïde; m un point de la surface; om, oa, ob trois demi-diamètres conjugués; ma', mb' deux droites situées dans le plan tangent en m et respectivement parallèles, l'une à la droite oa, l'autre à la droite ob.

Considérons l'ellipse qui résulte de l'intersection de l'ellipsoïde par le plan diamétral moa.

Si le point m glissait sur cette ellipse, et qu'il entraînât avec lui une droite assujettie à rester parallèle à la tangente mb', il est visible que cette droite ne cesserait pas de toucher l'ellipsoïde. Il suit de là, comme on l'a vu au n° 174, page 429, que la tangente mb' est la caractéristique qui correspond, pour le plan tangent en m, au glissement de ce point suivant la direction ma'.

Fig. 85.

Soient S la ligne géodésique issue du point m suivant la direction ma', et A l'enveloppe d'un plan mobile Q assujetti à toucher l'ellipsoïde en chacun des points de la ligne S. L'enveloppe A, *lieu des caractéristiques du plan* Q, est une surface développable, et nous savons que, dans le développement de cette surface, la ligne S devient droite.

Considérons le point m, le plan Q et le demi-diamètre ob comme assujettis respectivement et simultanément, le point m à décrire la ligne S, le plan Q à toucher en m l'ellipsoïde, le demi-diamètre ob à tourner autour du centre o de manière à rester parallèle à la caractéristique du plan Q. Devenue mobile avec le point m la droite ob engendre un cône. Soient A' ce cône; Q' le plan qui le touche suivant la droite ob; S' le lieu des points b, lieu situé à la fois sur l'ellipsoïde et sur le cône A'. Le plan Q' ne cesse pas

d'être parallèle au plan Q, ni, par conséquent, de contenir la droite ba'' menée par le point b parallèlement à la tangente ma'. Mais, d'un autre côté, la droite ba'' est la directrice du point b sur la ligne S' et, comme elle se meut en restant parallèle à la directrice du point m sur la ligne S, les vitesses qui résultent, pour ses différents points, de la rotation du plan Q' autour de la droite ob sont toutes perpendiculaires à ce plan *. Il suit de là, sans autre intermédiaire, que la ligne S' est une des lignes géodésiques du cône A', qu'elle devient droite dans le développement de ce cône **, et que, par conséquent, la perpendiculaire abaissée du point o sur toutes ses tangentes est constante en grandeur. L'égalité qui subsiste entre cette perpendiculaire et celle abaissée du point b sur le demi-diamètre oa implique, en conséquence, le théorème suivant :

Étant donné, sur un ellipsoïde, un point quelconque m *d'une ligne géodésique* S, *si l'on mène deux demi-diamètres respectivement parallèles, l'un à la tangente en* m *à la ligne* S, *l'autre à la tangente conjuguée, la perpendiculaire abaissée de l'extré-*

* Cette condition cesse d'avoir lieu lorsque le plan osculateur de la ligne S n'est point normal à la surface A. Dans ce cas, en effet, tandis que le plan tangent en m tourne autour de la caractéristique mb', la tangente ma' tourne dans ce même plan, comme on l'a vu au nº 212, page 515. Il s'ensuit que la directrice du point b sur la ligne S' ne tourne pas seulement autour de la droite ob, mais qu'elle tourne en même temps autour de la normale en b au cône A'. La conséquence évidente est que les vitesses de ses différents points cessent d'être perpendiculaires au plan Q'. En d'autres termes et plus simplement, il y a en même temps parallélisme d'une part entre les plans tangents Q, Q', d'autre part, entre les plans qui sont osculateurs, l'un en m à la ligne S, l'autre en b à la ligne S'.

** Étant donnés le point m et la direction de la ligne S en ce point, on connaît la longueur ob et l'angle oba''. Imaginons qu'on trace la droite ba'' et que, sans changer les distances de ses différents points au point o, on l'applique sur l'ellipsoïde. La transformée de cette droite sera la ligne S'. Cela posé, si, pour chaque point de la ligne S', on construit le plan diamétral mené par la tangente en ce point et son diamètre conjugué, il est visible que les extrémités de ce diamètre auront pour lieu géométrique la ligne S à déterminer.

mité du second de ces demi-diamètres sur le premier est constante en grandeur.

Soit P la perpendiculaire abaissée du centre o sur le plan tangent en m à l'ellipsoïde. On sait que le volume compris entre les six plans tangents menés par les extrémités de trois diamètres conjugués est constant. De là résulte, évidemment,

$$P.D.H = \text{cons}^{\text{te}},$$

D étant le demi-diamètre dirigé suivant oa, et H la perpendiculaire abaissée du point b sur ce demi-diamètre. Mais on a déjà

$$H = \text{cons}^{\text{te}}.$$

On peut donc écrire aussi

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P.D = \text{cons}^{\text{te}}.$$

Le théorème exprimé par cette équation est dû à M. Joachimstal. On peut l'énoncer, comme il suit :

Étant donné sur un ellipsoïde un point quelconque m *d'une ligne géodésique* S, *le produit du diamètre parallèle à la tangente en* m *à la ligne* S *par la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en* m *est constant.*

Il est entendu pour ce théorème, comme pour le précédent, qu'il s'applique à tous les points d'une même ligne géodésique, cette ligne pouvant, d'ailleurs, être tracée soit sur un ellipsoïde, soit sur un hyperboloïde.

On voit aisément qu'il existe une infinité de lignes géodésiques, correspondantes à une même valeur quelconque du produit PD. En général, ces lignes sont au nombre de deux pour un même point. Lorsqu'elles sont au nombre de trois, le point est un ombilic et les lignes géodésiques issues de ce point correspondent toutes à une seule et même valeur du produit P.D.

220. Si l'on se reporte à la démonstration précédente, il est aisé de voir qu'elle s'applique aux lignes de courbure, tout aussi

bien, et même plus simplement qu'aux lignes géodésiques de l'ellipsoïde et de l'hyperboloïde. Supposons, en effet, que la ligne S, issue du point *m* suivant la direction *ma'*, soit une ligne de courbure. Il s'ensuit que la ligne S' est partout normale aux génératrices rectilignes du cône A' et que, par conséquent, le rayon vecteur *ob* est de grandeur constante *. De là résulte ce premier énoncé:

Étant donné sur un ellipsoïde un point quelconque m *d'une ligne de courbure* S, *si l'on mène deux demi-diamètres respectivement parallèles, l'un à la tangente en* m *à la ligne* S, *l'autre à la tangente conjuguée, ces deux demi-diamètres sont rectangulaires et le second est de grandeur constante.*

Le reste s'achève comme au numéro précédent. On peut, en conséquence, énoncer aussi cet autre théorème :

Étant donné sur un ellipsoïde un point quelconque m *d'une ligne de courbure* S, *le produit du diamètre parallèle à la tangente en* m *à la ligne* S *par la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en* m *est constant pour tous les points de cette même ligne.*

Ces déductions sont, ainsi qu'on le voit, d'une grande simplicité.

Polaires conjuguées.

221. Reprenons les données du n° 219 à cela près qu'au lieu de ranger la ligne S parmi les lignes géodésiques, nous la supposions tout à fait quelconque, sous la seule condition d'appartenir à l'une ou l'autre des surfaces du second degré qui sont pourvues d'un centre. Quelle que soit la ligne S, elle ne cesse pas de déterminer, ainsi qu'on la vu, la ligne correspondante S'. De là résulte

* La construction indiquée dans la dernière note, page 532, pour le tracé d'une ligne géodésique devient plus simple encore lorsqu'il s'agit du tracé d'une ligne de courbure. Dans ce cas, en effet, la ligne S' n'est autre chose que l'intersection de l'ellipsoïde par une sphère concentrique de rayon connu. On déduit aisément de là l'équation des lignes de courbure.

entre ces deux lignes une dépendance mutuelle et réciproque qui les lie de telle façon que l'une ne peut être donnée sans que l'autre ne s'en déduise immédiatement. C'est à raison de cette dépendance, et pour en rappeler le mode constitutif, que nous désignons les lignes S, S′ sous le nom de *polaires conjuguées.* Nous nommons en même temps *cônes centraux de conjugaison* les cônes dont le sommet est au centre de la surface du second degré que l'on considère et qui ont respectivement pour bases, l'un la ligne S, l'autre la ligne S′.

Cela posé, si nous prenons deux points m et b, conjugués entre eux, et situés respectivement, le premier sur la ligne S, le second sur la polaire conjuguée S′, il est visible que les déductions des numéros 219 et 220 impliquent les énoncés suivants :

Les plans osculateurs qui correspondent aux points m *et* b *de deux polaires conjuguées* S, S′ *sont parallèles entre eux. Il en est de même des deux plans qui touchent en ces points, l'un l'ellipsoïde ou l'hyperboloïde donné, l'autre le cône central de conjugaison.*

Lorsque la ligne S *est une ligne géodésique de l'ellipsoïde ou de l'hyperboloïde, la polaire conjuguée est une ligne géodésique du cône central de conjugaison qui lui correspond.*

Lorsque la ligne S *est une ligne de courbure de l'ellipsoïde ou de l'hyperboloïde, la polaire conjuguée est une ligne de courbure du cône central de conjugaison qui lui correspond.*

222. Le théorème du n° 219 conduit très-simplement à l'équation générale des lignes géodésiques de l'ellipsoïde *.

Supposons qu'on prenne pour coordonnées le double système des lignes de courbure correspondantes aux différents points de la surface. On aura généralement

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 i}{R} + \frac{\sin^2 i}{R'},$$

* Les mêmes déductions s'appliquent à l'hyperboloïde.

R, R′ et ρ étant les rayons de courbure qui appartiennent respectivement, pour un même point quelconque *m*, les deux premiers aux sections principales, le dernier à la ligne géodésique inclinée de l'angle *i* sur celle des sections principales dont le rayon de courbure est représenté par R.

Considérons la section faite par le centre de l'ellipsoïde, parallèlement au plan tangent en *m*. On sait, conformément aux déductions du n° 172, page 425, qu'on peut substituer cette section à l'indicatrice. Cela revient à dire, qu'on peut remplacer dans l'équation (1) chacune des quantités R, R′ et ρ par le carré du demi-diamètre dirigé parallèlement à la tangente correspondante. Désignons par A, B les demi-diamètres respectivement parallèles aux tangentes dirigées, pour le point *m*, suivant les sections principales, ou, ce qui revient au même, suivant les lignes de courbure qui se coupent en ce point. Le demi-diamètre parallèle à la tangente en *m* à la ligne géodésique que l'on considère, étant représenté comme ci-dessus par D, il vient, d'après ce qui précède,

$$(2)\ldots\ldots\quad \frac{1}{D^2}=\frac{\cos^2 i}{A^2}+\frac{\sin^2 i}{B^2}.$$

Prenons la perpendiculaire désignée par H au n° 219, page 533. Nous savons qu'elle est constante pour tous les points d'une même ligne géodésique, et que l'on a, d'ailleurs, en vertu d'une propriété connue de l'ellipse,

$$(3)\ldots\ldots\ldots\quad D.H=A.B.$$

Élevons au carré les deux membres de l'équation (3) et introduisons-les comme facteurs dans l'équation (2). On trouve ainsi

$$(4)\ldots\quad B^2\cos^2 i+A^2\sin^2 i=H^2=\text{cons}^{\text{te}}.$$

Les quantités A et B sont données en chaque point par la direction qu'y affectent les sections principales. Il s'ensuit qu'elles sont indépendantes de l'angle *i*. L'équation (4) suffit, en conséquence, à la détermination des lignes géodésiques qui passent par

le point m et pour lesquelles la perpendiculaire H affecte l'une quelconque des valeurs qu'elle comporte en ce point. On observera que ces lignes sont, en général, au nombre de deux pour une même valeur de la quantité H. Cette circonstance ne fait point obstacle à ce qu'on les distingue aisément l'une de l'autre, l'angle qu'elles font entre elles étant le même que celui que font entre eux, dans l'indicatrice centrale, les deux demi-diamètres dont la longueur est D.

On voit ainsi comment l'équation (4) représente, sous une forme à la fois très-simple et très-remarquable, l'équation générale des lignes géodésiques de l'ellipsoïde. Cette équation a été donnée, pour la première fois, par M. Liouville, qui la ramène à la forme,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \rho^2 - \mathrm{H}^2 = \mathrm{const}^{te},$$

ρ étant le plus grand des demi-axes principaux de l'ellipsoïde.

L'équation (5) revient à

$$(\rho^2 - \mu^2) \cos^2 i + (\rho^2 - \nu^2) \sin^2 i = \mathrm{H}^2.$$

Elle doit, d'ailleurs, s'identifier avec l'équation (4). Il en résulte que les variables qui figurent de part et d'autre dans les équations (4) et (5), sont liées entre elles par les relations

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{B}^2 = \rho^2 - \mu^2, \qquad \mathrm{A}^2 = \rho^2 - \nu^2.$$

Nous montrerons, dans le numéro suivant, le sens particulier qui s'attache directement aux variables μ, ν, et comment il s'ensuit qu'elles satisfont aux équations (6).

223. Considérons un ellipsoïde quelconque et représentons ses demi-axes principaux, le plus grand par ρ, le moyen par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, le plus petit par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$. Soit, d'ailleurs,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

l'équation de cet ellipsoïde.

Si nous désignons par μ et ν deux quantités, l'une comprise entre b et c, l'autre inférieure à b, et que nous prenions, d'une part, l'hyperboloïde à une nappe

$$(2). \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

d'autre part, l'hyperboloïde à deux nappes

$$(3). \quad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

il est visible, qu'indépendamment de toutes valeurs particulières affectées séparément par chacune des trois quantités ρ, μ, ν, ces trois surfaces sont homofocales. On peut vérifier, en outre, que leurs intersections se font partout orthogonalement *.

* Considérons deux quelconques de ces surfaces, la première et la deuxième par exemple. Les équations de leur intersection peuvent s'écrire comme il suit :

$$(1). \quad \frac{b^2x^2}{\rho^2\mu^2} + \frac{(b^2 - c^2)z^2}{(\rho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)} = 1, \quad \frac{b^2y^2}{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)} + \frac{c^2z^2}{(\rho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)} = -1.$$

Si, d'ailleurs, on désigne par p et q les dérivées partielles $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, on a, pour la première surface,

$$p = -\frac{\rho^2 - c^2}{\rho^2}\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{\rho^2 - c^2}{\rho^2 - b^2}\frac{y}{z},$$

et, pour la seconde,

$$p = -\frac{\mu^2 - c^2}{\mu^2}\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{\mu^2 - c^2}{\mu^2 - b^2}\frac{y}{z}.$$

Il en résulte, pour condition de perpendicularité entre deux normales quelconques menées par un même point de l'intersection de ces deux surfaces,

$$(2). \quad \frac{(\rho^2 - c^2)}{\rho^2}\frac{(\mu^2 - c^2)}{\mu^2}x^2 + \frac{(\rho^2 - c^2)}{(\rho^2 - b^2)}\frac{(\mu^2 - c^2)}{(\mu^2 - b^2)}y^2 + z^2 = o.$$

Supposons que l'ellipsoïde soit donné. Il en est de même des quantités ρ, b, c. Les quantités μ, ν restent néanmoins indéterminées et, si l'on en dispose de manière à les faire varier, soit ensemble, soit séparément, on réalise trois séries de surfaces qui se coupent toujours et partout à angle droit. Concluons, conformément au théorème de M. Dupin sur les surfaces orthogonales, (voir n° 183, page 451), que les intersections de l'ellipsoïde (1) avec chacun des hyperboloïdes (2) et (3) constituent, par rapport à l'ellipsoïde, les deux systèmes de ses lignes de courbure. Précisons davantage. Lorsqu'on se donne un point m pris sur l'ellipsoïde, on connaît les trois coordonnées de ce point. En transportant les valeurs de ces coordonnées dans les équations (2) et (3), on détermine les valeurs correspondantes des quantités μ et ν. De là résulte la détermination complète des deux hyperboloïdes représentés par les équations (2) et (3) et, par conséquent aussi, celle de leurs intersections avec l'ellipsoïde. Ces deux intersections passent par le point m et constituent, par rapport à l'ellipsoïde, les deux lignes de courbure qui se croisent en ce point. Ces lignes étant prises pour coordonnées comme au n° 222, on voit

Substituons aux quantités x^2, y^2 les valeurs fournies par les équations (1). L'équation (2) devient, d'abord,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)}{b^2}\left[1-\dfrac{(b^2-c^2)z^2}{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)}\right] \\ -\dfrac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)}{b^2}\left[1+\dfrac{c^2z^2}{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)}\right] \end{array}\right\} + z^2 = o,$$

ou, après réduction,

$$\frac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)}{b^2} - \frac{(\rho^2-c^2)(\mu^2-c^2)}{b^2} - \left[\frac{b^2-c^2}{b^2}+\frac{c^2}{b^2}-1\right]z^2 = o.$$

Il suit de là que l'équation (2) est satisfaite indépendamment de toute valeur attribuée à la variable z, c'est-à-dire pour tous les points de l'intersection considérée. Le même calcul s'appliquant à deux quelconques des trois surfaces dont il s'agit, il en résulte que partout où elles se coupent c'est à angle droit.

comment elles sont déterminées en chaque point de l'ellipsoïde par les équations de condition

(4). . . . . $\mu = \text{cons}^{te}$, $\nu = \text{cons}^{te}$.

Les détails dans lesquels nous venons d'entrer ajoutent un complément simple et satisfaisant à la solution du numéro qui précède. Pour donner à ce complément toute sa signification, il nous reste à montrer que les quantités μ et ν sont les mêmes, de part et d'autre, ici et dans le n° 222, page 537.

S'agit-il d'abord de déterminer en fonction des variables μ et ν les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'ellipsoïde? La combinaison des équations (1), (2), (3) permet d'arriver sans peine aux valeurs suivantes :

$$(5). \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\rho.\mu.\nu}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \\ z &= \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}. \end{aligned} \right.$$

S'agit-il ensuite d'exprimer en fonction de ces mêmes variables les valeurs des demi-diamètres représentés par A et par B dans le n° 222, page 536? On peut procéder comme il suit :

Considérons la ligne de courbure déterminée sur l'ellipsoïde par son intersection avec l'hyperboloïde (2). On trouve aisément pour les équations de cette ligne,

$$(6). \quad \frac{b^2x^2}{\rho^2\mu^2} + \frac{(c^2-b^2)z^2}{(\rho^2-c^2)(c^2-\mu^2)} = 1, \quad \frac{b^2y^2}{(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)} - \frac{c^2z^2}{(\rho^2-c^2)(c^2-\mu^2)} = -1.$$

Soit m un point de cette ligne et T la touchante en ce point. Les angles que les projections de la droite T sur les plans des zx et des zy font avec les axes des x et des y ont pour tangentes respectives, ainsi qu'on le voit aisément d'après les équations (6),

$$(7). \quad \frac{dx}{dz} = -\frac{\rho^2.\mu^2.(c^2-b^2)}{b^2(\rho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}\,\frac{z}{x}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{c^2(\rho^2-b^2)(\mu^2-b^2)}{b^2(\rho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}\,\frac{z}{y}.$$

De là résulte, en substituant aux quantités x, y, z les valeurs fournies par les équations (5),

$$(8).\ \frac{dx}{dz} = -\frac{\rho.\mu\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{b.\nu\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}},\quad \frac{dy}{dz} = -\frac{c\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{b\sqrt{\rho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}.$$

Menons par le centre de l'ellipsoïde une droite T', parallèle à la tangente T, et désignons par x', y', z' les coordonnées du point où cette droite vient percer l'ellipsoïde. Le demi-diamètre dirigé suivant la droite T' est celui que nous avons représenté par A dans le n° 222, page 536. On a donc, en premier lieu,

$$(9).\ \ldots\ldots\ A^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

On a, d'ailleurs, d'une part,

$$(10).\ \ldots\ x' = \frac{dx}{dz}z',\quad y' = \frac{dy}{dz}z',$$

et, d'autre part,

$$(11).\ \ldots\ \frac{x'^2}{\rho^2} + \frac{y'^2}{\rho^2-b^2} + \frac{z'^2}{\rho^2-c^2} = 1.$$

De là résulte, immédiatement,

$$(12).\ \ldots\ \begin{cases} A^2 = \left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1\right]z'^2, \\ \left[\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2-b^2}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2-c^2}\right]z'^2 = 1. \end{cases}$$

Il vient donc, en second lieu,

$$(13).\ \ldots\ A^2 = \frac{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}{\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho^2-b^2}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2-c^2}},$$

et, par suite,

$$(14).\quad A^2 = \rho^2 - \frac{\frac{b^2}{\rho^2 - b^2}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + \frac{c^2}{\rho^2 - c^2}}{\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 - b^2}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 - c^2}}.$$

Substituant aux quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ les valeurs fournies par les équations (8) et réduisant, on trouve, pour le numérateur de la partie soustractive du second membre de l'équation (14),

$$\frac{c^2(c^2 - b^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\rho^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)(b^2 - \nu^2)},$$

et, pour le dénominateur de cette même partie,

$$\frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{c^2(c^2 - b^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\rho^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)(b^2 - \nu^2)}.$$

Il s'ensuit que l'on a, toute réduction faite,

$$(15).\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad A^2 = \rho^2 - \nu^2.$$

Si l'on considérait la ligne de courbure déterminée sur l'ellipsoïde par son intersection avec l'hyperboloïde (5), il est évident qu'en répétant les mêmes calculs, on arriverait à l'équation finale

$$(16).\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad B^2 = \rho^2 - \mu^2.$$

L'identité qui subsiste entre les équations (15) et (16) du présent numéro et les équations (6) du n° 222, page 537, met en évidence la vérification qui nous restait à faire.

Formules générales relatives à la théorie des surfaces.

224. Reportons-nous aux considérations du n° 209, page 509, et développons-les davantage.

Soient S une ligne quelconque d'une surface A; μ un point sup-

posé mobile sur la ligne S; m le lieu actuel du point μ; D une droite issue du point μ, entraînée par ce point et assujettie à rester normale à la ligne S; n un point de la droite D; λ la distance du point n au point μ.

Désignons par v la vitesse actuelle du point μ; par u celle du point n; par P le plan que déterminent la droite D et la tangente en m à la ligne S; par S', m' et μ' les projections orthogonales de la ligne S et des points m et μ sur le plan P.

La vitesse u résulte de deux composantes rectangulaires, l'une parallèle à v et située dans le plan P, l'autre perpendiculaire à ce plan et provenant de la rotation de la droite D autour de la tangente en m à la ligne S.

Nommons φ l'angle des vitesses v, u. La première composante a pour expression

$$u \cos \varphi.$$

Mais, d'un autre côté, le mouvement de la droite D dans le plan P se compose d'une translation qui rend commune à tous les points de cette droite la vitesse v du point μ, et, en outre, d'une rotation établie autour de ce point avec la vitesse angulaire qui anime la directrice du point μ' sur la ligne S'. Soit W' cette vitesse angulaire et θ l'angle que la droite D fait avec la normale principale menée en m à la ligne S. En désignant par ρ le rayon de courbure qui correspond à ce même point, on a

$$W' = v . \frac{\cos \theta}{\rho},$$

la quantité $\frac{\cos \theta}{\rho}$ étant, comme on l'a vu aux numéros 211 et suivants, le module de la courbure géodésique affectée en m par la ligne S, ou, ce qui revient au même, le module de la courbure affectée en m' par la ligne S'.

Supposons le point n pris du côté de la concavité. La vitesse qu'il emprunte à la rotation W' est exprimée en grandeur par le produit

$$\lambda . W' = \lambda . v \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

Elle est, d'ailleurs, de sens contraire à la vitesse v. De là résulte, pour la vitesse totale qui anime le point n, dans le plan P, parallèlement à la tangente en m à la ligne S,

$$v - v.\lambda.\frac{\cos\theta}{\rho}.$$

Cette même vitesse est déjà représentée par le produit $u.\cos\varphi$. On a donc, en général,

$$(1)\ldots\ldots\quad v - v.\lambda.\frac{\cos\theta}{\rho} = u.\cos\varphi,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2)\ldots\ldots\quad 1 - \lambda.\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{u}{v}\cos\varphi.$$

L'équation (1) subsiste en même temps pour tous les points de la droite D. Les quantités λ, u et φ sont, d'ailleurs, les seules qui varient, lorsque, pour une même position quelconque de cette droite, on y passe d'un point à un autre. Plaçons-nous dans cette hypothèse et exprimons par la caractéristique δ les vitesses d'accroissement qui correspondent, pour chacun des deux membres de l'équation (1), à un déplacement continu du point n sur la droite D. On a, d'abord,

$$\delta(u.\cos\varphi) = \delta\left(v - v.\lambda.\frac{\cos\theta}{\rho}\right),$$

et, effectuant les différentiations indiquées par rapport aux variables λ, u, φ,

$$\cos\varphi.\delta u - u\sin\varphi.\delta\varphi = -v\frac{\cos\theta}{\rho}.\delta\lambda.$$

Appliquons cette dernière équation au cas particulier où il s'agit d'un point supposé mobile sur la droite D et sortant du lieu m,

à l'instant que l'on considère. On doit, en ce cas, poser $u = v$, et $\varphi = o$. Cela donne immédiatement l'équation générale

$$(3). \quad \ldots\ldots \quad \delta v = -v \frac{\cos \theta}{\rho} \delta \lambda \text{ *}.$$

Remarque. — La rotation de la droite D autour de la tangente en *m* à la ligne S pouvant être quelconque, il est permis de la déterminer par la condition que cette droite soit et reste tangente à la surface A. On peut, d'ailleurs, sans rien changer à ce qui précède, imaginer que la ligne S tourne autour du point *m*. Si la droite D participe à ce mouvement, les équations (2) et (3) ne cessent pas de subsister. On doit observer seulement qu'au lieu d'exprimer les vitesses absolues des points μ et *n*, les quantités *v* et *u* ne sont plus que les vitesses relatives de ces mêmes points dans le mouvement qui vient d'être indiqué et qui, par hypothèse, leur est rendu commun.

225. Reprenons la formule générale

$$(1). \quad \ldots\ldots \quad 1 - \lambda \frac{\cos \theta}{\rho} = \frac{u}{v} \cos \varphi.$$

Le point *n* étant supposé fixe sur la droite D, désignons par Σ le lieu de ses positions successives. Toutes choses sont égales de part et d'autre, en ce sens que les lignes S et Σ sont deux trajectoires orthogonales d'une même surface réglée A' **. On peut dès lors substituer l'une de ces lignes à l'autre et réciproquement. De là résulte, par inversion de l'équation (1),

$$(2). \quad \ldots\ldots \quad 1 + \lambda \frac{\cos \theta'}{\rho'} = \frac{u}{v} \cos \varphi,$$

* Les formules (2) et (3) reproduisent, sous une forme différente, les équations données par M. Ossian Bonnet, aux pages 35 et 37 du mémoire déjà cité.

** Cette surface est déterminée par l'ensemble des positions que prend la droite D lorsqu'on l'assujettit à rester tangente à la surface A et qu'on la fait passer successivement ou simultanément par tous les points de la ligne S.

les quantités θ' et ρ' ayant respectivement, par rapport à la ligne Σ, les mêmes significations que les quantités θ et ρ par rapport à la ligne S.

Multipliées, membre à membre, les équations (1) et (2) donnent, après réduction,

$$(3). \quad . \quad . \quad \frac{\cos\theta'}{\rho'} - \frac{\cos\theta}{\rho} - \lambda.\frac{\cos\theta'}{\rho'}.\frac{\cos\theta}{\rho} = -\frac{\sin^2\varphi}{\lambda}.$$

La ligne S étant supposée fixe, appliquons l'équation (3) au cas où la ligne Σ sort du lieu qu'elle occupe en restant sur la surface A'. Cela revient à passer, sur cette surface, de la trajectoire orthogonale Σ à celle qui lui succède immédiatement. Cela revient, en d'autres termes, à différencier l'équation (3) par rapport à la caractéristique δ, comme nous l'avons fait tout à l'heure, c'est-à-dire en ne considérant comme variables que les quantités θ', ρ', λ et φ. On trouve ainsi

$$(4). \left[1 - \lambda\frac{\cos\theta}{\rho}\right]\delta.\frac{\cos\theta'}{\rho'} - \frac{\cos\theta'}{\rho'}\frac{\cos\theta}{\rho}\delta\lambda = -2\frac{\sin\varphi.\cos\varphi}{\lambda}\delta\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{\lambda^2}\delta\lambda.$$

Sans rien changer à ce qui précède, imaginons que la ligne Σ coïncide originairement avec la ligne S. Pour appliquer l'équation (4) à ce cas, il suffit de poser $\lambda = o$ et, par suite, $\theta' = \theta$, $\rho' = \rho$, $\varphi = o$. De là résulte, en observant que le rapport $\frac{\sin\varphi}{\lambda}$ dont les deux termes s'annulent a pour limite le rapport $\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$ *,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad \delta\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\right) = \left[\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} - \left(\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}\right)^2\right]\delta\lambda.$$

La quantité $\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$ est évidemment celle que nous avons désignée par $\overline{N}_s$ dans le n° 203, page 497, et pour laquelle nous avons

* Chacune des quantités $\sin\varphi$ et λ s'annulant à la fois, on sait, conformément au principe exposé dans la 2me partie (n° 9, page 104), que leur rapport a pour limite celui qui s'établit entre les différentielles $\cos\varphi.\delta\varphi$ et $\delta\lambda$ lorsqu'on attribue la valeur zero à chacune des deux variables φ et λ.

trouvé, soit directement, soit comme conséquence immédiate de l'équation (14) du n° 176 *, page 439,

$$(\overline{N}_x)^2 = -\frac{1}{RR'}.$$

L'équation (5) peut, en conséquence, s'écrire comme il suit,

$$(6). \quad \ldots\ldots \quad \delta.\frac{\cos\theta}{\rho} = \left[\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{1}{RR'}\right]\delta\lambda,$$

R et R′ étant les rayons de courbure principaux qui correspondent au point m de la surface réglée A′.

Reprenons la ligne Σ au sortir du lieu S et imaginonsqu'au lieu de décrire la surface A′, elle soit assujettie, *toutes choses égales d'ailleurs*, à décrire la surface A. Au lieu de décrire la génératrice rectiligne qui lui correspond dans la surface A′, le point n de la ligne Σ décrit la ligne géodésique tracée sur la surface A perpendiculairement à la ligne S. Au lieu d'être fixe, la directrice de ce point tourne avec une certaine vitesse ω. Il s'ensuit que la courbure géodésique varie, comme tout à l'heure, avec la vitesse

$$\left[\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} - \left(\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}\right)^2\right]\delta\lambda,$$

et, en outre, avec la vitesse angulaire relative

$$-\frac{\delta.\cos\theta}{\rho},$$

la caractéristique δ ne s'appliquant ici qu'à la variation partielle subie par l'angle θ, eu égard à la rotation de la directrice du point m. Cela revient à substituer la vitesse angulaire ω à la quantité $\delta\theta$ dans le résultat de la différentiation. On trouve ainsi

$$-\frac{\delta\cos\theta}{\rho} = \omega.\frac{\sin\theta}{\rho}.$$

* Voir au besoin la formule (8) du n° 203, page 407, et la remarque finale du n° 224, page 545.

De là résulte, par voie de simple addition,

$$(7). \quad . \quad . \quad . \; \delta\frac{\cos\theta}{\rho} = \left[\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{\omega}{\rho}\frac{\sin\theta}{\delta\lambda} - \left(\frac{\delta\gamma}{\delta\lambda}\right)^2\right]\delta\lambda,$$

l'équation (7) subsistant avec le sens de l'équation (5), non plus seulement pour le cas de la surface réglée A' *, mais bien pour le cas général d'une surface quelconque A.

Fig. 86.

Veut-on procéder autrement? Soient *mn* la position actuelle de la droite D; *mo* celle de la normale principale qui correspond au point *m* de la ligne S; *ma* une droite fixe située dans le plan normal *nmo*.

L'équation (5) ne s'applique pas seulement au cas où les génératrices rectilignes de la surface A' restent fixes, elle s'applique, en même temps, à celui où ces génératrices sortent des lieux qu'elles occupent, en tournant chacune autour de la tangente qui lui correspond sur la ligne S. Désignons par θ'' l'angle *amo* et par ε l'angle *amn*, c'est-à-dire l'excès de l'angle θ'' sur l'angle θ. On a

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{\cos(\theta''-\varepsilon)}{\rho} = \cos\varepsilon.\frac{\cos\theta''}{\rho} + \sin\varepsilon.\frac{\sin\theta''}{\rho}.$$

De là résulte, en indiquant par la caractéristique δ_1 les différentielles prises dans l'hypothèse $\varepsilon =$ cons^{te},

$$(8). \; \delta\frac{\cos\theta}{\rho} = \cos\varepsilon.\delta_1\left(\frac{\cos\theta''}{\rho}\right) + \sin\varepsilon.\delta_1\frac{\sin\theta''}{\rho} - \left[\sin\varepsilon\frac{\cos\theta''}{\rho} - \cos\varepsilon\frac{\sin\theta''}{\rho}\right]\delta\varepsilon.$$

Pour plus de simplicité posons $\varepsilon = o$. Il en résulte $\theta'' = \theta$ et l'équation (8) se réduit à

$$(9). \quad . \quad . \quad . \quad . \; \delta\frac{\cos\theta}{\rho} = \delta_1\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\sin\theta}{\rho}\delta\varepsilon.$$

* Dans le cas de la surface A' on a évidemment $\omega = o$, ce qui réduit l'équation (7) à l'équation (5).

Observons que la différentielle $\delta_1 \frac{\cos\theta}{\rho}$, prise dans l'hypothèse $\varepsilon =$ cons^{te}, correspond au cas où la droite D reste fixe, et qu'en conséquence, elle a pour expression la valeur fournie par le second membre de l'équation (5). Observons, en outre, que la différentielle $\delta\varepsilon$ est précisément la vitesse angulaire désignée plus haut par ω. Cela posé, il est visible que l'équation (9) revient identiquement à l'équation (7).

Considérons les sections normales rectangulaires faites dans la surface A, l'une suivant la droite D, l'autre suivant la tangente en m à la ligne S. Si l'on désigne par r' le rayon de courbure de la première et par r celui de la seconde, on a, d'abord et évidemment,

$$r' = \frac{\delta\lambda}{\omega}.$$

Il vient ensuite, conformément au théorème de Meunier (voir n° 178, page 445),

$$r = \frac{\rho}{\sin\theta}.$$

On déduit de là,

$$(10). \quad \ldots\ldots \quad \frac{\omega.\sin\theta}{\rho.\delta\lambda} = \frac{1}{rr'}.$$

La quantité $\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$ n'étant autre chose que le module représenté par $\overline{N}_l$ au n° 176, on a, d'après la formule (14) de ce même numéro, page 439,

$$(11). \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}\right)^2 = \frac{1}{rr'} - \frac{1}{RR'}.$$

On sait, d'ailleurs, que les quantités R, R' sont les rayons de courbure principaux qui correspondent au point m de la surface A.

Eu égard aux égalités (10) et (11), l'équation (7) devient

$$(12). \quad \ldots \quad \delta\frac{\cos\theta}{\rho} = \left[\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{1}{RR'}\right]\delta\lambda.$$

Elle ne fait donc que reproduire l'équation (6), en la généralisant, c'est-à-dire en la rendant applicable non plus seulement au cas de la surface réglée A', mais bien à celui d'une surface quelconque A.

226. La formule à laquelle nous venons de parvenir peut s'étendre aisément du cas traité ci-dessus au cas général de deux systèmes de courbes quelconques tracées sur la surface A, sous la seule condition que les courbes de l'un de ces systèmes soient les trajectoires orthogonales des autres.

Soit mm' la position actuelle d'une ligne géodésique G assujettie à rester sur la surface A et à couper rectangulairement la courbe S, tandis que le point m glisse suivant cette courbe.

Fig. 87.

Imaginons qu'on ait tracé sur la surface A une suite continue de courbes quelconques toutes perpendiculaires à la ligne S. Désignons par Σ_1 les trajectoires orthogonales de ces courbes, et, comme tout à l'heure, par Σ celles qui correspondent à l'ensemble des positions de la ligne G.

Prenons sur la ligne G un point quelconque n. Par ce point passent en même temps deux trajectoires orthogonales désignées respectivement, l'une par la lettre Σ, l'autre par la lettre Σ_1. Selon que le point n, *tout en restant sur la ligne* G, est assujetti à décrire l'une ou l'autre de ces trajectoires, sa vitesse actuelle est représentée par np ou par nr, ces droites étant dirigées chacune suivant la tangente qui lui correspond. Lorsque le point n décrit la trajectoire Σ, il reste fixe sur la ligne géodésique G, et sa vitesse np est dirigée perpendiculairement à cette ligne. Lorsqu'il décrit la trajectoire Σ_1 sa vitesse nr se compose de la vitesse np et d'une autre vitesse dirigée suivant la tangente en n à la ligne G.

Tirons la droite pr, et désignons par γ l'angle rnp; par λ l'arc mn; par u la vitesse np. Il est visible que la vitesse nr a pour composantes orthogonales, d'une part, la vitesse np ou u, d'autre part, la vitesse pr ou $d\lambda$, la caractéristique d s'appliquant aux vitesses qui résultent du glissement du point m sur la ligne S. De

là résulte, en général,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{pr}{np} = \frac{d\lambda}{u},$$

et, par suite,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\gamma = \cos^2\gamma . d . \frac{d\lambda}{u} \cdot$$

Soit $\overline{W} = \frac{\cos\theta}{\rho}$ *le module* de la vitesse angulaire avec laquelle la directrice du point n sur la ligne Σ tourne autour de ce point *dans le plan tangent* rnp. Cette vitesse ayant pour expression correspondante le produit $u.\frac{\cos\theta}{\rho}$, il s'ensuit que la vitesse angulaire simultanée de la directrice du point n sur la ligne Σ_1 est représentée par la somme

$$u\frac{\cos\theta}{\rho} + d\gamma.$$

Désignons par $\frac{\cos\theta_1}{\rho_1}$ *le module* de cette dernière vitesse angulaire. Pour obtenir ce module, il faut diviser l'expression précédente par la vitesse nr, ou, ce qui revient au même, par le rapport $\frac{u}{\cos\gamma}$. On trouve ainsi

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\cos\theta_1}{\rho_1} = \left[\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{d\gamma}{u}\right]\cos\gamma,$$

et, différenciant par rapport à la caractéristique δ *,

$$(4). \quad \delta\frac{\cos\theta_1}{\rho_1} = \left[\delta\frac{\cos\theta}{\rho} + \delta.\frac{d\gamma}{u}\right]\cos\gamma - \left[\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{d\gamma}{u}\right]\sin\gamma.\delta\gamma.$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse où le point n étant d'abord en m les lignes Σ, Σ_1 coïncident primitivement avec la ligne S. Il faut

* On se rappelle que la caractéristique δ exprime les vitesses avec lesquelles varient les quantités que l'on considère, lorsqu'on passe d'un point à un autre sur une même ligne géodésique G.

poser $\gamma = o$, et l'on peut remplacer la vitesse u par la vitesse v, ou, ce qui revient au même, par la différentielle ds qui est identique à la vitesse v. La combinaison des équations (2) et (4) donne, en conséquence,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad \delta \frac{\cos \theta_1}{\rho_1} = \delta . \frac{\cos \theta}{\rho} + \frac{\delta . \left(d . \frac{d\lambda}{ds} \right)}{ds} . \text{*}$$

Substituons à la vitesse $\delta \dfrac{\cos \theta}{\rho}$ la valeur fournie par l'équa-

* On a, généralement,

$$\delta . \frac{d\gamma}{u} = \frac{\delta . d\gamma}{u} + d\gamma . \delta \left(\frac{1}{u} \right) .$$

De là résulte, pour le cas où les lignes Σ et Σ_1 coïncident originairement avec la ligne S, (la quantité $d\gamma$ s'annulant en vertu de l'équation (3)),

$$\delta . \frac{d\gamma}{u} = \frac{\delta . d\gamma}{u} = \frac{\delta . d\gamma}{ds} .$$

L'équation (2) donne $d . \dfrac{d\lambda}{u}$ pour valeur à substituer à $d\gamma$. Exprimons u en fonction de v, au moyen de l'équation (1) du n° 224, page 544. Il vient, en général,

$$d \left(\frac{d\lambda}{u} \right) = d . \left(\frac{d\lambda}{v} . \frac{\cos \varphi}{1 - \lambda \frac{\cos \theta}{\rho}} \right) = \frac{\cos \varphi}{1 - \lambda \frac{\cos \theta}{\rho}} d . \frac{d\lambda}{v} + \frac{d\lambda}{v} . d . \frac{\cos \varphi}{1 - \lambda \frac{\cos \theta}{\rho}} .$$

De là résulte, pour le cas dont il s'agit, les quantités γ, λ, φ s'annulant toutes trois, et l'équation (1) impliquant, comme conséquence, l'annulation de la quantité $d\lambda$,

$$d\gamma = d . \frac{d\lambda}{u} = d . \frac{d\lambda}{v} = d . \frac{d\lambda}{ds} .$$

On voit, par ces détails, comment on a, en toute rigueur,

$$\delta . \frac{d\gamma}{u} = \frac{\delta . d\gamma}{ds} = \frac{\delta . d . \frac{d\lambda}{ds}}{ds} .$$

tion (12) du n° 225, page 549, et, après cette substitution, remplaçons les quantités θ_1, ρ_1 par leurs valeurs initiales θ, ρ. On trouve ainsi

$$(6). \quad . \quad . \quad \delta\frac{\cos\theta}{\rho}=\left[\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}+\frac{1}{RR'}\right]\delta\lambda+\frac{\delta.d\dfrac{d\lambda}{ds}}{ds}.$$

L'équation (6) résout la question proposée pour le cas général de deux systèmes quelconques de courbes tracées sur une surface, sous la seule condition que les courbes de l'un de ces systèmes soient les trajectoires orthogonales des autres. Le premier membre exprime la vitesse avec laquelle la courbure géodésique varie dans un même système lorsqu'on passe d'une courbe à une autre suivant la trajectoire orthogonale qui correspond au point que l'on considère. Le second membre fournit la valeur développée de cette même vitesse.

On observera que dans les cas traités précédemment, la quantité $\frac{d\lambda}{ds}$ reste constamment nulle, ainsi que l'angle γ. Il en résulte que le dernier terme du second membre de l'équation (6) s'évanouit, et l'on retrouve ainsi l'équation (12) du n° 225. Dans le cas général, on a d'abord, conformément à la règle du n° 35 de la deuxième partie,

$$\delta.d.\frac{d\lambda}{ds}=d.\delta.\frac{d\lambda}{ds}.$$

Il vient ensuite, comme on le voit aisément *,

$$\delta.\frac{d\lambda}{ds}=\frac{\delta.d\lambda}{ds}=\frac{d.\delta\lambda}{ds}.$$

* On a, généralement,

$$\delta.\frac{d\lambda}{ds}=\frac{\delta.d\lambda}{ds}+d\lambda.\delta\left(\frac{1}{ds}\right).$$

De là résulte, pour le cas dont il s'agit, les quantités γ et $d\lambda$ s'annulant à la fois en vertu de l'équation (1),

$$\delta.\frac{d\lambda}{ds}=\frac{\delta.d\lambda}{ds}.$$

les détails qui précèdent impliquant la conclusion suivante : *

L'équation (5) *peut être considérée comme exprimant d'une manière générale la condition nécessaire et suffisante pour que deux systèmes de lignes tracées sur une surface soient orthogonaux.*

Reprenons l'équation (4). En opérant sur elle, comme nous l'avons fait sur l'équation (2), par voie d'inversion ou de réciprocité, on en déduit immédiatement

$$(6)\ldots\ldots \delta\frac{\cos\theta}{\rho}=\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}\delta\lambda-\frac{\delta.\frac{\delta.ds}{\delta\lambda}}{ds}.$$

On peut, d'ailleurs, parvenir à ce même résultat en observant que, du moment où l'orthogonalité persiste, l'équation (2) subsiste d'une manière générale, et peut, en conséquence, être différenciée par rapport à la caractéristique δ. Il n'est pas besoin de faire ici ce calcul. On reconnaît *à priori* qu'il conduirait nécessairement à l'équation (6).

La combinaison des équations (1) et (6) fournit la relation

$$(7)\ldots\ldots d.\frac{d.\delta\lambda}{ds}+\delta.\frac{\delta.ds}{\delta\lambda}=-\frac{ds.\delta\lambda}{R.R'}.$$

On voit, d'ailleurs, d'après ce qui précède, que *cette relation subsiste, en général, pour deux systèmes quelconques de lignes tracées sur une surface, sous la seule condition que les lignes de l'un de ces systèmes soient les trajectoires orthogonales des autres.*

Supposons que, disposant des deux variables s et λ, on assujettisse l'une et l'autre à croître ou décroître uniformément. Dans cette hypothèse, les vitesses ds et $\delta\lambda$ deviennent constantes; et

* L'équation (5) et la conclusion qu'elle implique se trouvent dans le mémoire déjà cité de M. Ossian Bonnet (pages 53 et 54).

l'on peut, en conséquence, écrire l'équation (7), sous cette autre forme,

$$(8). \quad . \quad . \quad . \quad \delta\lambda . d^2 . \delta\lambda + ds . \delta^2 ds = -\frac{ds^2 . \delta\lambda^2}{R . R'} .$$

APPLICATION A QUELQUES CAS PARTICULIERS.

1° *Surfaces et courbes orthogonales.*

228. Donnons-nous, comme au n° 183bis, page 451, trois courbes S, S_1, S_2 issues d'un même point O et résultant des intersections, deux à deux, de trois surfaces SOS_1, S_1OS_2, S_2OS. On suppose que ces surfaces font partie d'un système triple * de surfaces orthogonales. Il s'ensuit, d'après le théorème de M. Dupin, que les courbes S, S_1, S_2 sont, relativement aux surfaces SOS_1, S_1OS_2, S_2OS, et pour le point O, leurs lignes de courbure respectives, c'est-à-dire les lignes de courbure qui se croisent en ce point et qui sont, en général, au nombre de deux pour chacune de ces surfaces.

Soient γ et c_1, pour la surface SOS_1; γ_1 et c_2 pour la surface S_1OS_2; γ_2 et c pour la surface S_2OS, les rayons de courbure principaux qui correspondent au point O. On observera que les indices sont les mêmes pour chacun de ces rayons que pour celle des courbes S, S_1, S_2 qui touche en O la section principale correspondante.

En appliquant aux courbes S, S_1 la formule (5) du n° 227, page 555, on a d'abord

$$(1). \quad . \quad \frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{ds_1} + \frac{d.\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{ds} = \frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{\cos^2\theta'}{\rho'^2} + \frac{1}{\gamma . c_1},$$

les quantités (θ, ρ), (θ', ρ') se rapportant aux courbes S, S_1 et au

* Voir n° 183, page 449.

plan qui les touche en O. Il est visible, en effet, que le sens attaché aux symboles

$$\frac{\delta \frac{\cos\theta}{\rho}}{\delta\lambda}, \qquad \frac{d.\frac{\cos\theta}{\rho}}{ds_1}$$

permet de remplacer indifféremment l'un par l'autre.

Considérons la courbe S comme appartenant à la surface S_2OS. L'angle θ est celui que la section oblique osculatrice en O à la ligne S fait avec la section principale dirigée suivant la même tangente. De là résulte, en vertu du théorème de Meunier,

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{1}{c}.$$

On trouverait de même, en considérant la courbe S_1 comme appartenant à la surface S_1OS_2,

$$\frac{\cos\theta'}{\rho'} = \frac{1}{\gamma_1}.$$

Ces valeurs substituées dans l'équation (1) donnent

$$(2)\ldots\ldots \quad \frac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{1}{\gamma c_1}.$$

Il suffit, d'ailleurs, d'une simple permutation tournante pour déduire de l'équation (2)

$$(3)\ldots\ldots \quad \frac{d\frac{1}{c_1}}{ds_2} + \frac{d\frac{1}{\gamma_2}}{ds_1} = \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{1}{\gamma_1 c_2},$$

et de l'équation (3)

$$(4)\ldots\ldots \quad \frac{d\frac{1}{c_2}}{ds} + \frac{d\frac{1}{\gamma}}{ds_2} = \frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\gamma_2 c}.$$

Les équations (2), (3), (4), ainsi obtenues, sont les trois dernières des neuf formules que l'on doit à M. Lamé, sur les surfaces orthogonales et que nous avons établies directement au n° 183bis, page 458.

Supposons que les trois systèmes dont les surfaces SOS_1, S_1OS_2, S_2OS, font partie se réduisent respectivement, le premier à un plan unique, chacun des deux autres à une suite de surfaces cylindriques ayant toutes leurs génératrices perpendiculaires à ce plan. Il s'ensuit que l'on n'a plus à considérer, en réalité, que deux systèmes de lignes orthogonales S, S_1 situées dans un seul et même plan. On voit, d'ailleurs, aisément que pour passer du cas général traité ci-dessus à ce cas particulier, il suffit d'annuler en même temps chacune des quantités $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\gamma_2}$, $\frac{1}{c_1}$, $\frac{1}{c_2}$. On trouve ainsi deux identités et, en outre,

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d\frac{1}{c}}{ds_1} + \frac{d\frac{1}{\gamma_1}}{ds} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{\gamma_1^2}.$$

Au lieu de procéder, comme nous venons de le faire, on peut appliquer directement au cas dont il s'agit l'équation (5) du n° 227, page 555. On a, par hypothèse,

$$\cos\theta = 1, \qquad \cos\theta' = 1, \qquad \frac{1}{RR'} = o,$$

et de là résulte, immédiatement,

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\delta\frac{1}{\rho}}{\delta\lambda} + \frac{d\frac{1}{\rho'}}{ds} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2}.$$

Eu égard aux égalités $c = \rho$, $\gamma_1 = \rho'$; il est visible que les équations (5) et (6) sont identiques. Dues à M. Lamé, comme les précédentes, *elles expriment la condition à remplir pour que deux systèmes de lignes tracées sur un plan soient orthogonaux.*

On observera que l'équation (5) ou (6) peut s'obtenir dans des

conditions plus simples, en traitant la question d'une manière directe, d'après la marche tracée au n° 183 *bis*, ou selon les procédés des numéros 224 et suivants.

229. Considérons deux systèmes conjugués de trajectoires orthogonales appartenant à une même surface A et proposons-nous de rechercher les conditions à remplir pour qu'en prenant dans chacun de ces systèmes deux lignes quelconques déterminées, les segments interceptés sur ces lignes par celles de l'autre système conservent entre eux un rapport constant.

Soient MM′, NN′ deux lignes déterminées du premier système et *mn* une ligne quelconque du second. Si l'on considère la surface A comme engendrée par le déplacement continu de la ligne *mn*, il faut, par hypothèse, qu'il existe un rapport constant entre la vitesse v du point m sur la ligne MM′ et la vitesse simultanée du point n sur la ligne NN′.

Fig. 88.

Représentons par u cette dernière vitesse et assujettissons le point m de la ligne *mn* à glisser *uniformément* sur la ligne MM′. On a

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u = C.v,$$

v étant une constante absolue et C une quantité indépendante de la position du point m sur la ligne MM′.

L'équation (1) subsiste en général. On peut l'appliquer, en conséquence, au cas où la ligne NN′ sort du lieu qu'elle occupe en glissant sur la surface A. De là résulte, en différenciant, comme au n° 224, par rapport à la caractéristique δ,

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \delta u = C'.v,$$

la quantité C′ dérivant de la quantité C et restant, comme elle, indépendante de la position du point m sur la ligne MM′.

Sans rien changer à ce qui précède, appliquons l'équation (2) au cas où la ligne NN′, devenue mobile, sort du lieu MM′. On peut remplacer u par v, et v par ds. Il vient ainsi

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \delta.ds = C'.ds.$$

On a, d'ailleurs, conformément à l'équation (2) du n° 227, page 554,

$$(4). \quad \ldots\ldots \quad \delta.ds = -\frac{\cos\theta}{\rho}\,\delta\lambda.ds.$$

La simultanéité des équations (3) et (4) conduit à l'identité

$$(5). \quad \ldots\ldots \quad C' = -\frac{\cos\theta}{\rho}.\delta\lambda,$$

et, puisque la quantité C′ ne dépend pas de la position du point *m* sur la ligne MM′, la même condition subsiste nécessairement en ce qui concerne le produit $\frac{\cos\theta}{\rho}\,\delta\lambda$.

Cela posé, si l'on différencie l'équation (5) par rapport à la caractéristique *d*, on a évidemment

$$(6). \quad d\left(\frac{\cos\theta}{\rho}\,\delta\lambda\right) = \frac{\cos\theta}{\rho}\,d.\delta\lambda + \delta\lambda.d.\frac{\cos\theta}{\rho} = o.^{*}$$

Désignons par $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$ pour la ligne *mn*, la courbure géodésique exprimée par $\frac{\cos\theta}{\rho}$ pour la ligne MM′. L'équation (4) a sa correspondante

$$d.\delta\lambda = -\frac{\cos\theta'}{\rho'}\,ds.\delta\lambda.$$

De là résulte, en substituant cette valeur dans l'équation (6),

$$(7). \quad \ldots\ldots \quad \frac{\cos\theta}{\rho}.\frac{\cos\theta'}{\rho'} = \frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{ds},$$

* On parvient directement à ce résultat en partant de l'équation (4) et en observant, comme il est aisé de le voir *à priori*, que dans l'hypothèse où l'on raisonne, la vitesse *ds* étant supposée constante, on doit avoir

$$d.\delta.ds = o.$$

et telle est l'équation de condition qui doit être satisfaite, pour qu'en prenant à volonté deux lignes du système MM′, les segments interceptés sur ces lignes par deux quelconques de leurs trajectoires orthogonales conservent entre eux un rapport constant.

Supposons que les lignes du système MM′ soient toutes des lignes géodésiques. L'équation (7) est satisfaite identiquement par l'annulation simultanée de ses deux membres. Ce résultat s'accorde avec le théorème de M. Gauss, démontré au n° 209, page 511.

Supposons que chacune des lignes du système MM′ soit d'égale courbure géodésique. L'équation (7) ne peut subsister, en général, que si les trajectoires de ces lignes sont elles-mêmes des lignes géodésiques.

Revenons à la question proposée. *Toutes choses égales de part et d'autre*, la réciprocité, qui subsiste, par hypothèse, entre les deux systèmes considérés, permet d'écrire immédiatement, comme conséquence de l'équation (7),

$$(8). \quad . \quad . \quad \frac{\cos\theta}{\rho} \cdot \frac{\cos\theta'}{\rho'} = \frac{d\,\frac{\cos\theta}{\rho}}{ds} = \frac{d\,\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{\delta\lambda} \; {}^{*}.$$

Cette dernière équation résout la question proposée. On vérifie aisément qu'elle subsiste pour le cas des surfaces de révolution en prenant, pour double système de trajectoires orthogonales, les méridiens et les parallèles.

Si l'on voulait que la surface A pût se subdiviser en une suite quelconque de quadrilatères, tous rectangles et équilatéraux, il faudrait que l'on eût à la fois

$$\delta . ds = o, \qquad d . \delta\lambda = o,$$

et, par suite,

$$(9). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\cos\theta}{\rho} = o, \qquad \frac{\cos\theta'}{\rho'} = o.$$

* On prendra garde aux signes dont les quantités qui figurent dans cette équation doivent être affectées : ils dépendent du sens des déplacements que l'on considère et de la convention généralement adoptée pour tenir compte du sens des rotations.

Eu égard à l'équation (12) du n° 225, page 549, les équations (9) exigent que l'on ait

$$\frac{f}{RR'} = o.$$

Ce n'est donc que dans le cas des surfaces développables que la condition dont il s'agit peut se réaliser, et, dès lors, il est évidemment une infinité de façons d'y satisfaire, en prenant pour trajectoires orthogonales conjuguées deux systèmes quelconques de lignes géodésiques.

2° *Surfaces gauches.*

250. Soient A une surface gauche quelconque; D sa génératrice rectiligne; *m* un point de cette génératrice; S la trajectoire orthogonale qui correspond au point *m* et aux positions successives de la droite D sur la surface A.

Lorsque le point *m* sort du lieu qu'il occupe en glissant sur la ligne S, il entraîne avec lui la droite D et lui fait prendre un état de mouvement déterminé comme il suit :

Fig. 89.

Soient *mt* la tangente en *m* à la ligne S; *mo* la position actuelle de la droite D; *o* le centre qui correspond à la courbure géodésique affectée en *m* par la ligne S.

La droite D *est animée de deux rotations simultanées* ω *et* W, *respectivement établies, la première autour de la tangente* mt, *l'autre autour de la normale en* o *au plan tangent* omt.

Opérons comme si la vitesse ω était égale à l'unité. Ce procédé plus simple exige que nous substituions à la vitesse W la vitesse $\frac{W}{\omega}$. Si, d'ailleurs, nous voulons plus tard restituer leurs vraies valeurs aux vitesses considérées, il suffira de les multiplier par le facteur ω.

Représentons par *mt* la vitesse du point *m*. Elle est due tout

entière à la rotation établie autour du point o dans le plan tangent omt, et l'on a, par hypothèse,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad mt = \frac{W}{\omega} . mo.$$

Tirons la droite ot et considérons un point quelconque n de la droite D. La vitesse du point n a pour composantes rectangulaires deux vitesses représentées en grandeur, l'une par mn, l'autre par np, le segment np étant parallèle à mt et se terminant à la droite ot; il s'ensuit qu'elle est représentée en grandeur par l hypoténuse mp, et qu'en conséquence elle atteint son *minimum* lorsque le point n est choisi de manière à ce que la droite mp tombe à angle droit sur la droite ot.

De là résulte immédiatement la déduction suivante :

Selon que le point m *est ou n'est pas le point central de la droite* D, *la courbure géodésique affectée en* m *par la ligne* S *est nulle ou n'est pas nulle.*

Il est clair, en effet, que le point m ne peut se confondre avec le point n, supposé central, qu'autant que la droite ot devient parallèle à la droite D, ce qui correspond à l'annulation de la vitesse W.

Considérons le lieu des points centraux, autrement dit *la ligne de striction* de la surface A, et reportons-nous à l'équation (2) du n° 216, page 526,

$$(2). \quad . \quad di = dx . \left[\frac{\cos\theta}{\rho}\right]_x + dy \left[\frac{\cos\theta}{\rho}\right]_y - ds \left[\frac{\cos\theta}{\rho}\right]_s .$$

Si nous appliquons cette équation à la ligne de striction, en prenant pour axes coordonnés, d'une part, les génératrices rectilignes, d'autre part, leurs trajectoires orthogonales, on a d'abord et généralement, en ce qui concerne les génératrices rectilignes,

$$\left[\frac{\cos\theta}{\rho}\right]_x = o.$$

On a ensuite, d'après ce qui précède,

$$\left[\frac{\cos\theta}{\rho}\right]_y = o,$$

cette dernière équation subsistant pour le lieu des points centraux et rien que pour ce lieu.

De là résulte

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \frac{di}{ds} + \left[\frac{\cos\theta}{\rho}\right]_s = o, \text{ *}$$

l'équation (3) s'appliquant à la ligne de striction et déterminant cette ligne à l'exclusion de toute autre. On voit, d'ailleurs, aisément, que l'équation (3) implique les déductions suivantes :

1° *La ligne de striction des surfaces gauches est ou n'est pas une de leurs lignes géodésiques selon qu'elle coupe ou qu'elle ne coupe pas sous un même angle toutes les génératrices rectilignes ;*

2° *Parmi les lignes tracées sur une surface gauche, la ligne de striction est la seule qui puisse satisfaire en même temps à la condition d'être le chemin le plus court entre ses différents points et de couper sous un angle constant toutes les génératrices rectilignes.*

Revenons aux données premières et proposons-nous de déterminer, comme au n° 224, page 542, la différentielle de la vitesse *mp* dans le passage d'un point à un autre sur la droite *mo*. Si nous partons du point *m* et que nous représentions par *to* la vitesse du point *t* sur la droite fixe *ot*, il est visible que le segment *mt* représente en même temps la vitesse du point *m* et sa différentielle. On voit aussi, sans la moindre difficulté, que la quantité $\delta\lambda$ du n° 224,

* Cette équation se trouve avec ses conséquences dans le mémoire déjà cité de M. Ossian Bonnet, (page 71).

n'est autre chose que le segment *mo*. Il suit, de là, qu'on peut écrire immédiatement

$$(4). \quad . \quad . \qquad \delta ml = -ml = -\frac{W}{\omega}mo = -\frac{W}{\omega}\delta\lambda.$$

Soit v la vraie valeur de la vitesse représentée ci-dessus par mt. Il suffit d'introduire le facteur constant ω dans les deux termes de l'équation (4) pour en déduire, comme conséquence directe,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta v = -W.\delta\lambda. = -v\frac{\cos\theta}{\rho}\delta\lambda,$$

la vitesse W étant évidemment égale au produit de la vitesse v par le module $\frac{\cos\theta}{\rho}$ de la courbure géodésique.

On retrouve ainsi l'équation (3) du n° 224, page 542.

3° *Lignes et surfaces* minima.

231. Soit S une ligne assujettie à rester sur une surface A et pouvant s'y déplacer comme on veut, avec ou sans déformation.

Plaçons-nous à l'instant précis où la ligne S s'écarte d'une position quelconque déterminée. Ses différents points peuvent être considérés comme sortant des lieux qu'ils occupent avec des vitesses normales à la ligne S et tangentes à la surface A. Ces vitesses, dites *de circulation*, sont précisément celles qui figurent sous le signe $\delta\lambda$ dans tout ce qui précède. On doit observer, sans doute, qu'elles sont *continûment variables* d'un point à un autre; quoi qu'il en soit, il est visible que la quantité $\delta v = \delta.ds$ des numéros 224, 227 et 230 ne cesse pas d'exprimer la vitesse avec laquelle la différentielle ds croît ou décroît sur la ligne S à l'origine du déplacement que l'on considère. On peut, en conséquence, formuler dès à présent la déduction suivante :

Théorème 1. — *Étant donné sur la ligne* S *un segment quelconque, limité par deux points déterminés, ce segment commence*

par croître ou par décroître selon que les vitesses exprimées, pour chacun de ses points, par $\delta.ds$ *sont toutes positives ou toutes négatives.*

Il est un second théorème applicable au cas qui nous occupe. Démontré plus loin, n° 250, il s'énonce comme il suit :

Théorème 2. — *L'aire engendrée par une ligne* S *qui se meut dans l'espace avec ou sans changement de forme a pour différentielle le produit de cette ligne par sa vitesse moyenne de circulation.*

Partons de ces prémisses et proposons-nous le problème suivant :

Trouver la ligne de longueur donnée qui circonscrit une aire maximum *sur la surface* A, *ou, ce qui revient au même, la ligne de longueur* minimum *pour une aire circonscrite de grandeur donnée.*

On voit *à priori* que la ligne cherchée ne peut avoir aucun segment dont la courbure géodésique tourne sa convexité vers l'intérieur de l'aire circonscrite. Autrement, en effet, on pourrait augmenter cette aire et diminuer son contour. Il suffirait pour cela de prendre deux points quelconques du segment convexe et de substituer à l'arc qu'ils comprennent entre eux la ligne géodésique qui leur correspond.

Ce premier point résolu, imaginons, d'ailleurs, que la ligne cherchée soit quelconque. Il s'ensuit que la courbure géodésique varie généralement d'un point à un autre et que, tournant partout *sa concavité* vers l'*intérieur* de l'aire circonscrite, elle ne cesse pas d'être *constamment croissante* sur une certaine étendue MN'.

Prenons sur MN' deux arcs S, S' de même longueur et représentés respectivement, l'un par MN, l'autre par M'N'.

Soit m un point quelconque de l'arc S et m' son conjugué sur l'arc S'. Ces points sont dits conjugués parce que les distances arcuelles Mm, $M'm'$ sont égales de part et d'autre.

Fig. 90.

Désignons par $\frac{\cos\theta}{\rho}$ et par $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$ les courbures géodésiques qui correspondent respectivement l'une au point m de l'arc S, l'autre au point m' de l'arc S'. Si nous posons, en général,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\cos\theta'}{\rho'} = (1 + 2\mu)\frac{\cos\theta}{\rho},$$

il est visible que la quantité μ reste toujours positive et supérieure à zéro.

Assujettissons l'arc S' à se déplacer sur la surface A, ses extrémités restant fixes et chacun des points qu'elles comprennent entre elles glissant vers l'*intérieur* de l'aire circonscrite sans qu'il y ait solution de continuité.

Soit $\delta\lambda$ la vitesse de circulation communiquée au point quelconque m' dans le déplacement dont il s'agit pour l'arc S'.

Opérons de même en ce qui concerne l'arc S, à cela près que le point m conjugué avec le point m' glisse vers l'*extérieur* de l'aire circonscrite, et que sa vitesse de circulation soit égale au produit $(1 + \mu)\,\delta\lambda$.

Considérons, en premier lieu, la somme algébrique des aires engendrées par les arcs S, S', dans leur déplacement simultané sur la surface A. En vertu du théorème 2, elle a pour différentielle

$$S.M(1 + \mu)\delta\lambda - S'.M\delta\lambda,$$

et, eu égard à l'égalité des longueurs totales S, S',

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S.M(\mu.\delta\lambda).$$

Cette différentielle étant positive, on voit qu'elle implique, comme première déduction, l'énoncé suivant :

L'aire circonscrite commence par augmenter.

Considérons, en second lieu, la somme algébrique des différentielles, exprimées simultanément pour les points quelconques conjugués m, m', l'une par $\delta.ds$, l'autre par $\delta.ds'$. On a, d'après ce qui precède, et conformément à la formule (2) du n° 227, page 554,

$$\delta.ds = (1+\mu)\delta\lambda.ds.\frac{\cos\theta}{\rho},$$

$$\delta.ds' = -\delta\lambda.ds'\frac{\cos\theta'}{\rho'} = -(1+2\mu)\delta\lambda.ds'\frac{\cos\theta}{\rho}.$$

De là résulte, eu égard à l'égalité constante des quantités ds et ds'

$$(3).\quad\ldots\quad \delta(ds+ds') = -\mu.\delta\lambda.ds.\frac{\cos\theta}{\rho}.$$

La somme exprimée par l'équation (3) est constamment négative pour toute l'étendue des arcs conjugués S, S'. On a donc, en vertu du théorème 1, cette autre déduction :

Le contour de l'aire circonscrite commence par décroître.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir et que nous avons formulés en italiques, sont absolument généraux. Ils prouvent, pour toute ligne dont la courbure géodésique n'est point uniforme, qu'on peut en diminuer la longueur et augmenter en même temps l'aire qu'elle circonscrit. On en déduit, comme conséquence directe et évidente, le théorème suivant qui résout la question proposée *.

La ligne de longueur donnée, qui circonscrit une aire maximum *sur une surface, a même courbure géodésique en chacun de ses points.*

* Ce théorème, démontré depuis longtemps dans le journal de M. Crelle, a été donné plus récemment par MM. Delaunay et Ossian-Bonnet.

On peut dire, plus généralement,

Les lignes dont la longueur est un minimum, *par rapport aux aires qu'elles limitent sur une surface, ont leur courbure géodésique constante et uniforme dans chacune des parties dont on peut disposer séparément.*

232. Appliquons la marche que nous venons de suivre au cas d'un segment unique S dont la courbure géodésique tournerait sa convexité vers l'intérieur de l'aire circonscrite. On a, en même temps, pour la différentielle de l'aire engendrée,

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{S.M}\delta\lambda,$$

et, pour la vitesse $\delta.ds$,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta.ds = -\delta\lambda.ds\frac{\cos\theta}{\rho},$$

le déplacement ayant lieu de l'intérieur vers l'extérieur.

On voit, par là, que l'hypothèse d'un segment convexe implique la possibilité d'un changement qui diminue le contour en même temps qu'il augmente l'aire circonscrite. Cette hypothèse est donc inadmissible, ainsi que nous l'avons établi tout d'abord.

Prise à part et considérée isolément, l'équation (5) fait voir que la ligne tracée entre deux points sur une surface ne peut être la plus courte qu'autant qu'elle satisfait partout à la condition générale

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = 0.$$

Ce résultat nous ramène à la propriété connue des lignes géodésiques.

S'agit-il de la plus courte distance comprise sur une surface entre un point m et une ligne S? Soit n le point de la ligne S où vient aboutir la plus courte distance cherchée : on sait déjà que la ligne mn est une des lignes géodésiques passant par le point m. On voit, d'ailleurs, aisément qu'elle doit tomber à angle droit sur

la ligne S : cela résulte implicitement des considérations précédentes. On peut aussi le reconnaître en se représentant, d'une part, toutes les lignes géodésiques issues du point *m*, d'autre part, celle de leurs trajectoires orthogonales qui passe par le point *n*. Les différents points de cette trajectoire étant tous équidistants du point *m*, il est visible que si elle coupait obliquement la ligne S, la distance *mn* augmenterait ou diminuerait selon qu'on déplacerait le point *n* dans un sens ou dans l'autre.

Déterminée par la condition d'être géodésique et de tomber à angle droit sur la ligne S, la ligne *mn* peut être un *minimum* ou un *maximum*. En général, elle sera l'un ou l'autre, suivant que la courbure géodésique affectée en *n* par la ligne S sera moindre ou plus grande que celle qui correspond à ce même point dans la trajectoire orthogonale mentionnée ci-dessus *.

S'agit-il enfin de deux lignes S, S′ tracées sur une même surface et dont on demande la plus courte distance? Il n'est pas besoin de nouveaux détails pour reconnaître que cette plus courte distance doit tomber à angle droit sur les lignes S, S′. La ligne géodésique déterminée par cette condition peut donner, suivant les cas, un *maximum* ou un *minimum*. Cela dépend, comme tout à l'heure, des courbures géodésiques à considérer de part et d'autre, à chacune des deux extrémités de la plus courte distance. Si les différences que ces courbures présentent, en général, étaient de signe contraire, la solution tomberait en défaut et cesserait ainsi de correspondre, soit à un *minimum*, soit à un *maximum* proprement dit.

Résumant en quelques mots les détails qui précèdent et les déductions du n° 231, nous dirons :

Les lignes de longueur minimum *tracées sur une surface ont même courbure géodésique en tous les points de chacune de leurs parties distinctes. Cette courbure est toujours nulle pour le cas*

* On ne perdra pas de vue que la courbure géodésique affectée en *n* par la ligne S est considérée comme positive ou comme négative selon qu'elle tourne sa concavité ou sa convexité du côté du point *m*.

du minimum *absolu*. *Elle n'est pas nulle, en général, pour le cas du* minimum *relatif*.

233. Les considérations développées dans le n° 231 peuvent aisément s'étendre au cas des surfaces et des volumes qu'elles circonscrivent. Commençons, à cet effet, par établir les théorèmes dont nous avons besoin.

Soit A une surface quelconque, pouvant se déplacer comme on veut, avec ou sans déformation.

Plaçons-nous à l'instant précis où la surface A s'écarte d'une position quelconque déterminée. Ses différents points peuvent être considérés comme sortant des lieux qu'ils occupent avec des vitesses normales à la surface A. Représentons par $\delta\lambda$ ces vitesses, dites *de circulation*, et cherchons d'abord comment elles déterminent les vitesses correspondantes avec lesquelles la différentielle $d.dA$ croît ou décroît sur la surface A, à l'origine du déplacement que l'on considère.

Soient S une ligne tracée sur la surface A; m un point quelconque de cette ligne; B le lieu des droites menées suivant la ligne S normalement à la surface A. En même temps que la surface A sort du lieu qu'elle occupe, le point m glisse sur la surface B avec sa vitesse de circulation $\delta\lambda$ et l'on a, conformément à la formule (2) du n° 227, page 554,

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta.ds = -\delta\lambda.ds.\frac{\cos\theta}{\rho}.$$

Soit P le plan osculateur et R_1 le rayon de courbure qui correspondent respectivement pour le point m, l'un à la ligne S, l'autre à la section normale de même direction. L'angle θ est l'angle du plan P avec le plan qui touche en m le lieu B, autrement dit l'angle que la normale en m à la surface A fait avec le rayon de courbure ρ. De là résulte, conformément au théorème de Meunier,

$$\rho = R_1 \cos\theta,$$

et, par suite,

$$(2) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta.ds = -\frac{\delta\lambda.ds}{R_1}.$$

Soit σ une deuxième ligne tracée sur la surface A et passant par le point m. On a, comme ci-dessus,

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \delta . d\sigma = -\frac{\delta\lambda . d\sigma}{R_2}.$$

R_2 étant le rayon de courbure de la section normale qui correspond pour le point m à la direction fournie par la ligne σ.

Supposons que les lignes S et σ se croisent au point m sous un angle quelconque α. On déduit aisément de la formule applicable aux quadratures et démontrée plus loin, n° 231,

$$d . dA = ds . d\sigma . \sin\alpha.$$

De là résulte, en général,

$$\delta . (d . dA) = [ds . \delta . d\sigma + d\sigma . \delta . ds] \sin\alpha + ds . d\sigma . \delta\alpha . \cos\alpha,$$

et, pour le cas particulier où les lignes S et σ sont orthogonales,

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \delta(d . dA) = ds . \delta . d\sigma + d\sigma . \delta . ds.$$

La combinaison des équations (2), (3) et (4) conduit au résultat cherché

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \delta(d . dA) = -\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] ds . d\sigma . \delta\lambda.$$

Soient R et R' les rayons de courbure principaux qui correspondent au point m de la surface A. On a, généralement,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \overline{W},$$

la quantité $\overline{W}$ étant, comme on l'a vu au n° 177, page 441, le module de la courbure moyenne affectée en m par la surface A.

Écrivons, d'après ce qui précède,

$$(6) \quad . \quad \delta(d . dA) = -\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right] ds . d\sigma . \delta\lambda = -\overline{W} . ds . d\sigma . \delta\lambda.$$

L'équation (6) est, par rapport aux surfaces, ce qu'est, par rapport aux lignes, l'équation (2) du n° 227, page 554.

234. Reportons-nous à la dernière équation. Elle implique la déduction suivante :

THÉORÈME 1. — *Étant donné sur la surface* A *un segment quelconque, limité par une suite continue de points déterminés, ce segment commence par croître ou par décroître selon que les vitesses exprimées pour chacun de ses points par la quantité* $\delta(\mathrm{d}.\mathrm{dA})$ *sont toutes positives ou toutes négatives.*

Il est un second théorème applicable au cas qui nous occupe. Démontré plus loin, au n° 262, il s'énonce comme il suit :

THÉORÈME 2. — *Le volume engendré par une aire qui se meut avec ou sans changement de forme a pour différentielle le produit de cette aire par sa vitesse moyenne de circulation.*

Partons de là, et proposons-nous le problème suivant :

Trouver la surface d'aire donnée qui circonscrit un volume maximum, *ou, ce qui revient au même, la surface d'aire* minimum *pour un volume circonscrit de grandeur donnée.*

Comparons ce problème à celui du n° 231, page 566 : comparons, en même temps, les équations et les théorèmes qui se correspondent de part et d'autre. Si d'un côté, pour les lignes, c'est leur courbure géodésique qui intervient comme principe et base de solution, de l'autre, pour les surfaces, c'est leur courbure moyenne qui remplit identiquement le même rôle. Cette simple observation permet d'étendre immédiatement aux surfaces les résultats obtenus pour les lignes et de les résumer, comme il suit :

Les surfaces dont l'aire est un minimum *ont même courbure moyenne en tous les points de chacune de leurs parties distinctes. Cette courbure est toujours nulle pour le cas du* minimum *absolu ; elle n'est pas nulle, en général, pour le cas du* minimum *relatif.*

Ajoutons quelques détails pour justifier, s'il en est besoin, l'énoncé précédent.

S'agit-il d'abord du *minimum* absolu? Quelle que soit la surface cherchée, si sa courbure moyenne n'est pas nulle en chaque point, on peut toujours trouver sur cette surface un segment A, supposé tel *que la courbure moyenne n'y change pas de signe.*

Prenons à part le segment A. Fixons-en le contour et, sans le déchirer *, communiquons à ses points intérieurs des vitesses de circulation qui les portent tous à la fois d'un seul et même côté de leur lieu actuel. Selon que ce déplacement s'effectue dans l'un ou l'autre des deux sens qu'il comporte, les vitesses correspondantes

$$\delta.(d.dA) = -\overline{W}ds.d\sigma.\delta\lambda$$

sont toutes positives ou toutes négatives. Il suit de là et du théorème 1 que le segment A commence par croître ou par décroître suivant le sens qu'on attribue à son déplacement. Cette première déduction implique évidemment la conclusion suivante :

Les surfaces dont l'aire est un minimum *absolu pour un contour quelconque déterminé ont leur courbure moyenne constamment nulle.*

S'agit-il ensuite du *minimum* relatif? On voit tout d'abord qu'il ne peut y avoir sur la surface cherchée aucun segment A dont la courbure moyenne tourne sa *convexité* vers *l'intérieur* du volume circonscrit. Autrement, en effet, si l'on déformait ce segment, sans le déchirer, les points du contour restant fixes, et chacun des autres glissant *vers l'extérieur,* suivant la normale qui lui correspond, les vitesses δ $(d.dA)$ seraient toutes négatives. Il y aurait donc à la fois augmentation du volume circonscrit et diminution de l'enveloppe, ce qui, par hypothèse, est contradictoire.

Cela posé, il suffit d'opérer, comme au n° 251, pour parvenir, en ce qui touche les surfaces, aux résultats obtenus concernant les lignes.

* Il suffit pour cela qu'il n'y ait aucun changement brusque dans les vitesses de circulation communiquées simultanément aux différents points du segment A.

La courbure moyenne devant être partout de même signe, elle ne peut varier, d'ailleurs, sans être constamment croissante sur une certaine étendue. On peut, dès lors, substituer aux arcs S, S' deux segments A, A', donner à chacun de ces segments même grandeur totale et les conjuguer entre eux, points par points, de telle façon que la courbure moyenne l'emporte en chaque lieu du segment A' sur celle qui lui correspond au lieu conjugué du segment A. Le reste s'achève sans difficulté, la marche restant absolument la même et conduisant à la conclusion suivante :

Les surfaces, dont l'aire est un minimum *par rapport aux volumes qu'elles limitent, ont leur courbure moyenne concave vers l'intérieur, et la même en tous les points de chacune de leurs parties distinctes.*

Indiquons comme corollaires deux conséquences faciles à établir d'après les données précédentes.

Soient A une série de surfaces à courbure moyenne nulle et se succédant d'une manière continue. Traçons sur l'une d'elles un contour quelconque fermé, et, par ce contour, concevons une surface B assujettie à couper orthogonalement toutes les autres. *Les aires interceptées par la surface* B, *sur les surfaces* A, *ont toutes même étendue totale.*

Soit encore A une surface assujettie à être un *minimum* sous la seule condition d'aboutir librement à une surface donnée B. *Déterminée par la condition d'avoir en chaque point une courbure moyenne nulle, la surface* A *doit, en outre, tomber à angle droit sur la surface* B.

Voir, pour dernière application, la note finale, placée à la suite du chapitre XIV. On y fixe, par rapport au tracé des lignes considérées, le sens géométrique de l'équation

$$\frac{d\dfrac{\cos\theta}{\rho}}{ds} = \pm\frac{\delta\dfrac{\cos\theta'}{\rho'}}{\delta\lambda}.$$

CHAPITRE XIII.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES SURFACES QU'ON PEUT APPLIQUER L'UNE SUR L'AUTRE SANS DÉCHIRURE NI DUPLICATURE.

---

255. Nous avons vu au n° 207, page 506, quelles sont, parmi les surfaces réglées, celles qu'on désigne sous le nom de surfaces développables. Elles se distinguent des autres en ce qu'elles n'ont qu'un seul et même plan tangent pour tous les points d'une même génératrice rectiligne. De là résulte la propriété fondamentale qui les caractérise et que leur nom rappelle : *elles peuvent se développer sur un plan et s'y appliquer, point par point, sans déchirure ni duplicature.* Cette propriété comprend implicitement les suivantes :

1° *Les surfaces développables peuvent toutes s'appliquer l'une sur l'autre, sans extension ni contraction d'aucun de leurs éléments linéaires ou superficiels ;*
2° *Étant données deux surfaces développables, on peut toujours pour chaque point de l'une, trouver sur l'autre un point correspondant, les points ainsi conjugués ayant pour lieux respectifs des arcs de même longueur.*

Arrêtons-nous au dernier de ces deux énoncés. Bien qu'il soit, en apparence, plus restreint que le premier, on reconnaît aisément qu'il l'implique. On conçoit, dès lors, que, procédant par voie d'extension et considérant, non plus seulement deux surfaces développables, mais bien deux surfaces quelconques choisies de manière à remplir, l'une par rapport à l'autre, la condition du dernier énoncé, on ait été conduit à dire de ces surfaces qu'elles sont applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.

Dans tous les cas, rien ne fait obstacle à ce que l'on admette, comme vérité de définition, l'énoncé général ainsi formulé :

Étant données deux surfaces, si pour chaque point de l'une on peut trouver sur l'autre un point correspondant, LES POINTS AINSI CONJUGUÉS AYANT POUR LIEUX RESPECTIFS DES ARCS DE MÊME LONGUEUR, *on dit de ces surfaces qu'elles sont applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.*

Avant d'aller plus loin, cherchons s'il n'est pas, pour d'autres surfaces que les surfaces développables proprement dites, quelque procédé simple qui permette de les appliquer ou de les transporter l'une sur l'autre, sans déchirure ni duplicature, autrement dit, sans extension ni contraction d'aucun de leurs éléments linéaires *. Les exemples qui suivent résolvent, en partie, cette question délicate.

236. Considérons, en premier lieu, les hélicoïdes gauches et proposons-nous la question suivante :

Étant donné un hélicoïde gauche, determiner la série des hélicoïdes qui comprennent l'hélicoïde donné et qui peuvent se développer l'un sur l'autre, sans déchirure ni duplicature.

Soient H l'hélicoïde donné; A son axe; D sa génératrice rectiligne. On sait comment s'engendre l'hélicoïde H, la droite D étant animée à la fois de deux mouvements uniformes qui consistent respectivement, l'un en une translation parallèle à l'axe A, l'autre en une rotation autour de ce même axe.

Prenons la droite D dans une position quelconque déterminée. Nous pouvons la faire tourner sur elle-même, sans modifier, pour aucun de ses points, ni la vitesse actuelle de ce point, ni le plan tangent qui lui correspond sur l'hélicoïde. Quelle que soit la

* Dès qu'il y a transport sans déchirure ni duplicature, il s'ensuit également qu'il n'y a ni extension ni contraction d'aucun élément superficiel. Cette conséquence peut être considérée comme évidente *à priori*. Elle résulte, d'ailleurs, des principes exposés dans le chapitre suivant, en ce qui concerne la quadrature des surfaces.

rotation introduite additionnellement autour de la droite D, dès qu'on la compose avec la translation et la rotation déjà mentionnées, elle se résout en une translation parallèle à un certain axe A′ et en une rotation établie simultanément autour de ce même axe.

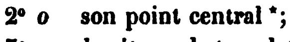
Fixons l'axe A′ et assujettissons la droite D à sortir du lieu qu'elle occupe, en persistant par rapport à cet axe dans le double mouvement qui résulte de la composition précédente. Il en résulte que la droite D engendre un hélicoïde H′, ayant avec l'hélicoïde H une génératrice commune et touchant ce même hélicoïde en tous les points de cette génératrice.

Cela posé, imaginons qu'on communique à chacun des hélicoïdes H, H′ le double mouvement déterminé d'abord pour leur génératrice respective. Il est évident qu'ils ne sortent ni l'un ni l'autre des lieux qu'ils occupent et qu'ils se développent l'un sur l'autre, point par point, sans déchirure ni duplicature. On voit, d'ailleurs, aisément, qu'ils réalisent, *l'un par rapport à l'autre*, toutes les conditions établies au n° 207, comme conséquences du développement des surfaces développables proprement dites.

Les détails qui précèdent indiquent suffisamment la marche à suivre pour résoudre la question proposée. Tout se réduit à quelques constructions très-simples, fondées sur les notions élémentaires de cinématique et de géométrie. Bornons-nous à présenter le résultat final et laissons au lecteur le soin d'en vérifier l'exactitude, ce qui ne présente aucune difficulté.

L'hélicoïde H étant donné, par hypothèse, on en connait les divers éléments : soient, en conséquence,

Fig. 91.



1° DD la génératrice rectiligne;

2° o son point central *;

3° om la vitesse de translation parallèle à l'axe A;

4° on la rotation établie autour de ce même axe;

5° p la plus courte distance des droites A et D.

Le plan de la figure étant celui que déterminent les droites oD, om, désignons-le par Q. (On sait que la plus courte distance p se projette en o sur le plan Q).

* On sait que le point central est situé sur la plus courte distance des droites D et A.

Par le point *n*, menons la droite indéfinie BB, parallèle à DD, et du point *o*, abaissons sur cette droite la perpendiculaire *ob*.

Élevons en *m* sur *om* une perpendiculaire et déterminons-en l'extrémité *a* par la condition que la projection du segment *ma* sur la droite DD soit égale au produit connu *p*.*ob*.

Tirons *oa*, et sur cette droite prise pour diamètre, construisons la circonférence de cercle *omac*.

Cela fait, voici la solution.

« On peut, *toutes choses égales d'ailleurs*, substituer à la » corde *om* une corde quelconque *om'*. L'hélicoïde désigné par » H' et correspondant à la corde *om'* est déterminé comme il » suit :

» Son axe A' est parallèle à *om'*; il coupe la plus courte dis- » tance *p* à une distance du point *o* représentée par le rapport du » segment *ae'* au segment *ob*, *ae'* étant la projection de la corde » *m'a* sur la droite DD ou sa parallèle *ca*.

» Dans la génération de l'hélicoïde H', la droite D glisse paral- » lèlement à l'axe A' avec la vitesse *om'*; elle tourne en même » temps autour de cet axe avec la vitesse *on'* » *.

Les hélicoïdes H' ainsi déterminés sont tous conjugués avec l'hélicoïde H. Ils peuvent se développer l'un sur l'autre, sans déchirure ni duplicature. Parmi ces hélicoïdes, il en est trois, en général, qu'il convient de distinguer.

L'un est l'hélicoïde dont l'axe dirigé suivant *oa* coupe la génératrice D au point *o*.

Le second est l'hélicoïde gauche à plan directeur, dont l'axe est dirigé parallèlement à la droite *oc*.

Le troisième se résout en un hyperboloïde de révolution dont l'axe a pour direction celle de la droite qui touche en *o* la circonférence *omac*.

Dans le cas particulier, où la vitesse *oa* du point central est dirigée perpendiculairement à la génératrice D, les deux premiers

* On observera que l'axe A' est situé en avant ou en arrière du plan Q, selon que le point *m'* est au-dessus ou au-dessous de la perpendiculaire *ai* abaissée du point *a* sur la droite DD.

de ces trois hélicoïdes se confondent en un seul. Le dernier se réduit à son axe et s'évanouit en s'identifiant avec la génératrice. On voit, aisément, qu'en ce cas, le produit des vitesses de translation et de rotation est constant pour tous les hélicoïdes *.

Rien ne changerait dans les déductions précédentes, si, au lieu de demeurer fixe, comme on l'a supposé pour la génération de l'hélicoïde H', l'axe A' passait continûment par toutes les déterminations qu'il comporte, et qu'en même temps, la génératrice D prît, pour chacune de ces déterminations, les vitesses de translation et de rotation qui lui correspondent. De là résulte une infinité de surfaces gauches, comprenant les hélicoïdes H', conjuguées comme eux avec l'hélicoïde H et susceptibles de se développer les unes sur les autres, sans déchirure ni duplicature.

Nous avons fait observer que parmi les hélicoïdes H', il en est un dont l'axe est coupé par la génératrice D. On voit, d'ailleurs, aisément, que cette génératrice coupe sous un angle constant le lieu des points centraux, autrement dit, *la ligne de striction.* Il suit de là, que les lignes de striction des hélicoïdes H' et des surfaces susceptibles de s'appliquer sur eux, sans déchirure ni duplicature, sont les chemins les plus courts entre les différents points de ces lignes, et qu'elles sont coupées sous un angle constant par les génératrices rectilignes qui leur correspondent respectivement. Ces résultats s'accordent avec les déductions du n° 230, page 563.

237. Considérons, en second lieu, une surface gauche quelconque et proposons-nous la question suivante :

Étant donnée une surface gauche quelconque, déterminer la série des surfaces de même genre qui comprennent la surface donnée et peuvent se développer l'une sur l'autre, sans déchirure ni duplicature, par application mutuelle et réciproque de leurs génératrices rectilignes.

Soit A la surface donnée et D sa génératrice rectiligne. Imagi-

* Voir au besoin pour plus de détails, les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, (2me série, tome XI, n° 4).

nons que la droite D se meuve en restant sur la surface A. On peut, à mesure qu'elles s'engendrent continûment, distinguer les parties déjà engendrées par la droite D de celles qui ne le sont pas encore, et assujettir les premières à tourner autour de cette droite d'un mouvement commun. Quelle que soit la rotation établie, comme on vient de le dire, autour de la droite mobile D, elle ne modifie en aucune façon les vitesses actuelles des différents points de cette droite. Il suit évidemment de là, qu'elle a pour unique effet de transformer la surface donnée A en une surface A', susceptible d'une infinité de déterminations différentes, exprimant pour chacune un des développements que comporte la surface A et résolvant ainsi la question proposée.

Sans rien changer à ce qui précède, imaginons qu'à partir d'une position quelconque de la droite D, on continue la surface A' en lui assignant d'avance sa forme définitive. La rotation établie autour de la droite D aura maintenant pour effet d'appliquer continûment et successivement toutes les génératrices rectilignes de la surface A' sur les génératrices correspondantes de la surface A, de telle façon que la droite D pourra être considérée comme décrivant à la fois les deux surfaces A, A', la première étant fixe et la seconde tournant tout entière autour de la droite D.

Lorsque la droite D se meut sur la surface A', il est indifférent que cette surface demeure fixe ou qu'elle tourne autour de la droite D. Rien n'est modifié par ce mouvement, ni dans les grandeurs absolues, ni dans les directions relatives des vitesses actuelles de ses différents points. Concluons que les lignes décrites simultanément par un même point quelconque de la droite D, l'une sur la surface A, l'autre sur la surface A', ont même longueur et coupent sous un même angle les génératrices rectilignes qui se correspondent de part et d'autre.

On sait que, pour identifier les états de mouvement de deux droites qui sortent en même temps d'un même lieu, il est nécessaire et suffisant de faire coïncider leurs points centraux, les vitesses de ces points et, en outre, celles de deux autres points quelconques, situés en un même lieu sur chacune de ces droites.

Partant de là, et de ce qui précède, on peut formuler comme il suit les conditions à remplir pour que deux surfaces gauches puissent se développer l'une sur l'autre, sans déchirure ni duplicature, par application mutuelle et réciproque de leurs génératrices rectilignes :

1° *Les génératrices rectilignes conjuguées doivent couper sous un même angle les lignes de striction correspondantes à chacune des surfaces et intercepter sur ces lignes des arcs égaux ;*

2° *La distance comprise, sur deux génératrices conjuguées, entre leur point central et celui où le plan tangent fait un angle de 45° avec le plan tangent au point central, doit être la même de part et d'autre.*

Observons que les plans tangents tournent d'un même angle pour d'égales distances franchies, à partir du point central, sur deux génératrices quelconques rectilignes et conjuguées. Il en résulte que les modules $\overline{N}_z$ et $\frac{1}{\sqrt{RR'}}$ des numéros 203 et 204, pages 497 et 499, sont les mêmes de part et d'autre. On peut exprimer ce résultat, en disant que les surfaces A et A' ont même courbure en leurs points conjugués. Nous verrons plus loin comment cette dernière condition suffit à elle seule pour impliquer les autres.

238. Considérons, pour dernier exemple, les surfaces de révolution et proposons-nous la question suivante :

Étant donnée une surface de révolution, déterminer parmi les surfaces de même genre celles qui comprennent la surface donnée et qui peuvent se transporter l'une sur l'autre, sans déchirure ni duplicature, par application mutuelle et réciproque de leurs parallèles respectifs.

Soient MN, M'N' deux droites indéfinies, parallèles et fixes. Soient en même temps *mn*, *m'n'* deux segments quelconques de grandeur constante, assujettis à glisser comme on veut, l'un sur la droite MN, l'autre sur la droite M'N'. Tirons les droites *mm'*, *nn'* et considérons le trapèze *mnn'm'*. Quelle que soit la position relative des seg-

Fig. 92.

ments mn, $m'n'$, l'aire trapézoïdale $mnn'm'$ demeure invariable. De là résulte, en ce qui concerne les surfaces cylindriques, le théorème suivant, facile à démontrer en toute rigueur *.

Lorsqu'on fait glisser, les uns par rapport aux autres, les segments interceptés sur les génératrices d'un cylindre entre deux lignes quelconques, (chacun d'eux conservant sa longueur primitive et restant sur la génératrice qui lui correspond) *l'étendue de l'aire déterminée par l'ensemble de ces mêmes segments demeure invariable.*

Cela posé, soient A une surface de révolution, aa' son axe, cc' une portion de la ligne méridienne,

Fig. 93.

c c' a a'

Prenons la ligne cc' pour section droite d'un cylindre dont les génératrices puissent glisser sur elles-mêmes, indépendamment les unes des autres, et cela sans sortir du lieu qu'elles occupent dans l'espace.

Imaginons que la surface A tourne d'un certain angle autour de l'axe aa', et supposons que, pendant cette rotation, chacun des parallèles correspondant au segment cc' communique à la génératrice qu'il touche la vitesse de son point de contact. Il est visible qu'au moment où la rotation s'achève, l'arc compris, pour chaque parallèle, entre le point où le contact subsistait à l'origine et celui où il s'arrête, se trouve développé suivant la génératrice correspondante du cylindre, et que celle-ci a glissé sur elle-même d'une longueur précisément égale à cet arc.

Désignons par E l'aire que détermine sur la surface A un contour quelconque tracé entre les deux parallèles ca, $c'a'$ et les positions extrêmes du méridien qui coïncidait d'abord avec la ligne cc'.

Tous les points de l'aire E se sont appliqués successivement sur la surface cylindrique, de manière à former une série de

* Il suffit pour cela de développer sur un plan le cylindre que l'on considère et d'opérer, soit directement, soit en se fondant sur ce que l'aire engendrée par un segment de droite a pour différentielle le produit de ce segment par la vitesse de circulation de son point milieu.

segments rectilignes juxtaposés, parallèles, et n'ayant subi les uns par rapport aux autres aucun déplacement, si ce n'est celui qui résulte du glissement inégal des génératrices sur lesquelles ils sont situés respectivement. La conséquence évidente est que l'aire déterminée sur le cylindre par l'ensemble de ces mêmes segments a une étendue précisément égale à celle de l'aire E sur la surface A. Il ne resterait donc plus qu'à développer le cylindre, c'est-à-dire qu'à rectifier sa section droite, si l'on voulait obtenir le développement *homalographique* de l'aire E *. Notre but étant autre, poursuivons.

Soient A, A′ deux surfaces de révolution; M, M′ leurs méridiens respectifs; C, C′ les cylindres droits circonscrits à ces surfaces le long des lignes M, M′.

Le procédé suivi tout à l'heure montre qu'après avoir transporté la surface A sur le cylindre C, on peut replier celui-ci sur le cylindre C′, et reporter la surface A sur la surface A′ d'une infinité de façons différentes.

Considérons le cas où le cylindre C est replié sur le cylindre C′, de manière à ce que la ligne M soit appliquée sur la ligne M′. Il est visible que le transport de la surface A sur la surface A′ se résout généralement en un développement homalographique de la première surface sur la seconde. Pour qu'il en fût autrement; pour qu'il y eût développement sans extension ni contraction d'aucun élément linéaire ou superficiel; pour que toute ligne transportée de la surface A sur la surface A′ reprît et conservât sa grandeur première, il faudrait que les génératrices du cylindre C′, alors qu'elles sont entraînées par la rotation de la surface A′, glissassent avec des vitesses respectives précisément égales à celles qui animaient ces mêmes génératrices dans le déve-

* On entend par développement *homalographique* un développement dans lequel les lignes tracées sur la surface à développer changent, en général, de forme et de grandeur, tout en conservant aux aires qu'elles circonscrivent leurs étendues premières. La projection Flamsteed présente le résultat d'un développement homalographique effectué d'après les indications du texte. Il n'en est pas tout à fait de même de la projection homalographique de M. Babinet. Elle est analogue à ce développement, mais non pas identique.

loppement de la surface A sur le cylindre C. Veut-on remplir cette condition? Il suffit de déterminer la ligne M′ de telle façon qu'étant appliquée sur la ligne M, les rayons des parallèles, qui correspondent de part et d'autre aux mêmes points, conservent entre eux un rapport invariable. Supposons, en effet, que ce rapport soit exprimé par m et qu'il s'agisse d'un point pour lequel les rayons des deux parallèles soient respectivement r et r'. On a, par hypothèse,

$$r' = m.r.$$

Cela posé, si dans le transport de la surface A sur le cylindre C, la vitesse de rotation est W et qu'on la prenne égale à $\frac{W}{m}$ dans l'opération subséquente, c'est-à-dire, lorsqu'on reporte cette même surface du cylindre C′ sur la surface A′, il est clair que la génératrice correspondante aux deux parallèles, dont les rayons sont respectivement r et r' aura, dans le premier cas, une vitesse $r.W$ et, dans le second, une vitesse $\frac{r'W}{m}$. L'égalité visible de ces deux vitesses implique, comme conséquence, la possibilité de transporter la surface A sur la surface A′ ou réciproquement, sans déchirure ni duplicature.

239. Rapportons la ligne M à deux axes coordonnés rectangulaires, dont celui des x coïncide avec l'axe de révolution de la surface A. Désignons par n un point quelconque de cette ligne; par x, y les coordonnées du point n; par s l'arc de la ligne M compris entre le point n et un autre point quelconque déterminé n_0.

La ligne M′ restant à déterminer, d'après les conditions précédentes, supposons-la rapportée aux mêmes axes et désignons par n', n'_0 les points de cette ligne qui sont conjugués, par hypothèse, le premier avec le point n, le second avec le point n_0. Soient x', y' les coordonnées du point n', et s' l'arc de la ligne M′ compris entre les points n' et n'_0. Les équations du problème sont très-simplement

$$s = s', \qquad y' = m.y,$$

m étant une constante.

De là résulte

$$dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2 = dx'^2 + m^2\, dy^2,$$

et, par suite,

$$(1) \quad \ldots \ldots \quad dx'^2 = dx^2 + (1 - m^2)\, dy^2.$$

Soit

$$(2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad y = f(x)$$

l'équation de la ligne M. On a, pour équations correspondantes de la ligne M',

$$(3) \quad \ldots \quad \begin{cases} y' = my = m \,.\, f(x) \\ x' = \Delta x . \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (1 - m^2) f'(x)^2}. \end{cases}$$

L'équation de la ligne M étant mise sous la forme

$$(4) \quad \ldots \ldots \ldots \quad x = \varphi\,(y),$$

on a de même, pour équation correspondante des lignes M',

$$(5) \quad \ldots \quad m . x' = \Delta y' . \mathrm{M}_{y'}^{y'+\Delta y'} \sqrt{1 - m^2 + \varphi' \left(\frac{y'}{m}\right)^2}.$$

On observera que la deuxième des équations (3) et l'équation (5) équivalent respectivement, la première à l'équation différentielle

$$(6) \quad \ldots \quad dx' = dx \sqrt{1 + (1 - m^2) f'(x)^2};$$

la dernière à l'équation différentielle

$$(7) \quad \ldots \quad m . dx' = dy' \sqrt{1 - m^2 + \varphi' \left(\frac{y'}{m}\right)^2}.$$

Concluons que, quelle que soit la ligne M, on peut toujours trouver une série de lignes M′, conjuguées entre elles et avec la première, de telle façon que les surfaces engendrées par ces lignes dans leur rotation autour de l'axe des x soient toutes transportables, l'une sur l'autre, sans déchirure ni duplicature.

Considérons, en particulier, le cas de la sphère, la ligne M ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

On déduit de là, poür équations des lignes M′,

$$(8). \quad . \quad y' = m.r\cos\varphi, \qquad dx' = rd\varphi\sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi},$$

la variable y étant remplacée par $r.\cos\varphi$.

Les équations (8) sont précisément celles qu'on obtient pour la ligne méridienne de l'hélicoïde à génératrice courbe, qui dérive de la sphère * et qui jouit de la propriété d'avoir en chacun de ses points *une même courbure moyenne.* Il est remarquable que cette même ligne, suivant qu'elle tourne, *sans glisser,* autour de l'axe des x ou qu'elle tourne autour de cet axe, en glissant, suivant sa direction, avec une vitesse dont le rapport à la vitesse de rotation est exprimé par le produit $r\sqrt{1 - m^2}$, engendre, dans le premier cas, une surface d'*égale courbure* et, par conséquent, applicable sur la sphère; dans le second, une surface à *courbure moyenne* constante.

On peut multiplier indéfiniment ces applications. Bornons-nous à en donner une seconde.

Soit un ellipsoïde ayant pour ligne M une ellipse dont le petit axe est situé sur l'axe de révolution. L'équation de la ligne M étant

$$(9). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

* Voir, au besoin, les *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, (2me série, tome VI, n° 3).

Si l'on désigne par c l'excentricité $\sqrt{b^2 - a^2}$, et qu'on attribue à m la valeur $\frac{c}{b}$, on trouve, pour équation correspondante d'une des lignes conjuguées M',

$$y' = my = m.b \cos\varphi, \quad x' = a.\Delta\varphi.\mathrm{M}(1) = a.\varphi,$$

et, par suite,

$$(10). \quad \ldots\ldots \quad y' = c \cos\frac{x'}{a}.$$

Dans l'hypothèse où l'on attribuerait à m une valeur quelconque moindre que l'unité, on aurait pour équations générales des lignes M

$$(11). \quad y' = m.b.\cos\varphi, \quad x' = a.\Delta\varphi.\mathrm{M}_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi}\sqrt{1 - \frac{m^2b^2 - c^2}{a^2}\sin^2\varphi}.$$

Changeons le signe de la quantité a^2. A l'ellipsoïde se substitue l'hyperboloïde de révolution à une nappe ; à la sinusoïde représentée par l'équation (10), l'espèce de chaînette ayant pour équation

$$(12). \quad \ldots\ldots \quad y' = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{x'}{a}} + e^{-\frac{x'}{a}}\right]^{*}.$$

On a, d'ailleurs $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, et les équations (11) sont remplacées par les suivantes

$$(13). \quad y' = m.b.\cos\varphi, \quad x' = a.\Delta\varphi.\mathrm{M}_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi}\sqrt{\frac{c^2 - m^2b^2}{a^2}\sin^2\varphi - 1}.$$

Rappelons-nous, conformément aux déductions du n° 256, page 580, que l'hyperboloïde de révolution à une nappe fait partie d'une série d'hélicoïdes développables l'un sur l'autre, sans déchi-

* Cette équation se déduit directement de l'équation (10) en remplaçant a par $a\sqrt{-1}$ et faisant usage de la formule 2 du n° 38, page 94. On peut s'assurer de son exactitude, en constatant qu'elle vérifie l'équation (7).

rure ni duplicature. Ce même hyperboloïde pouvant se transporter sur chacune des surfaces de révolution déterminées par les équations (13), on voit qu'il sert de transition entre ces surfaces et les hélicoïdes gauches, ceux-ci devenant applicables sur celles-là, et réciproquement, le tout sans extension ni contraction d'aucun élément linéaire ou superficiel *.

240. La solution du n° 239 s'applique, en général, à toutes les surfaces de révolution. Elle comporte, en outre, une extension qu'il convient d'indiquer.

Soient S, S' deux lignes planes, l'une quelconque, l'autre déterminée comme il suit :

Soient μ un point mobile assujetti à décrire la ligne S ; V la vitesse de ce point à un instant quelconque ; ω la vitesse angulaire simultanée de sa directrice. μ' étant un second point mobile, on suppose qu'à ce même instant il est animé d'une vitesse $V' = m.V$ et que sa directrice tourne avec une vitesse angulaire $\omega' = \frac{\omega}{m}$. Cela posé, la ligne S' est la trace du point μ', et les positions conjuguées des points μ, μ' sont celles qu'ils occupent simultanément, l'un sur la ligne S, l'autre sur la ligne S'.

Par hypothèse, M, M' sont deux courbes planes, telles qu'en les prenant pour lignes méridiennes de deux surfaces de révolution, ces surfaces peuvent se transporter l'une sur l'autre comme on l'a vu tout à l'heure.

Prenons la ligne S pour section droite d'un cylindre C et faisons coïncider l'axe de la ligne M avec une génératrice quelconque D de ce cylindre. Soit B la surface engendrée par la ligne M, lorsque son plan s'enroule, sans glisser, sur la surface du cylindre C.

Prenons de même la ligne S' pour section droite d'un cylindre

* Le transport d'un hélicoïde gauche sur une surface de révolution qui n'admet pas de génératrices rectilignes présente, au premier abord, assez de difficultés, pour qu'il semble impossible de se le figurer nettement et, surtout, de le réaliser par voie géométrique. En déterminant les transformations successives qui permettent d'effectuer ce transport et d'en suivre tous les détails, on jette, pensons-nous, quelque jour sur une question qui offre de l'intérêt et qu'il n'est pas indifférent d'éclaircir à raison même de son importance.

C′, et faisons coïncider l'axe de la ligne M′ avec la génératrice de ce cylindre qui correspond à la précédente, c'est-à-dire qui coupe la ligne S′ en un point conjugué avec celui où la génératrice D vient couper la ligne S. Soit B′ la surface engendrée par la ligne M′, lorsque son plan s'enroule, sans glisser, sur le cylindre C′.

Cela posé, il est aisé de voir et de démontrer, comme on l'a fait pour les surfaces de révolution engendrées respectivement par les lignes M, M′, que les surfaces B, B′ sont transportables l'une sur l'autre, sans déchirure ni duplicature.

Les équations différentielles qui déterminent la ligne S′, en fonction de la ligne S, s'obtiennent aisément sous forme de quadratures. On les déduit directement des équations de condition

$$ds' = m.ds, \qquad m.d\left(\text{arc tg}\frac{dy'}{dx'}\right) = d\left(\text{arc tg}.\frac{dy}{dx}\right).$$

Bornons-nous à signaler les résultats suivants :

1° Lorsqu'on prend pour ligne S une circonférence de cercle au rayon r, la ligne S′ est une circonférence de cercle au rayon $m^2.r$.

2° Lorsqu'on prend pour ligne S la développante du cercle au rayon r, la ligne S′ est la développante du cercle au rayon $m^3.r$.

Ces résultats n'exigent aucun calcul pour s'établir directement. On voit d'ailleurs *à priori* que si l'on désigne par ρ, ρ' les rayons de courbure qui se correspondent en deux points conjugués des lignes S, S′ on a, généralement

$$\rho' = m^2.\rho.$$

Vérifions pour le cas des surfaces de révolution, comme nous l'avons fait pour celui des surfaces gauches, qu'elles ne peuvent s'appliquer l'une sur l'autre, d'après les conditions du n° 259, sans avoir même courbure en leurs points conjugués.

Soient R, R′ les rayons de courbure principaux d'une surface de révolution. Rien n'étant changé aux données du n° 259, désignons par α l'angle que la tangente en un point quelconque du

méridien fait avec l'axe de rotation. On a pour l'un de ces rayons, celui que la normale détermine en position et grandeur,

$$R = \frac{y}{\cos \alpha},$$

et pour l'autre, celui de la ligne méridienne au point considéré,

$$R' = \frac{ds^2}{d^2y} \cos \alpha, \text{*}$$

la vitesse ds étant supposée constante.

De là résulte, pour la surface A du n° 239, page 586,

$$RR' = y \cdot \frac{ds^2}{d^2y}.$$

S'agit-il ensuite des surfaces A'? Les équations de condition

$$s = s', \qquad y' = m.y,$$

donnent

$$ds' = ds, \qquad d^2y' = m.d^2y.$$

Il s'ensuit évidemment qu'il y a, de part et d'autre, égalité de courbure.

* Partant de l'équation

$$dy = ds.\sin \alpha,$$

et assujettissant la vitesse ds à demeurer constante, on a

$$d^2y = ds.\cos \alpha.d\alpha.$$

Mais, d'un autre côté, on a généralement,

$$R' = \frac{V}{W} = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Il vient donc aussi, par voie de substitution,

$$R' = \frac{ds^2}{d^2y} \cos \alpha.$$

Cette démonstration s'étend d'elle-même aux surfaces B, B'. Il est visible, en effet, que si l'on a pour l'une, toutes choses égales d'ailleurs,

$$Y = y + c.$$

on a, en même temps, pour l'autre,

$$Y' = y' + m.c = mY.$$

241. Abordons maintenant la question générale, en la traitant comme elle se pose d'après la définition du n° 235. Il s'agit de déterminer les conditions à remplir pour que deux surfaces quelconques A, A' puissent être considérées comme applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.

Les surfaces A, A' satisfont, par hypothèse, à la condition suivante :

A tout point de la surface A *correspond un point déterminé de la surface* A', *les points ainsi conjugués ayant pour lieux respectifs des arcs de même longueur.*

De là résultent plusieurs conséquences relatives aux arcs tracés sur chacune des deux surfaces A, A', et conjugués entre eux comme les points dont ils sont les lieux respectifs. Disons, d'abord, les plus simples et les plus directes.

1° *Les points* M, N *étant pris, comme on veut, sur la surface* A, *et leurs conjugués* M', N' *sur la surface* A', *l'arc géodésique* MN *a pour conjugué l'arc géodésique* M'N';

2° *Soient* OM, ON *deux arcs quelconques issus du point* O *sur la surface* A : *ces arcs et leurs conjugués* O'M', O'N' *se coupent sous un même angle, les deux premiers en* O, *les deux derniers en* O' *;

* Il est entendu que chaque couple de points conjugués est désigné par une même lettre, accentuée ou non accentuée, selon qu'il s'agit de la surface A' ou de la surface A.

3° *Deux arcs quelconques conjugués entre eux et situés respectivement, l'un sur la surface A, l'autre sur la surface A', ont même courbure géodésique en chacun de leurs points conjugués.*

Ces premières déductions sont en quelque sorte évidentes. Démontrons-les néanmoins. Nous dirons ensuite quelles sont les autres.

Il n'existe, en général, entre deux points d'une même surface qu'une ligne géodésique. Si l'arc MN est la ligne géodésique allant du point M au point N sur la surface A, il est le chemin le plus court qu'on puisse y tracer entre ces deux points. L'arc M'N' étant le conjugué de l'arc MN a, par définition, même longueur. On conclut aisément de là que l'arc M'N' est sur la surface A' le chemin le plus court du point M' au point N' et qu'il se confond, en conséquence, avec l'arc géodésique correspondant. Le premier des trois théorèmes énoncés ci-dessus se trouve ainsi démontré. Passons au second.

Les lignes OM, ON étant tracées sur la surface A et supposées quelconques, concevons deux points mobiles μ_1, μ_2 assujettis à les décrire, et sortant du lieu O à l'instant que l'on considère. Soit v_1 la vitesse actuelle du premier de ces points et v_2 celle du second; u leur vitesse d'écart à l'origine de leur déplacement; α l'angle des tangentes en O aux lignes OM, ON. On a évidemment

$$u^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha.$$

Supposons, *toutes choses égales d'ailleurs*, que l'on substitue aux lignes OM, ON leurs conjuguées O'M', O'N'. En désignant ici par u' et α' les quantités désignées tout à l'heure par u et α, on a, comme ci-dessus,

$$u'^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha'.$$

Mais, par définition, et comme conséquence directe de l'égalité qui subsiste, de part et d'autre, entre les arcs conjugués, les vitesses u, u' sont nécessairement égales. Il faut donc aussi que l'on ait

$$\alpha = \alpha'.$$

L'égalité des angles α, α' justifie la seconde des propositions énoncées plus haut. On peut aussi la considérer comme impliquant la troisième. Quoi qu'il en soit, procédons pour celle-ci, comme pour les deux autres, en la traitant directement.

Soit OM un arc quelconque donné sur la surface A. Représentons-nous le système des lignes géodésiques issues à angle droit des différents points de cet arc, et considérons ce même arc comme une des trajectoires orthogonales de ce système. On a, conformément à l'équation (3) du n° 224,

$$(1)\ldots\ldots\ldots \delta v = -v\frac{\cos\theta}{\rho}\delta\lambda.$$

Substituons à l'arc OM, son conjugué O'M' et répétons pour ce second arc ce que nous avons fait pour le premier. En désignant par v', λ', θ' et ρ' les quantités désignées tout à l'heure par v, λ, θ et ρ, on a, comme ci-dessus,

$$(2)\ldots\ldots\ldots \delta v' = -v'\frac{\cos\theta'}{\rho'}\delta\lambda'.$$

Égalons entre elles, d'une part, les vitesses v, v', d'autre part, les vitesses $\delta\lambda$, $\delta\lambda'$. L'équation (2) devient

$$(3)\ldots\ldots\ldots \delta v' = -v\frac{\cos\theta'}{\rho'}\delta\lambda.$$

On voit, d'ailleurs aisément, d'après ce qui précède, que les trajectoires orthogonales qui se correspondent sur les surfaces A, A' sont conjuguées entre elles et qu'elles impliquent, en conséquence, pour chaque point de l'une et son conjugué sur l'autre, l'équation générale

$$(4)\ldots\ldots\ldots \delta v' = \delta v.$$

La simultanéité des équations (1), (3), (4), donne, pour chaque point de l'arc OM et pour son conjugué sur l'arc O'M',

$$(5)\ldots\ldots\ldots \frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{\cos\theta'}{\rho'}.$$

De là résulte immédiatement la dernière des trois propositions formulées ci-dessus.

242. Poursuivons le cours des déductions précédentes et restons, à cet effet, dans les conditions établies pour la démonstration du dernier théorème.

Lorsqu'on se donne l'arc OM, son conjugué O'M', et le double système des lignes géodésiques issues à angle droit des différents points de ces arcs, il est visible que les trajectoires orthogonales de ces lignes se correspondent de part et d'autre, de manière à former une double série d'arcs équidistants, conjugués deux à deux et offrant en chacun de leurs points conjugués même courbure géodésique.

Cela posé, si l'on part de l'équation (12) du n° 225, page 549,

$$\delta . \frac{\cos\theta}{\rho} = \left[\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{1}{RR'}\right] \delta\lambda,$$

et qu'on l'applique à deux quelconques de ces trajectoires conjuguées, l'identité qui subsiste, de part et d'autre, entre les quantités correspondantes exprimées par $\frac{\cos\theta}{\rho}$, $\delta\frac{\cos\theta}{\rho}$, $\delta\lambda$ implique celle du produit des rayons de courbure principaux R, R'.

La conséquence à laquelle nous venons de parvenir est à la fois curieuse et importante. Le théorème qui en résulte est dû à M. Gauss. On peut l'énoncer dans les termes suivants :

Lorsque deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature, le produit de leurs rayons de courbure principaux est le même en deux quelconques de leurs points conjugués.

Nous avons vu au n° 204, page 500, qu'en désignant par *m* un point d'une surface A, et par R, R' les rayons de courbure principaux correspondants, on est convenu de considérer la quantité $\frac{1}{\sqrt{RR'}}$, comme exprimant la courbure de la surface A au point *m*. On peut donc dire aussi et plus simplement :

Lorsque deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature, elles ont même courbure en leurs points conjugués.

243. La proposition qui précède a sa réciproque énoncée comme il suit :

Lorsque deux surfaces ont même courbure en leurs points conjugués, elles sont applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.

Avant de démontrer cette réciproque, il faut d'abord spécifier d'une manière précise en quoi consiste, pour les deux surfaces que l'on considère, la correspondance établie entre un point quelconque de l'une et son conjugué sur l'autre.

Le point O étant pris sur la surface A, représentons-nous cette surface comme le lieu des lignes géodésiques issues de ce point, et, parmi ces lignes distinguons l'une d'elles, la ligne OB, par exemple, que nous supposerons fixe et déterminée *.

Opérons de même en ce qui concerne la surface A'. Au point O se substitue le point O', à la ligne OB la ligne O'B', le point O' et la ligne O'B' étant choisis comme on veut.

Cela posé, faisons correspondre, d'une part, les lignes géodésiques qui coupent sous un même angle quelconque ω, l'une la ligne OB, l'autre la ligne O'B', d'autre part, les points de ces lignes qui sont situées sur elles à égale distance de leur origine respective.

Fig. 94.

Il est visible qu'en opérant d'après ces conventions, on détermine pour chaque point de la surface A un point correspondant de la surface A'. Ces points vont ainsi par couple et il en est de même de leurs lieux respectifs. Lorsqu'on dit des uns et des autres qu'ils sont conjugués entre eux, on entend exprimer qu'ils se déterminent l'un par l'autre, suivant le mode exposé ci-dessus.

* On ne perdra pas de vue, pour ce qui suit, qu'il n'existe, en général, qu'un seul plan tangent en O à la surface A.

Cette explication donnée, rappelons-nous et ne perdons pas de vue que, par hypothèse, les surfaces A, A′ ont même courbure en leurs points conjugués.

Soit Mm une trajectoire quelconque orthogonale des lignes géodésiques issues du point O sur la surface A. Soit M′m' sa conjuguée sur la surface A′ *.

Supposons que les arcs conjugués de ces deux trajectoires aient même longueur, et, pour chacun de leurs points conjugués, même courbure géodésique.

En appliquant au point m, pour la courbe Mm, et à son conjugué m', pour la courbe M′m' l'équation (12) du n° 22, page 549,

$$\delta \frac{\cos\theta}{\rho} = \left[\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{1}{RR'}\right] \delta\lambda,$$

et l'équation (2) du n° 227, page 554,

$$\delta . ds = -\frac{\cos\theta}{\rho} ds . \delta\lambda,$$

on reconnait immédiatement que les conditions *supposées* remplies par les trajectoires orthogonales Mm, M′m' s'étendent, de proche en proche, à toutes les courbes qui font partie de leur système, et qui sont comme elles, par rapport aux lignes géodésiques issues des points O et O′, des trajectoires orthogonales conjuguées. Il est clair, en effet, que l'égalité primitive des arcs conjugués et celle de leur courbure géodésique se maintient de part et d'autre, puisqu'il y a identité dans les vitesses avec lesquelles ces arcs et ces courbures croissent ou décroissent simultanément pour un même déplacement effectué suivant les lignes géodésiques correspondantes.

Observons ici que pour réaliser l'hypothèse admise, en ce qui

* On sait que les segments interceptés sur les lignes géodésiques par deux quelconques de leurs trajectoires orthogonales sont tous égaux entre eux. Il en résulte que l'arc M′m' conjugué, par hypothèse, avec l'arc Mm est une des trajectoires orthogonales des lignes géodésiques issues du point O′ sur la surface A′.

concerne les courbes Mm, $M'm'$, il suffit de les prendre dans la position où elles se confondent, en même temps, l'une avec le point O, l'autre avec le point O'. Cette simple remarque permet de poser, dès à présent, la déduction suivante * :

4° *Lorsque deux surfaces ont même courbure en leurs points conjugués, les arcs conjugués, pris sur les trajectoires orthogonales des lignes géodésiques, ont même longueur et, pour chacun de leurs points conjugués, même courbure géodésique.*

Cet énoncé s'étend en quelque sorte de lui-même à tous les arcs qui sont conjugués entre eux sur les deux surfaces que l'on considère. Soient, en effet, mn, $m'n'$ deux arcs quelconques conjugués et situés respectivement l'un sur la surface A, l'autre sur la surface A'. Imaginons que ces deux arcs soient décrits simultanément, le premier par un point μ animé d'une vitesse constante, le second par un point μ' assujetti à prendre à chaque instant sur l'arc $m'n'$ la position conjuguée avec celle que le point μ occupe à ce même instant sur l'arc mn. Pour que cette condition soit remplie, il faut, d'après ce qui précède, que les vitesses simultanées des points μ, μ' aient mêmes composantes, d'une part, suivant les lignes géodésiques $O\mu$, $O'\mu'$, d'autre part, suivant les trajectoires orthogonales de ces lignes. Il faut donc aussi que ces mêmes vitesses soient égales. Il suit de là que les arcs conjugués mn, $m'n'$ sont égaux entre eux et qu'ils coupent sous un même angle les lignes géodésiques conjuguées qui leur correspondent respectivement de part et d'autre.

Ces dernières déductions impliquent évidemment la réciproque qu'il s'agissait d'établir. On peut donc conclure en résumant comme il suit les deux propositions fondamentales que nous avons démontrées successivement :

Pour que deux surfaces soient applicables l'une sur l'autre

* Si la rigueur de cette déduction devenait douteuse ; s'il arrivait, par exemple, que l'un des points O, O' ne satisfît pas à la condition générale de ne comporter qu'un seul plan tangent, on pourrait s'en tenir à la donnée première, et maintenir, comme devant être réalisée, la supposition faite en ce qui concerne l'égalité de longueur et de courbure géodésique des arcs Mm, $M'm'$.

sans déchirure ni duplicature, il est nécessaire et suffisant qu'elles aient même courbure en leurs points conjugués.

244. Le théorème qui vient d'être énoncé offre de précieuses ressources pour les différents cas d'application. Bornons-nous à formuler quelques-unes des conséquences qui s'en déduisent immédiatement.

S'agit-il d'abord des surfaces développables proprement dites? Ces surfaces étant, par hypothèse, applicables sur un plan sans déchirure ni duplicature, il faut que leur courbure soit nulle en tous leurs points. Il s'ensuit qu'elles doivent être réglées et qu'elles ne peuvent être gauches.

On sait, conformément à l'équation (12) du n° 197, page 487, que le produit inverse des rayons de courbure principaux a pour expression générale

$$\frac{1}{RR'} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Il s'ensuit, comme nous en avons déjà fait la remarque au n° 208, page 508, que les surfaces développables sont toutes déterminées par l'équation de condition

$$rt - s^2 = o.$$

S'agit-il ensuite des surfaces gauches? En se reportant aux théorèmes exposés, à partir de la page 497, dans les n°s 203 et 204, on reconnaît aisément que, dans le cas où leurs génératrices rectilignes sont conjuguées entre elles, les conditions à remplir, pour qu'elles soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature, sont les suivantes en ce qui concerne deux quelconques de ces génératrices conjuguées :

Les points centraux doivent être conjugués entre eux; leurs vitesses doivent être les mêmes en grandeur absolue et en direction relative *. Les distances comprises entre ces points et ceux

* La ligne dite de striction n'étant autre chose que le lieu des points centraux, les conditions énoncées reviennent à dire que, de part et d'autre, les lignes de striction doivent être conjuguées entre elles.

où le plan tangent fait un angle de 45° avec le plan tangent au point central doivent être égales de part et d'autre.

S'agit-il encore des surfaces de révolution? Pour qu'elles soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature, *par superposition de leurs parallèles respectifs*, il faut que les parallèles ainsi conjugués aient même courbure géodésique; il faut, en outre, qu'elles présentent même courbure en chacun des points conjugués de leurs méridiens. Ces deux conditions reviennent à celle que nous avons formulée dans les nos 238 et 239, pages 583 et 586, et qui consiste en ce que les rayons de deux parallèles quelconques conjugués doivent conserver entre eux un rapport constant.

L'égalité de courbure qui doit avoir lieu en chacun des points conjugués de deux méridiens implique, conformément aux données du n° 240, page 590, l'équation générale

$$(1). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d^2y'}{y'} = \frac{d^2y}{y}.$$

Si cette équation subsistait seule, on pourrait y satisfaire, soit en posant

$$(2). \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{y'}{y} = \text{cons}^{\text{te}},$$

soit, plus généralement, en se donnant y en fonction de la variable s', considérant la vitesse ds comme constante et résolvant l'équation différentielle

$$(3). \quad \ldots\ldots\ldots \quad d\frac{y'}{y} = c.\frac{ds}{y^2}\,^{*},$$

* Cette équation revient à la suivante

$$y.dy' - y'dy = c.ds^2.$$

Différenciée dans l'hypothèse où la vitesse ds est considérée comme constante, elle donne

$$y.d^2y' - y'd^2y = o,$$

et se confond ainsi avec l'équation (1).

où c est une constante quelconque, et qui se trouve ainsi ramenée à une simple quadrature.

Mais, d'un autre côté, la courbure géodésique en un point quelconque d'un même parallèle a, pour expression générale,

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{\cos\theta}{y} = \frac{1}{y}\frac{dy}{ds},$$

et l'on doit avoir, par hypothèse, même courbure géodésique pour chaque couple de parallèles conjugués. De là résulte cette autre équation de condition

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{dy}{y},$$

qui revient évidemment à

$$ydy' - y'dy = y^2 d\frac{y'}{y} = o,$$

et donne, en conséquence,

$$\frac{y'}{y} = \text{cons}^{te}.$$

Il suit de là, que l'équation (2) satisfait seule aux données de la question et que les deux conditions, d'abord énoncées, se réduisent à la condition unique formulée en dernier lieu.

245. S'agit-il enfin de deux surfaces quelconques n'ayant l'une et l'autre en tous leurs points qu'une seule et même courbure. Il est une infinité de manières de les appliquer l'une sur l'autre et sur la sphère de courbure égale, sans déchirure ni duplicature. Considérons, en particulier, le cas où les surfaces à déterminer sont en même temps d'égale courbure et de révolution.

Soit A, l'une de ces surfaces. Si nous désignons par r^2 le produit de ses rayons de courbure principaux et que nous déterminions l'ordonnée y de la ligne méridienne en fonction de son

arc s (la vitesse ds étant supposée constante), on a pour équation différentielle de cette ligne

$$(4). \quad \dots\dots\dots \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \pm \frac{y}{r^2},$$

le tout, conformément à la formule générale du n° 240, page 592, et, eu égard à ce que le second membre doit être pris avec le signe supérieur ou avec le signe inférieur, selon que la ligne méridienne tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe de rotation.

Observons ici que les fonctions exponentielles $e^{\pm x}$ et les fonctions trigonométriques sin x, cos x, ont pour dérivées secondes des quantités qui leur sont égales en grandeur absolue et dont le signe reste le même ou change, selon qu'il s'agit des premières fonctions ou des dernières. Partant de là, il est aisé de voir et de vérifier que l'équation (4) est satisfaite en posant, pour le cas de la concavité,

$$(5). \quad \dots\dots \quad y = C \sin\frac{s}{r} + C' \cos\frac{s}{r},$$

et, pour le cas de la convexité,

$$(6). \quad \dots\dots\dots \quad y = Ce^{\frac{s}{r}} + C'e^{-\frac{s}{r}},$$

C, C' étant deux constantes arbitraires.

Les équations (5) et (6) déterminent, par leurs lignes méridiennes, l'ensemble des surfaces de révolution dont la courbure est $\frac{1}{r}$. Dans celles qui correspondent à l'équation (5), les lignes méridiennes ne cessent pas de tourner leur concavité vers l'axe de rotation. L'inverse a lieu pour les autres.

La sphère au rayon r est une des surfaces comprises dans l'équation (5). En plaçant l'origine commune des variables au point $y = 0$, $s = 0$, on a, nécessairement, $C' = 0$ et l'équation (5) se réduit à

$$(7). \quad \dots\dots\dots\dots \quad y = C \sin\frac{s}{r},$$

Il est d'ailleurs évident que dans le cas où il s'agit de cette sphère, ou plus généralement d'une ligne méridienne, coupant à angle droit l'axe de rotation, on a d'abord, comme tout à l'heure, $C'=0$, et, en outre, pour $s=0$,

$$(8).\quad\ldots\ldots\ldots\quad \frac{dy}{ds}=1,$$

l'équation (7) donnant, en général,

$$\frac{dy}{ds}=\frac{C}{r}\cos\frac{s}{r}.$$

On voit qu'on ne peut satisfaire à l'équation (8) qu'en posant $C=r$. Il suit de là, que la ligne méridienne, représentée par l'équation

$$y=r\sin\frac{s}{r}$$

est la seule qui puisse couper à angle droit l'axe de rotation.

Il est visible, d'ailleurs, que cette ligne n'est autre chose que la demi-circonférence de cercle ayant son centre sur l'axe et la quantité r pour rayon.

D'autres déductions très-simples découlent immédiatement des équations (5), (6), (7). Bornons-nous, pour le cas de l'équation (7), à signaler la suivante. On a, en général,

$$dx^2=ds^2-dy^2,$$

et, dans le cas particulier dont il s'agit,

$$ds^2=\frac{r^2}{C^2}\,\frac{dy^2}{\cos^2\frac{s}{r}}=\frac{r^2}{C^2-y^2}dy^2.$$

De là résulte

$$dx=dy\sqrt{\frac{r^2}{C^2-y^2}-1},$$

et, telle est, en coordonnées ordinaires, l'équation différentielle des lignes méridiennes comprises dans l'équation (7).

Remarque. — Lorsqu'on se donne une surface quelconque et qu'on prend un point de cette surface, on peut toujours trouver pour ce point une sphère ayant même plan tangent et même courbure que la surface donnée. On conçoit, dès lors, que la sphère, ou plus généralement les surfaces d'égale courbure, soient aptes à remplir par rapport aux autres surfaces un rôle analogue à celui du cercle osculateur en ce qui concerne les lignes courbes. La considération des surfaces d'égale courbure et plus particulièrement de la sphère peut ainsi devenir quelquefois très-utile dans certains cas d'application *.

CHAPITRE XIV.

DIFFÉRENTIELLES DES ARCS, AIRES ET VOLUMES QUELCONQUES.

Rectifications. — Quadratures. — Cubatures.

246. Nous avons vu, dans les numéros 65 et suivants du chapitre III, page 178, comment on détermine les différentielles des arcs et des aires pour le cas des lignes planes, comment aussi l'on procède à la rectification des uns, à la quadrature des autres. La marche suivie, en ce qui concerne les arcs, s'étend d'elle-même au cas général des lignes à double courbure. Il n'en est pas tout à fait ainsi, lorsqu'on passe des aires planes aux aires courbes. La question ne conserve pas toujours le même degré de simplicité, et, comme celle des volumes circonscrits par des surfaces quelconques, elle exige de nouveaux détails.

* Voir au besoin, pour détails, le mémoire déjà cité de M. Ossian Bonnet, pages 107 et suivantes.

Occupons-nous d'abord des arcs dans l'espace. Nous traiterons ensuite des aires et des volumes.

Différentielle et rectification d'un arc quelconque.

247. Soit S une ligne à simple ou double courbure. Rapportons-la d'abord à des axes coordonnés rectangulaires OX, OY, OZ.

Désignons par m un point mobile assujetti à décrire la ligne S et sortant du lieu qu'il occupe à l'instant que l'on considère.

La vitesse actuelle du point m étant représentée par ds, elle est dirigée suivant la tangente à la ligne décrite et a pour composantes orthogonales les vitesses dx, dy, dz respectivement parallèles aux axes OX, OY, OZ. On peut écrire, en conséquence,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

De là résulte

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad ds = dz\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2},$$

et, par suite,

$$(3). \quad . \quad . \quad \Delta s = \Delta z . \mathrm{M}_z^{z+\Delta z}\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

Les équations (2) et (3) résolvent la question proposée, en ce qui concerne la différentielle d'un arc quelconque et la rectification de ce même arc. S'il restait quelques doutes sur le sens et la portée de cette solution, on les dissiperait en se reportant aux développements du n° 65, page 178. Il est, d'ailleurs, aisé de voir comment la formule (3) se prête aux différents cas d'application, soit que l'on considère séparément et successivement chacune des parties où la différence Δz ne change point de signe, soit qu'on prenne pour Δz la somme des valeurs absolues qui correspondent respectivement à ces mêmes parties.

Prenons pour exemple d'application un cas très-simple, celui de l'hélice déterminée, comme au n° 156, page 394, par les équations

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega, \qquad z = r.\omega\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

De là résulte, ainsi qu'on l'a vu au numéro précité,

$$ds = r\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}.d\omega.$$

On peut, en conséquence, écrire immédiatement

$$\Delta s = r\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}.\Delta\omega.$$

248. Supposons maintenant que la ligne S soit rapportée à un système de coordonnées polaires, et, sans rien changer à ce qui précède, prenons le point O pour pôle, le plan des xy pour plan de projection, la droite OX pour axe.

Fig. 95.

Projetons le point m en n sur le plan XOY, et nommons

r le rayon vecteur Om,
φ l'angle du rayon r avec sa projection On,
θ l'angle de la projection On avec l'axe OX.

Lorsque le point m sort du lieu qu'il occupe, on peut le considérer comme entraînant avec lui le rayon vecteur r et le plan mOn. De là résultent, pour la vitesse ds, trois composantes distinctes dr, $rd\varphi$, $r\cos\varphi\,d\theta$, dues respectivement, la première au glissement du point m sur le rayon vecteur r, la seconde à la rotation $d\varphi$ du rayon r dans le plan mOn, la troisième à la rotation du plan mOn autour de l'axe OZ.

Ces trois composantes étant rectangulaires, on a, évidemment,

$$(1).\quad .\ .\ .\ ds = \sqrt{dr^2 + r^2d\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi.d\theta^2},$$

et, par suite,

$$(2).\quad .\ \Delta s = \Delta r.\mathrm{M}_r^{r+\Delta r}\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + r^2\cos^2\varphi\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}.$$

L'application de la dernière formule se fait comme nous l'avons indiqué pour la formule (3) du numéro précédent.

Différentielle et quadrature d'une aire quelconque.

249. On conçoit *à priori* qu'il existe nécessairement un rapport déterminé entre l'aire plane, prise pour unité de mesure et une aire quelconque circonscrite, comme on veut, sur une surface courbe. La difficulté consiste à préciser ce rapport, lorsqu'il s'agit d'une aire que sa double courbure ne permet pas de ramener au type plan, à moins d'une transformation préalable ou de quelque artifice équivalent.

S'agit-il d'abord des surfaces développables? Par cela seul qu'on peut les appliquer sur un plan sans extension ni contraction d'aucun de leurs éléments linéaires ou superficiels, il est visible qu'elles comportent l'application directe des formules établies pour les aires planes aux numéros 67, 68 et 69 du chapitre III.

S'agit-il ensuite des surfaces de révolution? On peut, ainsi que nous l'avons fait voir au n° 238, page 583, les transporter sur un cylindre. Si, dans ce transport, les éléments linéaires changent, en général, de forme et de grandeur, ils ne cessent pas néanmoins de conserver aux aires qu'ils circonscrivent, leurs étendues premières. Il ne reste donc qu'à développer le cylindre et l'on est ramené, comme tout à l'heure, au cas des aires planes.

S'agit-il enfin d'une surface quelconque, prise dans son ensemble, ou réduite à l'une de ses parties? Désignons par A la portion considérée et supposons qu'elle s'engendre par le déplacement continu d'une ligne S incessamment variable.

Plaçons-nous à un instant quelconque déterminé et nommons A′ l'enveloppe des plans qui, à cet instant, touchent la surface A le long de la ligne S. Cette enveloppe étant par rapport à ces plans le lieu de leurs caractéristiques, on est en droit de formuler immédiatement les déductions suivantes :

1° L'enveloppe A′ est une surface développable;

2° Les plans qui touchent la surface A′ le long de ses généra-

trices rectilignes, touchent en même temps la surface A le long de la ligne S;

3° Les vitesses qui animent les différents points de la ligne S, au sortir du lieu qu'elle occupe sur la surface A, sont toutes contenues dans les plans tangents à la surface A′;

4° On peut substituer la surface A′ à la surface A, tout en conservant à chacun des points de la ligne S sa vitesse actuelle.

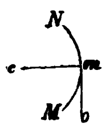
Mais, d'un autre côté, c'est uniquement des vitesses actuelles des différents points de la ligne S que dépend la différentielle de l'aire engendrée par cette ligne au sortir du lieu qu'elle occupe sur la surface A. *On peut donc aussi substituer la surface* A′ *à la surface* A *sans modifier en rien cette différentielle.*

Cela posé, développons sur un plan la surface A′ et, après avoir tracé sur ce plan la transformée S′ de la ligne S, déterminons la différentielle de l'aire engendrée par la ligne S′, eu égard aux vitesses que ses différents points conservent dans le développement. L'identité qui subsiste entre cette différentielle et la précédente montre suffisamment comment le cas général d'une aire courbe est réductible à celui d'une aire plane.

250. Le problème à résoudre, d'après ce qui précède, consiste à déterminer la différentielle de l'aire engendrée par une ligne plane S′ qui se meut dans son plan, avec ou sans changement de forme, et dont on connaît, pour chacun des points, la vitesse actuelle. On peut supposer, d'ailleurs, que cette vitesse est constamment dirigée suivant la normale correspondante. Il suffit, pour cela, qu'on se donne les trajectoires orthogonales des positions successives de la ligne S sur la surface A et qu'on assujettisse chacun des points de cette ligne à décrire celle de ces trajectoires qui lui correspond.

Soient MN le lieu actuel de la ligne S′; *m* un point de cette ligne; *mo* la tangente en ce point; *mc* la normale; *u* la vitesse du point *m*.

Fig. 96.



On sait que la vitesse *u*, dirigée par hypothèse suivant la normale *cm*, est dite, en général, *vitesse de circulation.*

Représentons par *d*A la différentielle cherchée

et supposons qu'elle corresponde à l'aire engendrée par le segment Mm de la ligne S'. Si, au lieu de rester fixe sur la ligne S', le point m sort du lieu qu'il occupe en glissant sur cette ligne, la quantité dA devient variable en même temps que la longueur Mm, et elle croît ou décroît avec une certaine vitesse $d\ (dA)$. Proposons-nous de déterminer cette vitesse. *Toutes choses égales, d'ailleurs, elle est la même que si la ligne* S' *était remplacée de part et d'autre du point* m *par sa tangente en ce point.* Mais, dans cette hypothèse, en désignant par o le centre instantané de rotation de la tangente mo, et par ω sa vitesse angulaire, on peut écrire, conformément à la formule (5) du n° 68, page 185,

$$dA = \frac{1}{2}\overline{mo}^2.\omega.$$

De là résulte, immédiatement,

$$d.(dA) = mo.\omega.d(mo).$$

On a, d'ailleurs,

$$mo.\omega = u,$$

et, désignant par ds' la vitesse du point m sur la ligne S',

$$d(mo) = ds'.$$

Il vient donc aussi, par simple voie de substitution,

$$(1). \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad d(dA) = u.ds'.$$

Au lieu de procéder comme nous venons de le faire, on peut se donner le centre c de courbure qui correspond au point m de la ligne S', et observer que la différentielle cherchée $d.(dA)$ conserve une seule et même détermination, soit que l'on considère la ligne S', soit qu'on lui substitue, à partir du point m, le cercle osculateur ayant son centre en c et le segment cm pour rayon. Si l'on désigne alors par W la vitesse angulaire de ce rayon, on a comme ci-dessus

$$dA = \frac{1}{2}\overline{cm}^2.W,$$

et, par suite,

$$d.(dA) = cm.W.d(cm).$$

On a, d'ailleurs, ainsi qu'il est aisé de le voir,

$$d(cm) = u, \qquad cm.W = ds'.$$

Ces valeurs substituées dans l'équation précédente conduisent au même résultat que les premiers calculs.

La formule (1) implique, comme équivalent, la relation générale

$$\Delta(dA) = \Delta s'.\mathrm{M}_{s'}^{s'+\Delta s'}\, u,$$

ou, ce qui revient au même,

(2). . . . . . . $dA = s'.\mathrm{M}_{0}^{s'}\, u,$

les quantités dA et s' s'annulant toutes deux, en même temps, à l'origine commune de leurs accroissements simultanés.

Les équations (1) et (2) ne cessent pas de subsister lorsqu'on revient de la transformée S' à la ligne S. On peut donc écrire généralement, d'une part,

(3). . . . . . . $d(dA) = u.ds,$

et d'autre part

(4). . . . . . . $dA = s.\mathrm{M}_{0}^{s}\, u.$

Le théorème exprimé par l'équation (4) est général. On peut l'énoncer comme il suit :

L'aire engendrée par une ligne quelconque S *qui se meut dans l'espace, avec ou sans changement de forme, a pour différentielle le produit de cette ligne par sa vitesse moyenne de circulation.*

Il est entendu que les facteurs de ce produit sont respectivement, l'un la longueur rectifiée de la génératrice S, l'autre la

moyenne des vitesses de circulation qui animent à la fois les différents points de cette ligne.

251. Reprenons la question générale des aires courbes et traitons-la directement.

Soient m un point d'une surface; P le plan tangent en ce point; Σ un contour quelconque fermé passant par le point m et circonscrivant sur la surface donnée une aire A.

De même qu'en se rétrécissant d'une manière continue le contour Σ peut décroître jusqu'à s'évanouir et faire évanouir avec lui l'aire A, de même et inversement il peut prendre naissance à partir de zéro, étant, d'abord, comme concentré tout entier dans le lieu m. Plaçons-nous à ce dernier point de vue et concevons en m une infinité de points mobiles, désignés par μ et assujettis à former par leur ensemble le contour Σ. La vitesse avec laquelle l'aire A s'engendre à partir de zéro ne peut évidemment dépendre que des vitesses qui animent respectivement et simultanément chacun des points μ au sortir du lieu m. Mais, d'un autre côté, ces vitesses sont toutes dirigées et comprises dans le plan P. On voit donc que tout se passe, à l'origine, comme s'il s'agissait de l'aire plane circonscrite sur le plan P par la projection du contour Σ.

Par le point m menons dans le plan P deux droites rectangulaires mt, ml. Soient p et q deux points pris, comme on veut, l'un sur la droite ml, l'autre sur la droite mt. Achevons le rectangle $mpnq$ et considérons-le comme étant la projection du contour Σ sur le plan P *.

Fig. 97.

En désignant par A′ l'aire du rectangle $mpnq$, on a, généralement,

$$A' = mp.mq.$$

Supposons d'abord que le point q soit fixe et que le point p glisse sur la droite ml avec la vitesse u. Si l'on prend, dans cette hypothèse, la différentielle de l'aire A′, il vient

$$dA' = u.mq.$$

* Cela revient à dire qu'on détermine le contour Σ par la condition qu'il ait pour projection sur le plan P le contour $mpnq$.

Supposons maintenant que le point q se déplace en glissant sur la droite mt avec la vitesse v. La quantité dA' devient variable avec le segment mq, et elle a pour différentielle

$$(1)\ldots\ldots\quad d.(dA') = u.v.$$

L'équation (1) ne cesse pas de subsister lorsque les points p et q sont situés primitivement en m et qu'ils sortent de ce lieu, en glissant, l'un sur la droite ml avec la vitesse u, l'autre sur la droite mt avec la vitesse v. Mais, dans cette hypothèse, on peut substituer l'aire A à l'aire A'. On a donc aussi

$$(2)\ldots\ldots\quad d(dA) = u.v.$$

Désignons par s une ligne quelconque tracée sur la surface A et touchant en m la droite mt. La vitesse v n'étant autre chose que la différentielle ds, l'équation (2) devient

$$(3)\ldots\ldots\quad d.(dA) = u.ds,$$

et l'on en déduit, comme au numéro précédent,

$$(4)\ldots\ldots\quad dA = \Delta s.\mathrm{M}_s^{s+\Delta s}\, u.$$

252. Sans rien changer à ce qui précède, considérons, d'une part, les lignes déterminées sur la surface A par les positions successives de la génératrice s, d'autre part, les trajectoires orthogonales de ces lignes. Soit OX l'une de ces trajectoires. Prenons-la pour axe des x et plaçons l'origine en O.

Fig. 98.

MN étant une position quelconque déterminée de la ligne s, soient m l'un de ses points et PmQ la trajectoire orthogonale correspondante.

Lorsque le point M glisse sur l'axe OX avec la vitesse dx et qu'il entraîne avec lui la ligne MN, le point m de cette ligne glisse sur la trajectoire PQ avec la vitesse u, et l'on a généralement

$$(1)\ldots\ldots\quad u = f(s).dx.$$

De là résulte,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dA = dx \,.\, \Delta s.\mathrm{M}_s^{s+\Delta s} f(s).$$

On voit, d'ailleurs, sans difficulté, que le produit $\Delta s.\mathrm{M}_s^{s+\Delta s} f(s)$ se résout nécessairement en une fonction déterminée de la variable x. On a donc aussi

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta A = \Delta x.\mathrm{M}_x^{x+\Delta x}\left[\Delta s.\mathrm{M}_s^{s+\Delta s} f(s)\right].$$

Cette dernière équation peut être considérée comme résolvant, d'une manière générale, la question proposée. S'il s'agissait d'applications particulières, on ne perdrait pas de vue les détails qui précèdent. Ils indiquent la marche à suivre dans les diverses opérations à effectuer successivement.

Veut-on préciser davantage? On peut prendre pour axe des y celle des lignes s qui passe par le point O. Si l'on désigne alors par s et σ les segments Mm, Pm, on a

$$\sigma = f(x, y), \qquad y = \varphi(x, s).$$

De là résulte, en premier lieu,

$$u = d\sigma = f'_x(x, y).dx,$$

et, par suite,

$$dA = dx.\Delta s.\mathrm{M}_s^{s+\Delta s} f'_x(x, y) = dx.\Delta s.\mathrm{M}_s^{s+\Delta s} f'^x\big(x, \varphi(x, s)\big),$$

ce qui donne, en dernier lieu,

$$(4). \quad . \quad . \quad \Delta A = \Delta x.\mathrm{M}_x^{x+\Delta x}\Big[\Delta s.\mathrm{M}_s^{s+\Delta s} f'_x\big(x, \varphi(x, s)\big)\Big].$$

Quant aux opérations à effectuer, elles consistent:

1° A déterminer pour une valeur quelconque de x, *supposée constante*, la moyenne

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{M}_s^{s+\Delta s} f'_x\big(x, \varphi(x, s)\big);$$

2° A exprimer cette moyenne ainsi que la différence Δs en fonction de la variable x, de manière à pouvoir écrire

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta s.\mathrm{M}_s^{s+\Delta s} f'_x(x, \varphi(x, s)) = \mathrm{F}(x);$$

3° A poser et résoudre l'équation finale

$$(7). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta \mathrm{A} = \Delta x.\mathrm{M}_x^{x+\Delta x} \mathrm{F}(x).$$

253. Au lieu de s'en tenir, comme on l'a fait jusqu'ici, à la considération directe de la surface donnée, il est, en général, plus commode et plus simple de substituer à cette surface sa projection sur un plan déterminé. Le principe sur lequel on s'appuie pour opérer cette substitution s'établit aisément de la façon suivante :

Soit A une aire quelconque située dans un plan P et projetée en A′ sur un plan P′. On peut considérer les aires A, A′ comme engendrées simultanément, l'une par un segment de droite mobile dans le plan P, l'autre par la projection sur le plan P′ de ce même segment. Soient λ, λ' les deux segments dont il s'agit. On peut en disposer de manière à ce qu'ils soient et restent perpendiculaires à l'intersection des plans P, P′. Supposons qu'on les assujettisse à remplir cette condition, et désignons par v leur vitesse commune de circulation. On a, conformément à la formule (2) du n° 68, page 184,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\mathrm{A} = \lambda.v, \qquad d\mathrm{A}' = \lambda'.v.$$

Il est visible, d'ailleurs, qu'en désignant par φ l'angle des plans P, P′ on a constamment

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \lambda' = \lambda . \cos \varphi.$$

De là résulte

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d\mathrm{A}' = \cos\varphi . d\mathrm{A},$$

et, par suite,

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta \mathrm{A}' = \Delta \mathrm{A} . \cos \varphi,$$

ou ce qui revient au même, puisque les aires A, A' s'annulent, en même temps, à leur origine commune,

(5). . . . . . . $A' = A \cos \varphi$.

L'équation (5) exprime pour deux aires planes quelconques, dont l'une est la projection de l'autre, le théorème suivant :

L'aire projetée est égale au produit de l'aire projetante par le cosinus de l'angle que les plans des deux aires font entre eux.

On peut dire de la même façon :

L'aire projetante est égale à l'aire projetée divisée par le cosinus de l'angle que les plans des deux aires font entre eux.

Cela posé, soit

(6). . . . . $z = f(x, y)$,

l'équation d'une surface quelconque rapportée à des axes coordonnés rectangulaires OX, OY, OZ.

Prenons sur cette surface un point m, projeté en m' sur le plan des xy. Si nous désignons par A' une aire quelconque située dans ce plan, et que nous appliquions au point m' de cette aire la formule (2) du 251, page 613, il vient, en général,

Fig. 99.

Z, m, O, X, Y, m'

(7). . . . $d(dA') = v.u$.

Soit $d\,(dA)$ la différentielle pour le point m d'une aire quelconque A située sur la surface donnée et projetée en A' sur le plan des xy. On peut toujours déterminer la différentielle $d\,(dA)$ par la condition que l'aire plane qui lui correspond dans le plan tangent en m ait pour projection sur le plan des xy le rectangle ayant pour côtés les vitesses v et u. On a dès lors, conformément à ce qui précède,

(8). . . . . $d.(dA) = \dfrac{d.(dA')}{\cos \varphi} = \dfrac{v.u}{\cos \varphi}$,

φ étant l'angle que le plan tangent en m à la surface donnée fait avec le plan des xy.

Représentons par p et q les dérivées partielles $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$. En combinant les équations (3) et (4) du n° 165, page 417, avec la dernière des équations (3) du n° 129, page 338, on trouve aisément

$$(9). \quad \ldots \ldots \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

De là résulte, en substituant,

$$(10). \quad \ldots \quad d.(dA) = v.u.\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

L'équation (10) a la même généralité que celles d'où nous l'avons déduite. Comparée à l'équation (2) du n° 251, page 613, elle offre l'avantage d'être mieux préparée pour le cas ordinaire des applications.

254. Les vitesses u et v n'étant assujetties qu'à la condition d'être rectangulaires, prenons-les constantes et dirigeons-les de manière à ce qu'elles soient respectivement parallèles, l'une à l'axe OX, l'autre à l'axe OY. Cela revient à poser

$$u = dx = \text{cons}^{\text{te}}, \qquad v = dy = \text{cons}^{\text{te}}.$$

On a, d'ailleurs, d'après l'équation (10) du numéro précédent,

$$(1). \quad \ldots \quad d.(dA) = dx.dy.\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Supposons que le point m' se déplace le long de l'ordonnée qui lui correspond. L'abscisse x demeurant constante ainsi que la vitesse dx, l'ordonnée y varie seule dans les fonctions p et q. De là résulte, en premier lieu,

$$(2). \quad \ldots \quad dA = dx.\Delta y.\text{M}_y^{y+\Delta y}\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Soient

$$y = \varphi(x), \qquad y = \psi(x),$$

les équations des lignes qui limitent, de part et d'autre, l'ordonnée y dans le plan des xy. Il vient

$$\Delta y = \psi(x) - \varphi(x),$$

et comme la moyenne qui figure dans le second membre de l'équation (2) se résout nécessairement en une fonction de l'abscisse x, on peut écrire

$$\Delta y . \mathrm{M}_y^{y+\Delta y} \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \mathrm{F}(x),$$

et, par suite,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad d\mathrm{A} = \mathrm{F}(x) . dx.$$

Imaginons maintenant que l'ordonnée y se déplace de manière à décrire l'aire A'. L'abscisse x supposée jusqu'ici constante devient variable à son tour. Néanmoins l'équation (3) ne cesse pas de subsister. De là résulte, en second lieu,

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \Delta \mathrm{A} = \Delta x . \mathrm{M}_x^{x+\Delta x}\, \mathrm{F}(x).$$

On voit, par ces détails, comment l'équation (1) implique l'équation correspondante

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad \Delta \mathrm{A} = \Delta x . \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} (\Delta y . \mathrm{M}_y^{y+\Delta y} \sqrt{1 + p^2 + q^2}),$$

et comment il faut opérer sur celle-ci pour en déduire l'expression numérique de l'aire à mesurer sur la surface que l'on considère.

Observons qu'on peut procéder en sens inverse, c'est-à-dire en opérant d'abord sur l'ordonnée y comme nous l'avons fait sur l'abscisse x et réciproquement. On trouve ainsi

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad \Delta \mathrm{A} = \Delta y . \mathrm{M}_y^{y+\Delta y} (\Delta x . \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + p^2 + q^2}).$$

Les équations (5) et (6) conduisent également au résultat cherché. Le choix à faire entre elles dépend des facilités plus ou moins

grandes qu'elles présentent au point de vue des opérations indiquées dans leurs seconds membres. Prenons pour exemple le cas où le radical $\sqrt{1+p^2+q^2}$ dépendrait exclusivement de la variable y. L'équation (6) devrait, en général, être préférée, vu qu'elle se réduit immédiatement à la forme plus simple

$$\Delta A = \Delta y . \mathrm{M}_y^{y+\Delta y} \, \Delta x \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Le contraire aurait lieu si le radical $\sqrt{1+p^2+q^2}$ ne dépendait que de l'abscisse x. On atteindrait plus aisément le but en recourant à l'équation (5) et posant, comme on le peut alors,

$$\Delta A = \Delta x . \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} \, \Delta y \sqrt{1+p^2+q^2}.$$

255. Montrons par quelques applications le parti qu'on peut tirer, en certains cas, de tout ce qui précède concernant la quadrature des aires courbes.

Considérons d'abord les surfaces développables. Il est visible *à priori* qu'il existe une infinité de manières de tracer sur ces surfaces un double système de lignes géodésiques dont les unes soient les trajectoires orthogonales des autres. On voit de même qu'en prenant pour génératrices les lignes de l'un de ces systèmes, et pour directrice l'une de leurs trajectoires orthogonales, on a, comme dans le cas des aires planes,

$$\Delta A = \Delta x . \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} \, y.$$

La seule différence consiste en ce que, au lieu d'être rectilignes, les segments représentés par y pour les génératrices, et par Δx pour la directrice, sont généralement courbes.

On parvient au même résultat en partant de l'équation (4) du n° 251, page 613. On peut, en outre, faire l'observation suivante :

Il suffit que les génératrices soient des lignes géodésiques pour qu'elles se rectifient dans le développement.

Cela posé, il est aisé de voir que le théorème du n° 67, page 183, comporte l'extension suivante :

La différentielle de l'aire engendrée par un segment de ligne

géodésique, qui se meut sur une surface développable entre deux courbes quelconques, est égale au produit de ce segment par la vitesse de circulation de son point milieu.

S'agit-il en particulier des cônes ou des cylindres et de l'aire comprise sur ces surfaces entre deux quelconques des trajectoires orthogonales de leurs génératrices rectilignes? L'énoncé qui précède implique cette autre déduction :

L'aire engendrée sur un cône ou sur un cylindre par le segment compris sur les génératrices rectilignes entre deux quelconques de leurs trajectoires orthogonales a pour mesure le produit de ce segment par la trajectoire de son point milieu.

256. Considérons en second lieu les surfaces de révolution.

Le procédé que nous avons décrit au n° 238, page 585, sous le nom de développement homalographique, fait voir immédiatement que pour obtenir l'équivalent de l'aire circonscrite sur ces surfaces par un contour donné, tout se réduit aux opérations suivantes :

1° Rectifier un méridien quelconque;

2° Conserver sur le méridien rectifié les points de division marqués par les parallèles;

3° A partir de ces points rectifier les parallèles suivant des perpendiculaires au méridien rectifié;

4° Reporter sur les parallèles rectifiés les points de division marqués par le contour donné.

Partant de là, on voit aisément que la différentielle de l'aire engendrée par un parallèle a pour expression

$$(1). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad dA = 2\pi . y . ds,$$

y étant le rayon du parallèle que l'on considère et ds la vitesse d'un point quelconque de ce parallèle sur le méridien qu'il décrit.

Observons que la quantité ds est la vitesse de circulation commune à tous les points du parallèle considéré. Cette simple observation suffit. Elle permet d'écrire l'équation (1) comme traduction directe du théorème général formulé au n° 250, page 611.

L'équation (1) donne

$$(2) \ldots\ldots \quad \Delta A = \Delta s . M_s^{s+\Delta s} 2\pi . y.$$

Il est visible, d'ailleurs, que s'il s'agissait de l'aire comprise entre deux parallèles et deux méridiens, ceux-ci faisant entre eux un certain angle α; on devrait remplacer 2π par cet angle, et écrire en conséquence

$$(3) \ldots\ldots \quad \Delta A = \Delta s . M_s^{s+\Delta s} \alpha . y.$$

Le théorème exprimé par l'équation (3) peut s'énoncer comme il suit :

L'aire engendrée sur une surface de révolution par la rotation d'un segment méridien a pour mesure le produit de ce segment par l'arc moyen qu'il décrit.

Il est entendu que les facteurs de ce produit sont respectivement, l'un la longueur rectifiée du segment générateur, l'autre la moyenne des arcs décrits par les différents points de ce même segment.

Appliquons la formule (1) au cas d'une surface sphérique. En désignant par R le rayon du méridien et par x la distance du centre de la sphère au parallèle mobile, il est aisé de voir que l'on a généralement

$$y ds = R dx.$$

De là résulte, par voie de substitution,

$$(4) \ldots\ldots \quad dA = 2\pi R . dx.$$

L'équation (4) donne

$$\Delta A = 2\pi R . \Delta x,$$

c'est-à-dire la mesure connue de la zone sphérique.

La combinaison des équations (2) et (4) conduit à la relation générale

$$M_s^{s+\Delta s}\, 2\pi y = 2\pi R . \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot$$

On en déduit, pour le cas où il s'agit de toute la sphère, Δs devenant égal à πR, et Δx à $2R$,

$$M 2\pi y = 4.R.$$

On voit par là que la circonférence moyenne qui correspond à l'ensemble des parallèles, *lorsqu'on les distribue uniformément suivant le contour du méridien*, a pour longueur quatre fois le rayon de la sphère.

257. Reprenons la formule

$$(1) \ldots\ldots\ldots \quad dA = 2\pi y ds,$$

et montrons comment elle s'applique au cas général où le méridien considéré se compose de deux segments MN, M'N' disposés symétriquement par rapport à un centre C, ou par rapport à une droite LCK parallèle à l'axe de révolution IG.

Soit h la distance de la droite LCK à l'axe IG. Si l'on conjugue entre deux points quelconques m, m' situés symétriquement, l'un sur l'arc MN, l'autre sur l'arc M'N' et qu'on désigne par z la distance de ces points à la droite LCK, on a généralement

Fig. 100.

$$(2) \ldots \quad y = h \pm z,$$

le signe à prendre étant le supérieur ou l'inférieur selon qu'il s'agit du segment MN ou du segment M'N'.

Distinguons les portions de surface engendrées simultanément et symétriquement, l'une par l'arc MN, l'autre par l'arc M'N'. On a, pour la première,

$$(3) \ldots\ldots \quad dA = 2\pi(h + z)ds,$$

et, pour la seconde,

$$(4). \ldots \quad dA' = 2\pi(h - z)ds,$$

la quantité ds affectant, de part et d'autre, une seule et même valeur.

La combinaison des équations (3) et (4) donne, d'une part,

$$(5). \ldots \quad dA + dA' = d(A + A') = 4\pi h ds,$$

et, par suite,

$$(6). \ldots \quad \Delta(A + A') = 4\pi h . \Delta s,$$

d'autre part,

$$(7). \ldots \quad dA - dA' = d[A - A'] = 4\pi z ds,$$

et, par suite,

$$(8). \ldots \quad \Delta[A - A'] = 4\pi \Delta s . M_{s}^{s+\Delta s} z.$$

Ces résultats impliquent les énoncés suivants, où l'on doit observer que les aires changent de signe pour les parties des segments générateurs qui s'abaisseraient au-dessous de l'axe de révolution :

1° *Les surfaces engendrées par les segments* MN, M'N' *dans leur révolution autour de l'axe* IG *ont pour somme algébrique le double produit du segment* MN *par la trajectoire du point* C;

2° *La différence algébrique de ces surfaces est indépendante de la distance du point* C *à l'axe de révolution. Elle a même mesure que si la révolution s'effectuait autour de la droite* LCK.

Dans le cas particulier du tore, les segments MN, M'N' étant situés tous deux sur une même circonférence de cercle au rayon r, on a, comme au numéro précédent,

$$zds = rdx.$$

Cette valeur substituée dans l'équation (7), donne

$$d(A - A') = 4\pi r \, . \, dx,$$

et, par suite,

(9). . . . . . $\Delta(A - A') = 4\pi r \, . \, \Delta x.$

On a, d'ailleurs, comme dans les cas généraux traités ci-dessus,

(10). . . . . . $\Delta(A + A') = 4\pi h \, . \, \Delta s.$

De là résulte, d'une part,

$$\Delta A = 2\pi h \Delta s + 2\pi r \Delta x,$$

d'autre part,

$$\Delta A' = 2\pi h \Delta s - 2\pi r \Delta x,$$

et la question se trouve ainsi complétement résolue.

258. Considérons, en dernier lieu, le cas général d'une surface quelconque et bornons-nous à ajouter un nouveau théorème à ceux que nous avons exposés précédemment.

Reproduisons l'équation (4) du n° 250, page 611.

$$dA = s \, . \, M_0^s u.$$

et l'énoncé qu'elle implique,

L'aire engendrée par une ligne quelconque s qui se meut, avec ou sans changement de forme, a pour différentielle le produit de cette ligne, par sa vitesse moyenne de circulation.

Soit A une portion de surface circonscrite par un contour donné. On peut toujours, et cela d'une infinité de manières, considérer l'aire A comme le lieu d'une suite continue de lignes σ, *toutes géodésiques.* Assujettissons la ligne s à se confondre successivement avec chacune des trajectoires orthogonales des lignes σ. *Il s'ensuit* que la vitesse u est à chaque instant la même pour

tous les points de la ligne S et qu'on peut écrire en conséquence,

$$dA = s.u = s.d\sigma.$$

De là résulte, immédiatement,

$$\Delta A = \Delta\sigma.Ms,$$

et l'on a ce nouveau théorème :

L'aire engendrée sur une surface quelconque par la trajectoire orthogonale d'une suite de lignes géodésiques a pour mesure l'arc compris sur ces lignes entre les positions extrêmes de la trajectoire, multiplié par la longueur moyenne du segment générateur.

Il est deux cas généraux où l'on peut se donner *à priori* une suite continue de lignes géodésiques. Ce sont ceux des surfaces réglées et des surfaces de révolution.

Dans le cas des surfaces réglées, l'énoncé général formulé ci-dessus comprend la déduction suivante :

L'aire engendrée sur une surface réglée par la trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes a pour mesure la distance comprise entre les positions extrêmes du segment générateur, multipliée par la longueur moyenne de ce même segment.

Dans le cas des surfaces de révolution, si l'on prend pour lignes géodésiques la suite des méridiens, on a les parallèles pour trajectoires orthogonales de ces lignes. On retombe ainsi sur la solution du n° 256, page 621.

Supposons, pour terminer, qu'il s'agisse du développement homalographique d'une aire A circonscrite par un contour donné sur une surface quelconque. D'après ce qui précède, tout se réduit aux opérations suivantes :

1° Rectifier une des lignes σ;

2° Conserver sur la ligne σ rectifiée les points de division marqués par la ligne S dans ses positions successives;

3° A partir de ces points, rectifier la ligne S suivant des perpendiculaires à la ligne σ rectifiée;

4° Reporter sur la ligne S rectifiée les points de division marqués par le contour donné de l'aire A.

Il est visible qu'au point de vue des quadratures, ce procédé établit une analogie complète entre la mesure des aires planes et celle des aires courbes, les lignes σ jouant le rôle des abscisses et leurs trajectoires orthogonales celui des ordonnées.

Différentielle et cubature d'un solide quelconque.

259. Soit H un cylindre droit à base quelconque A. Désignons par P le plan de la base, par S une surface à déterminer comme on veut, par V le volume intercepté dans le cylindre H par le plan P et la surface S.

Supposons, d'abord, que la surface S se réduise à un plan P' parallèle au plan P. En désignant par z la distance du plan P' au plan P, il est visible qu'on peut écrire *à priori*

$$\frac{\Delta V}{\Delta z} = \text{cons}^{\text{te}} = C,$$

et, par suite,

(1). . . . . $V = Cz.$

On voit de même que la constante C ne peut être ni moindre, ni plus grande que la base A. Elle lui est donc nécessairement égale. De là résulte

(2). . . . . $V = A.z,$

et, par suite,

(3). . . . . $dV = A.dz.$

Considérons un cas plus général, celui du volume engendré par l'aire A, lorsqu'elle se meut avec ou sans changement de

forme, le plan qui la contient conservant d'ailleurs une direction constante.

Donnons-nous l'aire A dans une position quelconque déterminée et représentons-nous le cylindre droit dont elle est actuellement la base. Soit H ce cylindre. L'aire A pouvant sortir du lieu qu'elle occupe suivant deux sens directement opposés, comparons le volume qu'elle engendre à celui que son plan intercepte dans le cylindre H. Si ces volumes demeuraient égaux de part et d'autre, on aurait, comme tout à l'heure,

$$dV = A \, . \, dz.$$

En général, ils sont inégaux, et si le premier l'emporte d'abord sur le second pour l'un des deux sens à considérer, l'inverse a lieu pour le sens contraire. S'agit-il du sens où le premier volume commence par l'emporter sur le second? La différentielle cherchée ne peut être moindre que le produit $A.dz$. S'agit-il du sens opposé? Le premier volume commençant par être inférieur au second, la différentielle cherchée ne peut être plus grande que ce même produit. Mais, d'un autre côté, cette différentielle n'admet, ainsi qu'on l'a vu au n° 69, page 185, pour l'un et l'autre cas, qu'une seule et même valeur. On a donc nécessairement, et toujours,

(4). . . . . $dV = A.dz.$

De là résulte, en général,

(5) . . . . $\Delta V = \Delta z . M_z^{z+\Delta z} A,$

et l'on a le théorème suivant :

Le volume engendré par une aire plane qui se meut dans l'espace, avec ou sans changement de forme, et dont le plan conserve une direction constante a pour mesure le produit de la valeur moyenne de l'aire génératrice par la distance que cette aire franchit perpendiculairement à son plan.

Ce simple théorème peut être considéré comme résolvant à lui

seul la question générale des cubatures. Quel que soit, en effet, le solide que l'on ait à cuber, rien n'empêche qu'on se donne pour aire génératrice la section faite à l'intérieur par un plan mobile de direction constante.

260. Reprenons les données premières du n° 259, en supposant que la surface S se réduise à un plan quelconque P'.

Soit I l'intersection des plans P, P'. Considérons la base A et le volume V comme engendrés simultanément, la base A par un segment rectiligne MN, assujetti à rester parallèle à la droite I, le volume V par le rectangle qui se projette en MN et dont la base supérieure est située dans le plan P'.

Fig. 101.

En désignant par dx la vitesse de circulation du segment MN, par y la longueur de ce segment, par z la hauteur du rectangle projeté en MN, on a, d'après la formule (2) du n° 68, page 184,

$$dA = y.dx,$$

et, d'après la formule (4), établie tout à l'heure au n° 259,

$$dV = zy.dx.$$

De là résulte,

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad dV = z.dA,$$

et, par suite,

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Delta V = \Delta A.M_A^{A+\Delta A}(z),$$

ou, plus simplement,

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad V = A.M(z).$$

Les équations (1), (2), (3) résolvent la question proposée en ce qui concerne la différentielle et la cubature d'un tronc de cylindre.

Sans rien changer à ce qui précède, imaginons que le plan P'

sorte du lieu qu'il occupe en tournant autour de la droite I. Différenciée dans cette hypothèse, l'équation (1) donne

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d.dV = dz.dA,$$

et, par suite, l'ordre des différentiations effectuées sur le volume V étant interverti,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta dV = \Delta A.M_{A}^{A+\Delta A}(dz),$$

ou plus simplement,

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dV = A.M(dz).$$

L'équation (6) est générale. Appliquée au cas où le plan P' sort du lieu P en tournant autour de la droite I, elle s'étend d'elle-même au cas d'une aire plane qui se meut comme on veut dans l'espace avec ou sans changement de forme. Cette extension pouvant se démontrer par un procédé identique à celui que nous avons suivi pour généraliser l'équation (5) du n° 259, nous nous bornons à constater sa légitimité. On a, en conséquence, le théorème suivant :

Le volume engendré par une aire plane qui se meut dans l'espace, avec ou sans changement de forme, a pour différentielle le produit de cette aire par sa vitesse moyenne de circulation.

261. Reportons-nous, de nouveau, aux données premières du n° 259.

La surface S étant quelconque, considérons la base A et le volume V comme engendrés simultanément, la base A par un segment rectiligne MN de direction constante, le volume V par la section plane B, faite suivant MN perpendiculairement au plan P.

En désignant, comme au numéro précédent, par dx la vitesse de circulation du segment MN, par y la longueur de ce segment, par z l'ordonnée du point de la surface S qui se projette en m sur

le segment MN, on a d'abord, conformément aux formules (2) et (4) du n° 68, pages 184 et 185,

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dB = z.dy, \qquad B = y.M_0^y(z).$$

Il vient ensuite, d'après ce qui précède,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dV = B.dx.$$

On peut écrire, en conséquence,

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dV = y.dx.M_0^y(z),$$

et, substituant à $y.dx$ sa valeur dA,

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dV = dA.M_0^y(z).$$

De là résulte, en général,

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad \Delta V = \Delta A.M_x^{x+\Delta x}[M_0^y(z)] = \Delta A.M_A^{A+\Delta A}(z),$$

et s'il s'agit du volume V qui correspond à la base donnée A,

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad V = A.M(z).$$

Le théorème exprimé par l'équation (6) s'étend de lui-même au cas où le volume à mesurer est limité par une enveloppe quelconque. On peut, en effet, projeter ce volume sur un plan et prendre sa projection pour base du cylindre à considérer. Les droites projetantes étant par hypothèse perpendiculaires au plan de projection, il est aisé de voir qu'on a l'énoncé suivant :

Tout solide qu'on projette orthogonalement sur un plan a pour mesure le produit de l'aire projetée par la longueur moyenne des segments que l'enveloppe intercepte sur les droites projetantes.

On ne perdra pas de vue que la moyenne dont il s'agit correspond à une répartition faite uniformément sur l'aire projetée.

Si les droites projetantes étaient obliques, relativement au plan de projection, rien ne serait changé, si ce n'est l'unité de mesure, le cube étant remplacé par un parallélépipède, ayant ses côtés égaux à ceux du cube, sa base carrée, ses arêtes latérales inclinées sur la base comme les droites projetantes sur le plan de projection.

262. Considérons la base A comme étant la projection sur le plan P d'une aire courbe qui se meut dans l'espace avec ou sans changement de forme. Différenciée dans cette hypothèse, l'équation (6) donne, en général,

$$dV = A.M(dz) + dA.M(z).$$

De là résulte, pour le cas où la surface S se confond d'abord avec le plan P, chacune des valeurs représentées par z se réduisant à zéro,

$$(7) \quad dV = A.M(dz).$$

Revenons à l'équation (2). En la différenciant par rapport à B, dans l'hypothèse où, sans sortir du lieu qu'il occupe, le segment y s'allonge ou se raccourcit par le déplacement de l'une de ses extrémités, on a, d'abord,

$$d.d.V = dB.dx,$$

puis, remplaçant dB par sa valeur $z.dy$,

$$(8) \quad d.d.V = z.dy.dx.$$

Appliquons l'équation (8) au point m du segment MN et, ce point restant fixe, imaginons que la surface S se déplace avec ou sans déformation. La quantité $d.dV$ devient variable, en même temps que l'ordonnée z, et elle a pour différentielle

$$(9) \quad d.d.dV = dz.dy.dx,$$

cette différentielle étant prise à partir du point où l'ordonnée z vient couper le lieu actuel de la surface S.

L'équation (9) s'étend à tous les cas, l'aire $dx.dy$ pouvant être indifféremment constante ou variable le long de l'ordonnée z. Cela résulte du théorème du n° 260, page 629. On le voit aussi en différenciant l'équation (8) d'après la règle établie pour le produit de deux facteurs, et en observant que pour attribuer à la différentielle cherchée sa vraie valeur, il faut opérer comme si l'ordonnée z avait son origine sur la surface S : il s'ensuit, en effet, qu'on doit annuler z dans le résultat de la différentiation, ce qui revient précisément au même que si le facteur z était seul variable.

La différentielle exprimée par l'équation (9) est absolument générale. Elle s'applique à tout point pris comme on veut, à l'intérieur d'un solide.

S'agit-il d'une suite de points déterminant, par leur ensemble, une surface quelconque S, sortant tous à la fois des lieux qu'ils occupent et glissant, chacun sur la normale qui lui correspond? On peut pour chaque point substituer à la surface S le plan qui la touche en ce point. On peut aussi mesurer les vitesses dx suivant des lignes géodésiques dont on prendrait les trajectoires orthogonales pour y porter les vitesses dy. Supposons qu'on opère de cette façon et qu'on effectue le développement homalographique de la surface S, d'après le procédé décrit au n° 258, page 625. Si dans ce développement, on conserve à chaque point sa vitesse de circulation représentée par dz, rien n'est changé ni dans la différentielle $d.d.d\mathrm{V}$, ni dans aucun des trois facteurs dx, dy, dz. La conséquence évidente est que l'équation (7), établie d'abord pour le cas d'une aire plane et applicable, en conséquence, au développement homalographique de la surface S, ne cesse pas de subsister pour le cas d'une aire courbe dont les différents points se déplacent normalement à cette aire. De là résulte le théorème suivant :

Le volume engendré par une aire qui se meut, avec ou sans changement de forme, a pour différentielle le produit de cette aire par sa vitesse moyenne de circulation.

Ce théorème comprend, comme cas particulier, celui que nous avons formulé au n° 260, page 629, pour le cas des aires planes.

263. Indiquons, d'après ce qui précède, comment on peut opérer, en général, pour effectuer la cubature d'un solide rapporté à des axes coordonnés rectangulaires OX, OY, OZ.

Soient

$$(1) \ldots \quad z = F(x, y), \qquad z = f(x, y),$$

les équations des surfaces qui limitent supérieurement et inférieurement le volume à mesurer.

On peut partir de l'équation (9) du n° 262,

$$(2) \ldots \quad d.d.dV = dx.dy.dz.$$

Les vitesses dx, dy étant supposées constantes, on en déduit

$$(3) \ldots \quad d.d.V = \Delta z.dx.dy = [F(x, y) - f(x, y)]\, dx.dy.$$

L'équation (3), où la variable x doit d'abord être considérée comme constante, donne de même

$$(4) \ldots \quad dV = dx.\Delta y.M_y^{y+\Delta y}[F(x, y) - f(x, y)].$$

Il est visible, d'ailleurs, que l'équation (4) peut s'écrire *à priori*, soit parce qu'elle est identique à l'équation (3) du n° 261, page 630, soit parce qu'en prenant pour aire génératrice du volume V la section faite dans le solide par un plan parallèle à celui des zy, l'équation (4) n'est autre chose que la traduction algébrique du théorème formulé au n° 260, page 629.

Observons ici que la différence Δy et la moyenne qui figure dans le second membre de l'équation (4) sont toutes deux fonction de la variable x. On peut écrire, en conséquence,

$$\Delta y.M_y^{y+\Delta y}[F(x, y) - f(x, y)] = \varphi(x).$$

De là résulte,

$$dV = \varphi(x).dx,$$

[illegible]

[illegible]

[illegible] de la même [illegible] en vertu [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

qu'elles affectent, les quantités φ, θ et leurs différentielles $d\varphi$, $d\theta$. L'équation (1) a pour équivalent

$$(2)\quad d.dV = \cos\varphi.d\varphi.d\theta.\Delta r.\mathrm{M}_r^{r+\Delta r}\,r^2 = \cos\varphi.d\varphi.d\theta.\frac{(r+\Delta r)^3 - r^3}{3}\text{*}.$$

Conservons à φ sa valeur actuelle et faisons varier l'angle θ. Les quantités r et Δr deviennent fonction de la variable θ et l'on déduit de l'équation (2)

$$(3).\quad .\quad .\quad dV = \cos\varphi.d\varphi.\Delta\theta.\mathrm{M}_\theta^{\theta+\Delta\theta}\frac{(r+\Delta r)^3 - r^3}{3}.$$

Cela fait, il suffit d'exprimer en fonction de φ l'angle θ et la différence $\Delta\theta$, puis de faire varier l'angle φ, pour passer de l'équation (3) à l'équation finale

$$(4).\quad .\quad \Delta V = \Delta\varphi.\mathrm{M}_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi}\left[\cos\varphi.\Delta\theta.\mathrm{M}_\theta^{\theta+\Delta\theta}\frac{(r+\Delta r)^3 - r^3}{3}\right].$$

Dans le cas particulier où le rayon vecteur Om est toujours nul à l'une de ses limites et où les angles θ et φ varient constamment, le premier de o à 2π, le second de o à $\frac{\pi}{2}$, on peut désigner par r le rayon vecteur représenté ci-dessus par $r + \Delta r$, et, dès lors, écrire plus simplement

$$(5).\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad \Delta V = \frac{\pi^2}{3}\,\mathrm{M}_o^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos\varphi.\mathrm{M}_o^{2\pi}\,r^3\right].$$

Quant à la marche à suivre pour effectuer les opérations indi-

* La formule (1), du n° 70, page 190, donne, en général,

$$\Delta x.\mathrm{M}_x^{x+\Delta x}\,x^n = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{n+1}.$$

On verra plus loin, au n° 266, page 641, comment l'équation (2) peut s'obtenir *à priori*.

quées dans le second membre de l'équation (5), elle résulte des détails qui précèdent et peut se résumer comme il suit :

1° Remplacer r par sa valeur en fonction des angles θ et φ;

2° L'angle φ étant considéré comme constant et quelconque, déterminer la valeur générale de la moyenne $M_0^{2\pi} r^3$;

3° Cette valeur étant obtenue sous la forme d'une fonction de φ représentée par F (φ) calculer la moyenne

$$M_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi . F(\varphi).$$

On voit, aisément, comment cette marche s'applique au cas général ; comment aussi, il peut être quelquefois plus simple d'intervertir l'ordre des opérations, en partant de l'équation (1) et choisissant, pour les considérer d'abord comme constantes, celles des variables r, θ et φ qui permettent d'arriver ainsi plus promptement au but. Prenons pour exemple le cas d'une sphère, le pôle étant au centre. Si l'on considère d'abord comme constantes les quantités r, φ et leurs différentielles dr, $d\varphi$, l'équation

$$d.d.dV = r^2 \cos\varphi . dr . d\varphi . d\theta,$$

où la quantité θ varie seule, donne immédiatement,

$$d.dV = r^2 \cos\varphi . dr . d\varphi . \Delta\theta = 2\pi r^2 \cos\varphi . dr . d\varphi.$$

Partant de là, et restituant à l'angle φ sa variabilité, on trouve

$$dV = 2\pi r^2 dr . \Delta\varphi . M_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} \cos\varphi.$$

On a, d'ailleurs, entre les limites $\varphi = o$, $\varphi + \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$$\Delta\varphi . M_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} \cos\varphi = 1 \ {}^*.$$

* L'équation

$$d \sin\varphi = \cos\varphi . d\varphi$$

a pour équivalent général

$$\Delta \sin\varphi = \Delta\varphi . M_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} \cos\varphi = \sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi.$$

De là résulte, entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$

$$\Delta\varphi . M \cos\varphi = 1.$$

Il vient donc, entre ces mêmes limites,

$$dV = 2\pi r^2 dr,$$

et, par suite, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure,

$$\Delta V = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Les angles θ et φ ayant varié, l'un de o à 2π, l'autre de o à $\frac{\pi}{2}$, le volume exprimé par la différence ΔV est évidemment la moitié de la sphère. On a donc pour le volume total

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

265. Le cas d'un solide rapporté à un système de coordonnées polaires, peut se traiter directement au moyen du théorème du n° 262, page 632. Il suffit pour cela qu'on se donne une sphère de rayon variable, ayant son centre au pôle et qu'on prenne pour aire génératrice du solide la section qui lui est commune avec la surface de cette sphère. Soit A cette section : on peut écrire immédiatement

(1). . . . . $dV = A.dr,$

et, par suite,

(2) . . . . $\Delta V = \Delta r . M_r^{r+\Delta r}(A).$

De là se déduit le théorème suivant :

Le volume engendré par une aire sphérique qui se meut dans l'espace, sous la seule condition de conserver toujours un seul et même centre, a pour mesure le produit de la valeur moyenne de l'aire génératrice par la distance franchie suivant le rayon.

Ce théorème comprend implicitement celui que nous avons

formulé au n° 259, page 627. Il peut, de même, être considéré comme résolvant à lui seul la question générale des cubatures.

Revenons à l'équation (1). On a, d'après la formule (2), du n° 251, page 613,

$$d.dA = u.v.$$

Remplaçons, comme au numéro qui précède, u par $r.d\varphi$ et v par $r \cos \varphi.d\theta$. Il vient

$$d.dA = r^2 \cos \varphi.d\varphi.d\theta.$$

L'équation (3), où la quantité r doit être considérée comme constante, donne, en attribuant à φ une valeur quelconque déterminée et faisant varier la quantité θ,

(4). . . . . . . $dA = r^2 \cos \varphi.d\varphi.\Delta\theta.$

Supposons qu'on ait remplacé $\Delta\theta$ par sa valeur en fonction de φ, l'équation (4) a pour équivalent

(5) . . . . . . $A = r^2.\Delta\varphi.M_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} \cos \varphi.\Delta\theta.$

De là résulte, en substituant cette valeur dans l'équation (1),

(6) . . . . . $dV = r^2 dr.\Delta\varphi.M_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} \cos \varphi.\Delta\theta.$

Il ne reste plus qu'à exprimer les limites générales φ et $\varphi + \Delta\varphi$ en fonction de r pour passer de l'équation (6) à l'équation finale

(7) . . . $\Delta V = \Delta r.M_r^{r+\Delta r} [r^2 \Delta\varphi.M_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} \cos \varphi.\Delta\theta].$

Dans le cas particulier où le rayon r est nul à l'une de ses limites et où l'angle θ varie constamment de o à 2π, on peut remplacer $\Delta\theta$ par 2π et écrire plus simplement

(8) . . . $\Delta V = 2\pi R.M_o^R [r^2 \Delta\varphi.M_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} \cos \varphi],$

R étant la limite supérieure du rayon r.

Suppose-t-on, en outre, que l'angle φ varie constamment de o à $\frac{\pi}{2}$? L'équation (8) ne subsiste plus que pour le cas de la sphère. On a, d'ailleurs, entre ces limites,

$$\Delta\varphi . M_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi} \cos\varphi = 1 \ ^{*}.$$

Il vient donc, en substituant,

$$\Delta V = 2\pi R . M_{o}^{R} r^{2} = \frac{2\pi R^{3}}{3} \ ^{**}.$$

On en conclut, comme au numéro précédent, que le volume total de la sphère a pour expression

$$V = \frac{4}{3}\pi R^{3}.$$

266. Montrons, par quelques exemples, le parti qu'on peut tirer, en certains cas, des théorèmes exposés précédemment pour la cubature des solides.

S'agit-il d'abord d'un cône à base plane quelconque? Nommons B la base de ce cône, h sa hauteur, A une section quelconque faite parallèlement à la base B, z la distance du sommet du cône au plan de la section A. On a, généralement,

$$A = B\frac{z^{2}}{h^{2}}.$$

De là résulte, en vertu du théorème du n° 259, page 627,

$$V = h . M_{o}^{h} A = \frac{B}{h^{2}} . h . M_{o}^{h} z^{2},$$

et, remplaçant la quantité $h . M_{o}^{h} z^{2}$ par sa valeur $\frac{h^{3}}{3}$,

(1). . . . . $$V = \frac{Bh}{3}.$$

* Voir au besoin la deuxième note du n° 264, page 636.

** Voir au besoin la première note du n° 264, page 635.

S'agit-il ensuite d'une sphère au rayon R? Le théorème du n° 265, page 637, se traduit directement par l'équation

$$V = R.M_0^R 4\pi r^2.$$

On a, d'ailleurs,

$$R.M_0^R r^2 = \frac{R^3}{3},$$

il vient donc, en substituant,

$$(2)\quad\ldots\ldots\ldots\quad V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

On peut aussi partir de la formule (1) établie ci-dessus pour le cas général d'un cône à base plane, et, désignant par A la surface de la sphère, poser *à priori*

$$d.dV = \frac{R}{3}\,d.d.A.$$

Cela donne, d'abord,

$$d.V = \frac{R}{3}\,dA,$$

et, ensuite,

$$V = \frac{R}{3}\,A = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ce dernier procédé s'applique au cas d'un solide quelconque, rapporté à un système de coordonnées polaires. Plaçons le pôle O à l'intérieur du solide et nommons B la surface enveloppe, *m* un quelconque de ses points. Il vient, comme tout à l'heure,

$$d.dV = \frac{h}{3}\,d.dB.$$

L'aire $d.dB$ étant située dans le plan qui touche l'enveloppe au

point m, et la hauteur h étant la perpendiculaire abaissée du pôle O sur ce plan.

Soit α l'angle que le rayon vecteur Om fait avec la droite h, et $d.d$A la projection orthogonale de l'aire $d.d$B sur le plan mené par le point m normalement à Om. On a, simultanément,

$$h = r\cos\alpha, \qquad d.dA = d.dB.\cos\alpha.$$

De là résulte, en substituant,

$$d.dV = \frac{r}{3}d.dA,$$

et l'on peut disposer comme on veut de l'aire $d.d$A. Déterminée comme au n° 265, page 638, elle a pour expression

$$d.dA = r^2\cos\varphi.d\varphi.d\theta.$$

On en déduit

$$d.dV = \frac{r^3}{3}\cos\varphi.d\varphi.d\theta,$$

et, pour le cas où le pôle est extérieur au volume à mesurer,

$$d.dV = \frac{(r+\Delta r)^3 - r^3}{3}\cos\varphi.d\varphi.d\theta.$$

On retombe ainsi sur la formule (2) du n° 264, page 635.

267. Considérons maintenant l'ellipsoïde et supposons d'abord qu'il soit de révolution. Rapporté à ses axes principaux, il a pour équation

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Comparé à la sphère concentrique dont le rayon est a, il n'en diffère que par la substitution de l'ordonnée $\frac{c}{a}z$ à l'ordonnée z. Il suit, de là, et du théorème du n° 261, page 630, que pour passer du volume de la sphère à celui de l'ellipsoïde considéré, il suffit

de multiplier le premier par le rapport $\frac{c}{a}$. On trouve ainsi, pour le volume cherché,

$$(2). \quad \ldots\ldots \quad V = \frac{c}{a} \cdot \frac{4}{3}\pi.a^3 = \frac{4}{3}\pi.a^2 c.$$

Passons maintenant de l'ellipsoïde (1) à l'ellipsoïde quelconque, ayant pour équation

$$(3). \quad \ldots\ldots \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Comparé au premier, cet ellipsoïde n'en diffère que par la substitution de l'ordonnée $\frac{b}{a}y$ à l'ordonnée y. Il suit de là et du théorème rappelé ci-dessus, que pour passer du volume de l'ellipsoïde (1) à celui de l'ellipsoïde (3), il suffit de multiplier le premier par le rapport $\frac{b}{a}$. On trouve ainsi, pour le cas général d'un ellipsoïde quelconque,

$$(4). \quad \ldots\ldots \quad V = \frac{4}{3}\pi.a.b.c.$$

Si l'ellipsoïde, dont nous venons de déterminer le volume, était rapporté à un système d'axes obliques, dirigés respectivement suivant trois demi-diamètres a', b', c' conjugués entre eux, son équation deviendrait

$$(5). \quad \ldots\ldots \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

Les équations (3) et (5) étant de même forme, il est visible qu'en appliquant, pour chacune, le procédé décrit au n° 263, page 633, on parviendrait nécessairement à des résultats de forme identique et ne différant l'un de l'autre que par la substitution des quantités a', b', c' à leurs similaires a, b, c.

Rien, d'ailleurs, n'est changé par là, si ce n'est l'unité de volume, le cube étant remplacé par le parallélipipède dont les côtés égaux à ceux du cube sont dirigés suivant les axes a', b', c'.

La conséquence évidente est, qu'en prenant ce parallélipipède pour unité de volume, on a, comme expression numérique du volume de l'ellipsoïde,

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{4}{3}\pi . a'.b'.c'.$$

Soit γ l'angle que l'axe c' fait avec le plan des axes a', b', et θ celui que font entre eux ces derniers axes. Pour revenir de la seconde unité à la première, il suffit d'introduire, comme coefficient, le facteur $\sin\gamma . \sin\theta$. On a donc aussi,

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad V = \frac{4}{3}\pi . a'.b'.c'.\sin\theta . \sin\gamma .$$

La comparaison des équations (4) et (7) fait voir que le parallélipipède construit sur trois diamètres quelconques $2a'$, $2b'$, $2c'$ conjugués entre eux a toujours même volume que celui qui correspond aux diamètres principaux $2a$, $2b$, $2c$.

268. Considérons en dernier lieu le volume engendré dans un solide de révolution par une portion quelconque A de l'aire méridienne. Le théorème du n° 260, page 629, implique évidemment la déduction suivante :

Le volume engendré dans un solide de révolution par une portion quelconque A *de la section méridienne a pour mesure le produit de l'aire* A *par l'arc moyen qu'elle décrit.*

Pour établir cette déduction, il suffit d'observer que l'on a, comme traduction directe du théorème invoqué,

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dV = A.My.d\alpha = A.d\alpha.My,$$

$d\alpha$ étant la vitesse angulaire de rotation et y la distance d'un point quelconque de l'aire A à l'axe de révolution.

La quantité représentée par My est évidemment constante De là résulte, en vertu de l'équation (1),

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta V = A.\Delta\alpha . My = A.M(y\Delta\alpha).$$

On voit, d'ailleurs, aisément, que l'énoncé formulé ci-dessus n'est autre chose que la traduction littérale de l'équation (2).

Extension générale au cas où les grandeurs à déterminer sont données comme limites de certaines sommes.

269. En traitant, comme nous l'avons fait jusqu'ici, la question générale des rectifications, quadratures et cubatures, nous avons voulu faire voir comment elle se résout, indépendamment des procédés fournis par la méthode des limites. Peut-être avons-nous ainsi négligé quelqu'une des ressources qui, sans nous être nécessaires, pouvaient néanmoins nous servir. Il est, d'ailleurs, des cas où la considération des limites s'impose d'elle-même comme expression directe du problème à résoudre. Obligés d'aborder ces cas, nous trouverons dans la solution qui s'y applique des éclaircissements utiles et de nouvelles facilités.

Commençons par établir le théorème fondamental qui permet de substituer les différentielles aux différences, lorsqu'on en fait la somme pour un intervalle quelconque déterminé et qu'on les assujettit à converger toutes ensemble vers zéro.

Soit

$$y = f(x)$$

une fonction quelconque de la variable x. On a généralement et simultanément,

$$(1)\ldots \quad \Delta y = \Delta x . \mathrm{M}_x^{x+\Delta x} f'(x), \qquad dy = f'(x).dx.$$

Supposons la fonction y toujours croissante dans l'intervalle Δx, et divisons cet intervalle en n parties égales *. Soit h l'une de ces parties.

Si nous appliquons, d'une part, à la valeur quelconque

* La démonstration qui suit se ferait de la même manière si la fonction y, au lieu d'être toujours croissante, était toujours décroissante dans l'intervalle Δx. Elle se ferait, sans plus de difficulté, si la division s'effectuait en parties inégales, toutes choses restant d'ailleurs les mêmes.

$x_p = x + ph$, d'autre part, à la valeur correspondante y_p, les équations (1); nous avons,

$$(2). \quad . \quad . \quad \Delta y_p = h \mathrm{M}_{x_p}^{x_p+h} f'(x), \qquad dy_p = dx_p . f'(x_p).$$

La vitesse dx_p pouvant être quelconque, prenons-la égale à h. Il vient, par voie de substitution,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad dy_p = hf'(x_p) = \frac{f'(x_p)}{\mathrm{M}_{x_p}^{x_p+h} f'(x)} . \Delta y_p.$$

Considérons le binôme

$$1 - \frac{f'(x_p)}{\mathrm{M}_{x_p}^{x_p+h} f'(x)},$$

et désignons par z la plus grande des valeurs qu'il affecte, lorsqu'on pose successivement $p = o$, $p = 1$, $p = 2$, etc., $p = n - 1$. Il s'ensuit que si, parmi les valeurs de ce binome, il en est une pour laquelle on ait, exceptionnellement,

$$\frac{f'(x_p)}{\mathrm{M}_{x_p}^{x_p+h} f'(x)} = 1 - z,$$

on a, en même temps, pour toutes les autres,

$$\frac{f'(x_p)}{\mathrm{M}_{x_p}^{x_p+h} f'(x)} > 1 - z.$$

De là, et, eu égard à l'équation (3), résulte évidemment,

$$(4). \quad dy_o + dy_1 + \text{etc.} + dy_{n-1} = (1 - \eta)\left[\Delta y_o + \Delta y_1 + \text{etc.} + \Delta y_{n-1}\right],$$

η étant une quantité nécessairement comprise entre o et z.

Observons ici qu'il suffit d'attribuer au nombre n des valeurs de plus en plus grandes, ou, ce qui revient au même, d'attribuer à h des valeurs de plus en plus petites, pour que la quantité z et

à fortiori la quantité η se rapproche indéfiniment de zéro. L'équation (4) implique, en conséquence, l'équation finale

$$(5)\quad \Delta y_0 + \Delta y_1 + \text{etc.} + \Delta y_{n-1} = \Delta x . M_x^{x+\Delta x} f'(x) = \lim\left[dy_0 + dy_1 + \text{etc.} + dy_{n-1}\right].$$

On voit, d'ailleurs, aisément, que cette équation s'établirait de la même manière si les subdivisions de l'intervalle Δx présentaient des inégalités, pourvu qu'elles restassent assujetties à converger toutes ensemble vers zéro.

Le théorème exprimé par l'équation (5) comporte l'énoncé suivant :

Les valeurs affectées par la différentielle dans un intervalle quelconque déterminé ont, pour limite de leur somme, la somme des différences qui leur correspondent, ou, ce qui revient au même, le produit de l'accroissement total de la variable par la valeur moyenne de la fonction dérivée.

Il implique, en outre, la déduction suivante :

Lorsqu'on subdivise l'accroissement total d'une fonction en parties qu'on prend de plus en plus petites et qu'on fait ainsi converger vers zéro, on peut substituer à ces parties les différentielles qui leur correspondent et prendre pour somme des unes la limite de la somme des autres.

Cela posé, occupons-nous d'abord des cas auxquels nous avons fait allusion dans le premier paragraphe du présent numéro.

270. Étant donnée une grandeur géométrique complétement définie et pouvant être indifféremment une ligne, une surface, un solide, imaginons qu'on la subdivise en parties de plus en plus petites, et qu'on multiplie chacune de ces parties par un facteur dépendant des coordonnées de l'un de ses points.

Le problème à résoudre consiste, par hypothèse, à déterminer la limite dont la somme des produits ainsi obtenus se rapproche indéfiniment à mesure que les subdivisions faites dans la grandeur donnée convergent toutes ensemble vers zéro.

Pour plus de généralité, considérons le cas d'un solide et représentons par V son volume.

Soient m le point pris pour origine d'une partie quelconque ΔV; x, y, z les coordonnées de ce point; $F(x+\lambda\Delta x, y+\mu\Delta y, z+\nu\Delta z)$ le facteur à introduire comme coefficient de la partie ΔV.

Il est visible que la valeur absolue de chacun des trois coefficients λ, μ, ν reste nécessairement comprise entre o et 1.

Si l'on désigne par P la somme des produits à considérer, on peut écrire, en général,

$$(1)\ldots\quad \Delta P = \Delta V . F[x+\lambda\Delta x, y+\mu\Delta y, z+\nu\Delta z].$$

On voit, d'ailleurs, aisément, que si l'on fait converger à la fois vers zéro, chacune des trois quantités Δx, Δy, Δz, les différences ΔP, ΔV subissent cette même condition, tandis que leur rapport converge vers la limite $F(x, y, z)$.

Partons de là, et observons qu'en vertu du principe établi dans notre exposé général des règles de la différentiation *, la limite du rapport $\frac{\Delta P}{\Delta V}$ n'est autre chose que le rapport de la différentielle dP à la différentielle dV. L'équation (1) donne, en conséquence,

$$(2)\ldots\ldots\quad dP = dV . F(x, y, z).$$

De là résulte, conformément au théorème du n° 269,

$$(3)\ldots\ldots\quad \lim . P = V . M_0^V F(x, y, z).$$

L'équation (3) résout évidemment la question proposée.

S'agit-il de déterminer la valeur exprimée par la moyenne qui figure dans le second membre de l'équation (3)? Il faut, en général, remonter à l'équation (1) et procéder avec plus de détails que nous ne l'avons fait.

Supposons, pour fixer les idées, que le solide soit rapporté à des axes coordonnés rectangulaires OX, OY, OZ. Supposons, en

* Voir, au besoin, la deuxième partie, n° 9, pages 102 et suivantes.

outre, que les subdivisions ΔV résultent, en général, de trois séries de plans respectivement parallèles aux plans coordonnés YOZ, ZOX, XOY et distant entre eux, les premiers de la quantité Δx, les seconds de la quantité Δy, les derniers de la quantité Δz.

De là résulte, généralement,

$$(4). \quad \ldots \ldots \quad \Delta V = \Delta x . \Delta y . \Delta z,$$

et, par suite,

$$(5). \quad . \quad \Delta P = \Delta x . \Delta y . \Delta z . F[x + \lambda\Delta x, y + \mu\Delta y, z + \nu\Delta z].$$

Imaginons d'abord que l'écart Δz converge seul vers zéro, les deux autres demeurant constants. On a, comme ci-dessus,

$$(6). \quad . \quad . \quad d_z P = \Delta x . \Delta y . dz . [F(x + \lambda\Delta x, y + \mu\Delta y, z)].$$

Supposons maintenant que l'écart Δy converge vers zéro. Les quantités $d_z P$ et Δy s'annulant à la fois, on peut substituer à leur rapport celui de leurs différentielles et écrire, en conséquence,

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad d_y . d_z P = \Delta x . dy . dz . F(x + \lambda\Delta x, y, z).$$

Opérons en dernier lieu sur l'écart Δx supposé jusqu'ici constant, et faisons-le converger à son tour vers zéro. Les quantités $d_y d_z P$ et Δx s'annulant à la fois, on peut substituer à leur rapport celui de leurs différentielles. On a donc, comme résultat final,

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d_x d_y d_z P = dx . dy . dz . F(x, y, z).$$

Observons qu'on est libre d'intervertir à son gré l'ordre des opérations précédentes, et, par conséquent aussi, celui des indices. Mieux vaut alors supprimer ces indices et écrire simplement,

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d . d . dP = dx . dy . dz . F(x, y, z).$$

Quant aux opérations à effectuer pour passer de l'équation (9) à la détermination de la quantité lim. P, elles sont suffisamment indiquées par les détails qui précèdent et par l'équation générale, dont le sens nous est bien connu,

$$(10)\quad \lim \mathrm{P} = \Delta x.\mathrm{M}_x^{x+\Delta x}\left[\Delta y.\mathrm{M}_y^{y+\Delta y}\left(\Delta z.\mathrm{M}_z^{z+\Delta z}\mathrm{F}(x, y, z)\right)\right].$$

La quantité lim P étant ainsi déterminée, on connaît d'avance, ou, si on ne le connaît pas, on peut calculer de la même manière le volume V. On est, dès lors, en mesure de compléter la solution cherchée, en posant,

$$(11)\,\mathrm{M}_0^{\mathrm{V}}\mathrm{F}(x,y,z) = \frac{\lim \mathrm{P}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{M}_x^{x+\Delta x}\left[\Delta y\mathrm{M}_y^{y+\Delta y}\left(\Delta z\mathrm{M}_z^{z+\Delta z}\mathrm{F}(x,y,z)\right)\right]}{\mathrm{M}_x^{x+\Delta x}\left[\Delta y\mathrm{M}_y^{y+\Delta y}\Delta z\right]}.$$

Il n'échappera point au lecteur que les résultats établis ci-dessus s'étendent d'eux-mêmes à un système quelconque de coordonnées, et que pour les appliquer au cas d'une surface ou d'une ligne, il suffit de supprimer celles des variables qu'on se donne en fonction des autres. Les détails qui suivent éclairciront, au besoin, ce qui paraîtrait obscur dans ce simple énoncé de l'extension que comportent les déductions précédentes.

271. Appliquons la solution détaillée du numéro précédent, au cas où le facteur à introduire comme coefficient du solide partiel $\Delta \mathrm{V}$ est l'abscisse $x + \lambda\Delta x$ de l'un des points de ce solide. En désignant par lim P_x la limite vers laquelle la somme des produits $\Delta \mathrm{V}\,[x + \lambda\Delta x]$ converge à mesure que chacune des parties $\Delta \mathrm{V}$ converge vers zéro, on a, d'après l'équation (5), du numéro 270, page 647,

$$(1)\ldots\ldots\ldots \quad \lim \mathrm{P}_x = \mathrm{V}.\mathrm{M}_0^{\mathrm{V}}(x).$$

Substituons successivement à l'abscisse x chacune des ordonnées y et z. On a, de même, pour l'ordonnée y,

$$(2)\ldots\ldots\ldots \quad \lim.\mathrm{P}_y = \mathrm{V}.\mathrm{M}_0^{\mathrm{V}}y,$$

et, pour l'ordonnée z,

$$(3). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \lim P_z = V.M_0^V z.$$

Soit g le point de l'espace dont les coordonnées x_1, y_1, z_1 ont pour valeurs respectives

$$(4). \quad . \; . \; . \; x_1 = M_0^V(x), \qquad y_1 = M_0^V(y), \qquad z_1 = M_0^V(z),$$

et expriment, en conséquence, la distance moyenne du volume total V à chacun des plans coordonnés YOZ, ZOX, XOY.

Ainsi déterminé, le point g jouit d'une propriété curieuse, facile à établir et consistant en ce que sa distance à un plan quelconque n'est autre chose que la distance moyenne des différents points du solide V à ce même plan. On ne perdra pas de vue que la moyenne dont il s'agit correspond à une répartition faite uniformément dans toute l'étendue du volume que l'on considère.

Soit Q le plan quelconque sur lequel on projette orthogonalement les différents points du solide V. Menons par l'origine O un plan Q′ parallèle au plan Q et désignons par a, la distance des plans Q, Q′; par u, la perpendiculaire abaissée du point m sur le plan Q′. On a d'abord,

$$(5). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad M_0^V(a+u) = a + M_0^V u.$$

Quant à la longueur u, elle est la projection du rayon vecteur Om sur la normale au plan Q′ et, par conséquent aussi, la somme des projections des coordonnées x, y, z sur cette même normale. De là résulte,

$$(6). \quad . \; . \; . \; . \; . \; u = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

α, β, γ étant les angles que la normale au plan Q′ fait avec les axes coordonnés OX, OY, OZ..

La combinaison des équations (4), (5), (6) donne

$$(7). \quad \begin{cases} M_0^V(a+u) = a + \cos\alpha.M_0^V x + \cos\beta.M_0^V y + \cos\gamma.M_0^V z \\ \qquad = a + x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma. \end{cases}$$

L'observation faite en ce qui concerne la perpendiculaire u abaissée du point m sur le plan Q' s'applique de la même manière à la perpendiculaire u_1 abaissée du point g sur ce même plan. On a donc, en vertu de l'équation (6),

$$u_1 = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos 6 + z_1 \cos\gamma.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (7), il vient,

$$a + u_1 = \mathrm{M}_0^{\mathrm{V}}(a + u),$$

et la propriété qu'il s'agissait d'établir se trouve ainsi démontrée.

Si le lieu des points considérés était une surface A ou une ligne S, rien ne changerait dans la démonstration précédente si ce n'est que, partout où la lettre V figure, on mettrait à sa place la lettre A ou la lettre S. La propriété dont il s'agit est donc tout à fait générale. Elle s'applique à la fois aux lignes, aux surfaces et aux solides. On pourrait dire du point g qu'il est le *centre des distances moyennes* à un plan quelconque. Envisagé sous un autre rapport, il a reçu le nom de *centre de gravité*. Nous lui conserverons cette dernière dénomination et, résumant ce qui précède, nous dirons :

A tout assemblage de points uniformément répartis sur une ligne, sur une surface ou dans un solide, correspond un centre des distances moyennes, autrement dit, un centre de gravité.

Ce centre est déterminé par la condition suivante : sa distance à un plan quelconque est la distance moyenne comprise entre ce plan et les différents points de l'assemblage.

Supposons qu'il s'agisse d'une ligne ou d'une aire plane: au lieu de prendre leur distance moyenne par rapport à des plans quelconques, on peut ne la prendre que par rapport à des droites situées dans leur propre plan. Rien n'est changé, d'ailleurs, puisque pour rester dans les conditions générales, il suffit de consi-

dérer chacune de ces droites comme la trace d'un plan normal au plan de la ligne ou de l'aire donnée.

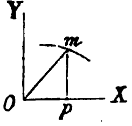
Partons de là, et reportons-nous aux formules des nos 256 et 268, pages 621 et 643. Il est visible que la moyenne représentée dans ces formules par le symbole My n'est autre chose que la perpendiculaire abaissée de leur centre de gravité sur l'axe de révolution. On peut, en conséquence, énoncer les théorèmes suivants dus à Guldin :

L'aire engendrée par une ligne qui tourne autour d'un axe situé dans son plan a pour mesure le produit de cette ligne par l'arc que décrit son centre de gravité.

Le volume engendré par une aire qui tourne autour d'un axe situé dans son plan a pour mesure le produit de cette aire par l'arc que décrit son centre de gravité.

272. La quadrature des aires peut, ainsi que la cubature des solides, s'obtenir aisément par le procédé général du n° 270. Bornons-nous à quelques exemples.

Fig. 102.



S'agit-il d'une aire plane A? Supposons d'abord que la division se fasse par des droites mp perpendiculaires à l'axe OX et distantes entre elles de la quantité Δx. Cet intervalle pouvant être pris aussi petit qu'on veut et n'ayant plus d'ailleurs qu'à décroître, on a évidemment

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta A = \Delta x \left[y + \mu \Delta y \right],$$

y n'étant autre chose que l'ordonnée quelconque mp.

De là résulte, comme au n° 270, pages 646 et suivantes,

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dA = ydx,$$

et par suite, l'accroissement Δx devenant quelconque,

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta A = \Delta x . M_y^{y+\Delta y} y.$$

Si la division s'effectuait par des droites Om partant du point O pris pour pôle, en désignant par r le rayon vecteur Om et par $\Delta\theta$ l'angle compris entre ce rayon et le suivant, on aurait, comme tout à l'heure,

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \Delta A = \frac{\Delta\theta}{2}(r + \mu\Delta r)^2.$$

Il viendrait donc

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad dA = \frac{r^2 d\theta}{2},$$

et par suite, l'accroissement $\Delta\theta$ devenant quelconque,

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \Delta A = \frac{\Delta\theta}{2} M_\theta^{\theta+\Delta\theta} r^2.$$

S'agit-il du volume intercepté dans un cylindre droit entre sa base A et une surface S? En désignant par z la distance d'un point quelconque m de la surface S à la base A, et prenant la projection du point m pour origine de l'accroissement ΔA, supposé très-petit et n'ayant plus d'ailleurs qu'à décroître, il vient

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \Delta V = \Delta A\,[z + \nu\Delta z],$$

ΔV étant la partie du volume V qui se projette sur l'aire ΔA.

On déduit de l'équation (7)

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad dV = z dA,$$

et par suite, l'accroissement ΔA devenant quelconque,

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \Delta V = \Delta A . M_A^{A+\Delta A}(z).$$

Veut-on opérer sur l'équation (7) en y remplaçant l'aire ΔA par le produit $\Delta x . \Delta y$? On a

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \Delta V = \Delta x . \Delta y\,[z + \nu\Delta z],$$

et, prenant

$$z = f(x, y),$$

pour équation de la surface S,

$$(11).\quad \Delta V = \Delta x . \Delta y \left[z + \nu \left(f(x + \lambda\Delta x,\ y + \mu\Delta y) - f(x, y) \right) \right].$$

Passons à la limite en ce qui concerne l'accroissement Δy. Il vient

$$(12).\quad d_y V = \Delta x . dy \left[z + \nu \left(f(x + \lambda\Delta x, y) - f(x, y) \right) \right].$$

De là résulte, en passant à la limite pour l'accroissement Δx,

$$(13)\ \ldots\ldots\quad d_x d_y V = z.dx.dy,$$

et par suite, ainsi qu'on le voit aisément, les accroissements Δx et Δy devenant quelconques,

$$(14).\ \ldots\quad \Delta V = \Delta x . M_x^{x+\Delta x} (\Delta y . M_y^{y+\Delta y} z).$$

273. Reprenons, comme exemple général, la question des cubatures et traitons-la de manière à faire ressortir les moyens de solution fournis par le théorème du n° 269, page 646.

Soit V le volume du solide à mesurer. Divisons ce solide comme au n° 270, page 647, et considérons d'abord la suite des tranches formées par les plans parallèles dont l'écart est Δx. Cet écart *étant pris aussi petit qu'on veut et n'ayant plus qu'à décroître*, il est visible qu'en désignant par A l'aire de la section faite dans le solide par un des plans de division, et par ΔV le volume de la tranche qui a cette même section pour base, on peut écrire généralement,

$$(1).\ \ldots\ldots\quad \Delta V = \Delta x \left[A + \lambda\Delta A \right],$$

λ étant une quantité comprise entre 0 et 1.

De là résulte, en passant à la limite, comme on l'a vu précédemment,

$$(2)\ \ldots\ldots\quad d_x V = A.dx.$$

Dans cette équation dx n'est, si l'on veut, autre chose que l'accroissement Δx supposé très-petit et n'ayant plus qu'à décroître *. Quant à la quantité A, elle doit être considérée comme constante aussi longtemps qu'il s'agit de la tranche qui prend son origine à partir d'un seul et même plan de division. Il suit de là que la différentielle $d_x V$ se confond avec le cylindre droit ayant la section A pour base et l'écart dx pour hauteur.

Soit H ce cylindre. Les plans parallèles dont l'écart est Δy divisent en même temps la base A en bandes ΔA et le cylindre H en prismes ayant tous pour hauteur commune l'écart dx et chacun pour base respective la bande ΔA qui lui correspond. Soit $\Delta(d_x V)$ le volume de l'un de ces prismes. L'écart Δy *étant pris aussi petit qu'on veut et n'ayant plus qu'à décroître*, il est visible qu'en désignant par z la hauteur que la bande A présente à son origine, on peut écrire généralement

(3). . . . . $\Delta A = \Delta y\,[z + \nu \Delta z]$,

ν étant une quantité comprise entre 0 et 1. On a de même

(4). . . . . $\Delta(d_x V) = dx \,.\, \Delta y\,[z + \nu \Delta z]$.

De là résulte, en passant à la limite pour l'accroissement Δy,

(5) . . . . $d_y d_x V = z.dx.dy$.

Dans cette équation où la différentielle dx n'a pas changé, l'écart dy n'est si l'on veut, autre chose que l'accroissement Δy supposé très-petit et n'ayant plus qu'à décroître. Quant à l'ordonnée z, elle doit être considérée comme constante aussi longtemps qu'il s'agit du prisme qui prend son origine à partir du plan de division considéré. Il suit de là que la différentielle $d_x d_y V$ se confond avec le prisme droit ayant pour hauteur l'ordonnée z et pour base le rectangle $dx.dy$.

* Pour ne pas changer la base A, il suffit de faire décroître dx, en lui substituant sa moitié et ainsi de suite indéfiniment. Cette observation s'applique, de la même manière, au décroissement de l'écart Δy. On peut, ainsi, la généraliser

Cela posé, prenons la somme des prismes droits qui correspondent à une seule et même position de la section A, à une seule et même valeur de l'écart dx, à la suite des écarts dy. Si l'on désigne par z_0, z_1, z_2, etc., les différentes valeurs affectées par l'ordonnée z aux points de division uniformément répartis sur l'étendue totale d'un accroissement *quelconque* Δy, on a pour cette somme

$$(6).\quad dx.dy.[z_0+z_1+\text{etc.}+z_{n-1}]=dx.\Delta y.\frac{z_0+z_1+\text{etc.}+z_{n-1}}{n}.$$

Il est visible, en effet, que le nombre des divisions étant marqué par n, l'accroissement total Δy a pour valeur le produit $n.dy$.

Attribuons à l'accroissement quelconque Δy la détermination qu'il acquiert comme projection de l'aire A sur le plan des xy. En vertu du théorème du n° 269, page 646, la somme exprimée par l'équation (6) a pour limite le volume de la tranche $d_x V$. De là résulte, en passant à la limite,

$$(7)\quad \ldots\ldots\quad d_x V = A.dx = dx.\Delta y.M_y^{y+\Delta y}(z).$$

Faisons la somme des tranches en supposant qu'elles aient toutes même épaisseur dx et qu'elles soient au nombre de n pour un intervalle *quelconque* déterminé Δx. En désignant par A_0, A_1, A_2, etc., les valeurs affectées par la section A et correspondantes aux divisions successives de l'intervalle Δx, on a pour cette somme

$$(8).\quad dx\,[A_0+A_1+\text{etc.}+A_{n-1}]=\Delta x.\frac{A_0+A_1+\text{etc.}+A_{n-1}}{n}.$$

En vertu du théorème du n° 269, cette somme a pour limite le volume total exprimé par ΔV pour un écart quelconque Δx. De là résulte, en passant à la limite,

$$(9).\quad \ldots\ldots\ldots\quad \Delta V = \Delta x.M_x^{x+\Delta x}A,$$

et, eu égard à l'équation (7),

$$(10). \quad . \quad . \quad . \quad \Delta V = \Delta x . M_x^{x+\Delta x} [\Delta y . M_y^{y+\Delta y} (z)].$$

L'équation (10) résout évidemment la question proposée.

Au lieu de s'en tenir à l'équation (5), on peut pousser la division plus loin et substituer au prisme droit que l'on considère la suite des parallélipipèdes rectangles qui résultent des sections de ce prisme par les plans parallèles dont l'écart est Δz. Soit $\Delta(d_y d_x V)$ le volume de l'un de ces parallélipipèdes, il vient d'abord

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta [d_y . d_x V] = dx . dy . \Delta z,$$

et, par suite,

$$(12). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d_z d_y d_x V = dx . dy . dz,$$

l'équation (12) ne cessant pas ici d'être identique à celle dont on la déduit d'après le procédé fourni par la considération des limites.

Si l'on partait de l'équation (12), on remonterait à l'équation (5) en faisant la somme de tous les parallélipipèdes qui correspondent à un seul et même prisme droit. Le reste s'achèverait comme ci-dessus.

274. On parvient plus rapidement à l'équation (12) du n° 273, en partant, comme au n° 270, de l'équation générale

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta V = \Delta x . \Delta y . \Delta z,$$

et substituant successivement à chaque différence sa différentielle. Ce procédé donne d'abord

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d_x V = dx . \Delta y . \Delta z,$$

puis

$$(3). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d_y d_x V = dx . dy . \Delta z,$$

et, enfin,

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d_z d_y d_x V = dx . dy . dz.$$

Cela posé, on peut considérer le volume V comme la somme d'une suite de parallélipipèdes rectangles tous égaux entre eux et représentés chacun par le produit $dx.\,dy.\,dz$, ou plus exactement comme la limite de cette somme.

Prenons, pour deux valeurs quelconques déterminées des variables x et y, les parallélipipèdes qui se projettent sur la même base $dx.\,dy$. Leur somme est égale au produit de cette base par la hauteur totale z. Exprimée par le produit

$$(5). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad z.dx.dy,$$

elle représente un des prismes compris dans la tranche qui correspond à l'abscisse x et dont l'épaisseur est dx. Faisons la somme de ces prismes. Elle donne la tranche et a, pour expression, le produit de l'accroissement de la variable par la valeur moyenne de la fonction dérivée, c'est-à-dire

$$(6). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad dx.\Delta y.\mathrm{M}_y^{y+\Delta y}(z).$$

Ajoutons toutes les tranches. Leur somme, considérée dans sa limite ΔV, est le produit de l'accroissement total Δx par la valeur moyenne de la fonction dérivée $\Delta y.\mathrm{M}_y^{y+\Delta y}(z)$. Il vient donc, en dernier lieu,

$$(7). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta \mathrm{V} = \Delta x.\mathrm{M}_x^{x+\Delta x}[\Delta y.\mathrm{M}_y^{y+\Delta y}(z)].$$

Le procédé que nous venons de suivre est, comme celui du n° 273, tout à fait général. Si, après avoir subdivisé le volume V en parallélipipèdes rectangles, on avait à multiplier chacune des subdivisions par un facteur de la forme

$$\mathrm{F}(x + \lambda\Delta x,\; y + \mu\Delta y,\; z + \nu\Delta z),$$

les coordonnées x, y, z étant celles du point pris pour origine de la subdivision considérée, il est visible qu'en désignant par P la limite de la somme des produits obtenus, on aurait, comme tout à l'heure,

$$(8). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d_x d_y d_z \mathrm{P} = dx\,.\,dy\,.\,dz\,.\,\mathrm{F}(x, y, z).$$

Il est clair, en effet, que du moment où l'on passe à la limite, chacun des binômes $x + \lambda\Delta x$, $y + \mu\Delta y$, $z + \nu\Delta z$ se réduit à son premier terme.

L'équation (8) traitée comme l'équation (4) conduit au résultat final

$$(9). \quad \Delta P = \Delta x.M_x^{x+\Delta x}\left[\Delta y.M_y^{y+\Delta y}\left(\Delta z.M_z^{z+\Delta z}F(x, y, z)\right)\right].$$

Appliquée au cas d'une surface quelconque A, elle donne, comme au n° 254, page 618,

$$(10). \quad \Delta A = \Delta x.M_x^{x+\Delta x}\left(\Delta y.M_y^{y+\Delta y}\sqrt{1 + p^2 + q^2}\right).$$

275. Le principe qui permet de substituer les différentielles aux différences qui leur correspondent, et de prendre pour somme de celles-ci la limite de la somme des autres, est susceptible d'applications nombreuses. En procédant, d'après ce principe, comme on l'a fait aux numéros 273 et 274, on peut établir sans difficulté les différents théorèmes que nous avons démontrés successivement en ce qui concerne les quadratures et les cubatures proprement dites. De là de nouvelles ressources qu'il convenait de mettre en lumière pour les cas où l'on doit nécessairement y recourir, et qu'il nous suffit, d'ailleurs, d'indiquer pour ceux où elles ne sont pas indispensables, les développements déjà donnés offrant par eux-mêmes tout ce qu'il faut pour en bien comprendre l'emploi.

Nous terminons ici la série des applications directes du calcul différentiel. Dans les parties suivantes, nous traiterons du calcul intégral, du calcul des différences, et du calcul des variations.

FIN DE LA TROISIÈME PARTIE.

APPENDICE

AU NUMÉRO 229 DU CHAPITRE XII.

DIVISION D'UNE SURFACE EN QUADRILATÈRES RECTANGLES SATISFAISANT A CERTAINES CONDITIONS PARTICULIÈRES.

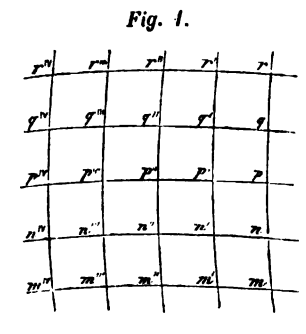
Considérons deux systèmes de trajectoires orthogonales appartenant à une même surface A, et supposons d'abord que, satisfaisant à l'équation générale

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{ds} = \frac{\delta\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{\delta\lambda} = \frac{\cos\theta}{\rho}\cdot\frac{\cos\theta'}{\rho'}, \text{*}$$

elles remplissent, en conséquence, la condition suivante :

I. — *Deux lignes quelconques étant prises à volonté dans l'un ou l'autre des deux systèmes, les segments interceptés sur ces lignes par leurs trajectoires orthogonales conservent entre eux un rapport constant.*

Fig. 1.



Soient [$mm'm''$..., $nn'n''$..., $pp'p''$..., etc.], [mnp...., $m'n'p'$...., $m''n''p''$...., etc.], deux suites de lignes prises respectivement, les premières dans l'un des systèmes considérés, les secondes dans l'autre.

Les trois lignes $mm'm''$..., $nn'n''$..., mnp...., pouvant être choisies comme on veut, déterminons les autres en posant

$$(2). \quad \begin{cases} mm' = mn, & m'm'' = m'n', & m''m''' = m''n'', \text{ etc.} \\ np = nn', & pq = pp', & qr = qq', \text{ etc.} \end{cases}$$

* Les quantités $\frac{\cos\theta}{\rho}$, $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$ sont les modules des courbures géodésiques

D'après la condition générale formulée ci-dessus, on a

$$(3). \quad . \quad . \quad n'n'' = nn'.\frac{m'm''}{mm'}, \qquad n'p' = np.\frac{m'n'}{mn}.$$

De là résulte, en vertu des équations (2),

$$(4). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n'n'' = n'p'.$$

L'équation (4) jointe aux équations (2) donnerait de même

$$n''n''' = n''p'', \quad p'q' = p'p'',$$

et, ainsi de suite indéfiniment.

On voit par là comment la condition I implique cette autre condition :

II. — *Étant données trois lignes choisies comme on veut, deux dans l'un des systèmes considérés, la troisième dans l'autre, elles déterminent une double suite dont les lignes divisent la surface A en quadrilatères rectangles ayant tous deux côtés de même longueur, adjacents l'un à l'autre et placés de la même manière* *.

On peut, avons-nous dit, choisir comme on veut les trois

qu'affectent en un même point quelconque m les deux trajectoires orthogonales passant par ce point. Les caractéristiques d, δ correspondent à des déplacements effectués à partir du point m, l'un suivant l'arc s de la ligne dont la courbure géodésique a pour module $\frac{\cos\theta}{\rho}$, l'autre suivant l'arc λ de la ligne dont la courbure géodésique a pour module $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$.

J'ai montré, au n° 229, page 560, comment l'équation (1) peut s'établir en quelques lignes, par voie géométrique.

* On peut, à volonté, donner à ces côtés même longueur ou maintenir entre eux un rapport constant a. Ils sont de longueur égale, lorsqu'on pose, comme ci-dessus,

$$1 = \frac{mn}{mm'} = \frac{m'n'}{m'm''} = \frac{m''n''}{m''m'''} = \text{etc.} = \frac{np}{nn'} = \frac{pq}{pp'} = \frac{qr}{qq'} = \text{etc.}$$

lignes $mm'm''$...., $nn'n''$...., mnp...., et déterminer les autres d'après les équations (2). Sans rien changer à cet égard, considérons un groupe quelconque comprenant quatre quadrilatères accolés autour d'un même point central, et, *au lieu de la condition* I, donnons-nous la condition plus restreinte énoncée comme il suit :

III. — *Quel que soit le groupe considéré, si trois des quadrilatères qu'il comprend ont deux côtés de même longueur, adjacents l'un à l'autre et placés de la même manière, cette même condition est remplie par le quatrième.*

Appliquons cet énoncé en prenant d'abord pour exemple le groupe dont n' est le point central. On a, d'après les équations (2),

(5). . . $mm' = mn,\quad m'm'' = m'n',\quad np = nn'.$

De là résulte, comme conséquence immédiate de la condition III,

(6). . . . . $n'n'' = n'p'.$

S'agit-il maintenant du groupe ayant son point central en n''?

Ils seraient inégaux et conserveraient entre eux le rapport constant a, si l'on posait

$$a = \frac{mn}{mm'} = \frac{m'n'}{m'm''} = \text{etc.} = \frac{np}{nn'} = \frac{pq}{pp'} = \text{etc.}$$

Cette extension subsiste alors même qu'au lieu des équations (3) du texte, on aurait, pour chaque groupe de quadrilatères accolés autour d'un même point central, des équations de la forme

$$n'n'' = k.nn'.\frac{m'm''}{mm'},\quad n'p' = k.np.\frac{m'n'}{mn},$$

la quantité k étant la même dans ces deux équations et pouvant varier d'un groupe à un autre.

L'équation (6) jointe aux équations (2) donne

$$m'm'' = m'n', \quad m''m''' = m''n'', \quad n'p' = n'n''.$$

Il vient donc, comme tout à l'heure,

$$n''n''' = n''p'',$$

et ainsi de suite, de proche en proche. Il suit évidemment de là que la condition II est également impliquée par l'une ou l'autre des conditions I et III.

Partons de la condition III.

Si nous désignons par s les lignes de la première suite, par λ celles de la seconde, et que nous fassions usage de la caractéristique D ou de la caractéristique Δ, selon que les différences à considérer dépendent d'un déplacement effectué suivant les lignes s ou suivant les lignes λ, nous pouvons écrire

$$(7). \quad \begin{cases} mm' = \mathrm{D}s, & m'm'' = \mathrm{D}s + \mathrm{D}.\mathrm{D}s, & np = \Delta\lambda + \Delta.\Delta\lambda, \\ mn = \Delta\lambda, & m'n' = \Delta\lambda + \mathrm{D}.\Delta\lambda, & nn' = \mathrm{D}s + \Delta.\mathrm{D}s, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(8). \quad \begin{cases} n'n'' = nn' + \mathrm{D}nn' = \mathrm{D}s + \Delta.\mathrm{D}s + \mathrm{D}.\mathrm{D}s + \mathrm{D}.\Delta.\mathrm{D}s, \\ n'p' = m'n' + \Delta m'n' = \Delta\lambda + \mathrm{D}.\Delta\lambda + \Delta.\Delta\lambda + \Delta.\mathrm{D}.\Delta\lambda. \end{cases}$$

Les équations (2) comprennent les équations (5) et, par conséquent aussi, celles qui s'en déduisent, eu égard aux équations (7), savoir :

$$(9). \quad . \quad . \quad \mathrm{D}s = \Delta\lambda, \quad \mathrm{D}.\mathrm{D}s = \mathrm{D}.\Delta\lambda, \quad \Delta.\Delta\lambda = \Delta.\mathrm{D}s.$$

Cela posé, pour que la condition III subsiste, en général, il faut et il suffit que, dans l'hypothèse des équations (9), on ait, en même temps,

$$n'n'' = n'p',$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux équations (8),

(10). . . . . . $D.\Delta.Ds = \Delta.D.\Delta\lambda.$

Supposons qu'il en soit ainsi. La condition II subsiste indépendamment de tout degré de grandeur assigné au quadrilatère *mm'n'n*. Imaginons qu'après avoir decru continûment jusqu'à s'annuler, ce quadrilatère accomplisse l'évolution inverse, et plaçons-nous à l'instant précis où il s'engendre à partir de zéro. La dépendance établie entre ce quadrilatère et les autres se manifeste à ce même instant qui fixe leur origine commune. S'agit-il, en effet, pour l'un quelconque d'entre eux, de ceux de ses côtés qui sont assujettis à prendre même longueur? Il est visible que leur génération simultanée commence, de part et d'autre, avec une égale vitesse.

Arrêtons-nous à ce dernier résultat. Il peut subsister alors même que les équations (9) n'impliqueraient pas l'équation (10). Tel est évidemment le cas plus général où, toutes choses égales d'ailleurs, l'équation (10) est remplacée par l'équation aux limites

(11). . . . . $\lim.\frac{D.\Delta.Ds}{\Delta.D.\Delta\lambda} = 1,$

ou, ce qui revient au même, par l'équation différentielle

(12). . . . . $d.\delta.ds = \delta.d.\delta\lambda.$

Restons à ce nouveau point de vue qui comprend tous les cas précédents, sans en impliquer aucun, et qui comporte ainsi une extension plus grande. Au lieu des équations (9), nous avons à poser les équations correspondantes

(13). . . $ds = \delta\lambda, \quad d.ds = d.\delta\lambda, \quad \delta.\delta\lambda = \delta.ds,$

et tout se réduit à ce que l'équation (12) résulte, en général, des équations (13).

Nous verrons tout à l'heure à quoi revient la condition qui doit être ainsi satisfaite. Commençons par en fixer le sens par rapport au tracé des lignes qu'elle détermine.

Concevons d'abord que les lignes $mm'm''$...., mnp. .., glissent sur la surface A, de manière à prendre successivement les positions conjuguées [$nn'n''$...., $m'n'p'$....], [$pp'p''$...., $m''n''p''$....] etc. Il est visible que leur point d'intersection occupera successivement les lieux m, n', p'', etc., et qu'il sortira de chacun de ces lieux suivant la bissectrice de l'angle des deux trajectoires orthogonales qui s'y coupent. Concluons que, *dans l'hypothèse où nous raisonnons*, les points m,n',p''.... sont tous situés sur une même trajectoire à 45° des lignes orthogonales que l'on considère.

Prenons maintenant dans chacun des quadrilatères $mm'n'n$, $m'm''n''n'$, $nn'p'p$, etc., celui de ses sommets pour lequel les côtés adjacents s'engendrent à partir de zéro avec une égale vitesse. S'il s'agit, par exemple, du quadrilatère $nn'p'p$, ce sera le sommet n. Concevons que deux points mobiles, placés d'abord en n, sortent en même temps de ce lieu avec une égale vitesse représentée, pour l'un par nn', pour l'autre par np. La direction suivant laquelle ces points se détachent l'un de l'autre, au sortir du lieu n, est évidemment inclinée à 45° sur chacune des vitesses nn' et np. La même observation subsiste en général. Elle s'applique, en conséquence, de la même manière, à deux points mobiles qui seraient placés, d'abord, en m' et qui sortiraient, en même temps, de ce lieu avec une égale vitesse représentée, pour l'un par $m'm''$, pour l'autre par $m'n'$. Supposons qu'il y ait, de part et d'autre, simultanéité. Les quatre points mobiles arrivent, en même temps, l'un en p, deux en n', le dernier en m''. Il suit de là, *comme tout à l'heure*, que les points m'', n', p sont situés sur une seule et même trajectoire à 45° des lignes orthogonales considérées. On voit, d'ailleurs, aisément qu'il en est de même des points m''', n'', p', q et, ainsi de suite, de proche en proche *.

Le résultat auquel nous venons de parvenir implique, comme conséquence, la déduction suivante :

* Veut-on procéder autrement? On peut prendre à part un groupe quelconque de quadrilatères accolés à un même point central, soit, par exemple, le groupe dont le point central est en n', fixer ce point, le réunir par des droites aux sommets m'' et p, puis passer à la limite. La conclusion sera la même.

IV. — Les trajectoires orthogonales qui, dans l'hypothèse des équations (13), satisfont à l'équation (12), remplissent, en même temps, cette autre condition :

Étant données trois lignes choisies, comme on veut, deux dans l'un des systèmes, la troisième dans l'autre, elles déterminent une double suite de lignes qui découpent la surface A en quadrilatères rectangles admettant tous pour diagonales les trajectoires à 45° de ces mêmes lignes.

On a, d'ailleurs et évidemment, ce corollaire :

La propriété établie pour les lignes données s'étend d'elle-même au double système orthogonal que forment entre elles leurs trajectoires à 45°.

Revenons aux équations (12) et (13), les équations (13) se posant *à priori* et devant, par hypothèse, impliquer l'équation (12). Si l'on représente par $\frac{\cos\theta}{\rho}$, $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$ les courbures géodésiques qu'affectent en un point quelconque m les deux lignes orthogonales s et λ passant par ce point, on a, en général, d'après l'équation (2) du n° 227, page 554,

$$(14)\ldots\quad \delta.ds = \pm ds.\delta\lambda\frac{\cos\theta}{\rho},\qquad d.\delta\lambda = \pm ds.\delta\lambda\frac{\cos\theta'}{\rho'}.$$

De là résulte, en premier lieu,

$$d.\delta.ds = \pm[ds.d.\delta\lambda + \delta\lambda.d.ds]\frac{\cos\theta}{\rho} \pm ds.\delta\lambda.d\frac{\cos\theta}{\rho},$$

et, par suite, eu égard aux équations (13) et (14),

$$(15)\ d.\delta.ds = \pm 2ds.d.\delta\lambda\frac{\cos\theta}{\rho} \pm ds^2.d\frac{\cos\theta}{\rho} = 2ds^2\frac{\cos\theta}{\rho}.\frac{\cos\theta'}{\rho'} \pm ds^2.d\frac{\cos\theta}{\rho}.$$

On trouverait de même

$$(16)\ldots\quad \delta.d.\delta\lambda = 2ds^2.\frac{\cos\theta}{\rho}.\frac{\cos\theta'}{\rho'} \pm ds^2.\delta\frac{\cos\theta'}{\rho'}.$$

Il s'ensuit que, pour satisfaire à l'équation (12), on doit avoir

$$(17). \quad \ldots \ldots \quad d\,\frac{\cos\theta}{\rho} = \pm\,\delta\,\frac{\cos\theta'}{\rho'},$$

et réciproquement.

On ne perdra pas de vue que l'équation (17) est subordonnée à la condition $ds = \delta\lambda$. Veut-on tout exprimer en une seule et même équation? il suffit de substituer aux vitesses $d\frac{\cos\theta}{\rho}$, $\delta\frac{\cos\theta'}{\rho'}$ leurs modules respectifs. Cela revient à écrire

$$(18). \quad \ldots \ldots \quad \frac{d\,\frac{\cos\theta}{\rho}}{ds} = \frac{\delta\,\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{\delta\lambda}.$$

L'équation (18) remplace à la fois les équations (12) et (13). Elle implique, en conséquence, l'énoncé suivant :

V. — *Pour qu'un double système de lignes orthogonales remplisse la condition* IV, *il faut et il suffit que les vitesses, avec lesquelles les courbures géodésiques varient à partir d'un point quelconque sur les lignes qui s'y croisent, aient, de part et d'autre, même module absolu.*

On voit par là que l'équation (18) ne peut subsister pour un double système de lignes orthogonales, sans subsister, en même temps, pour le double système orthogonal des trajectoires à 45° de ces mêmes lignes. Cette déduction peut s'établir *à priori* de la manière suivante :

Soient O un point quelconque de la surface A ; OX, OY les lignes s et λ issues de ce point, OX_1, OY_1 les trajectoires à 45° correspondantes.

Fig 2.

Assimilons la ligne OX_1 à la ligne OX la ligne OY_1 à la ligne OY, et conservons, de part et d'autre, les mêmes notations, en nous bornant à les accentuer lorsqu'il s'agit de la ligne OX_1 au lieu de la ligne OX, ou de la ligne OY_1 au lieu de la ligne OY.

S'agit-il, d'abord, de la ligne OX_1? Supposons-la décrite, à partir du point O, par un point μ assujetti à glisser sur la ligne s en même temps que cette ligne sort du lieu OX, le point de la ligne s qui se trouve actuellement en O étant désigné par m et glissant sur la ligne OY.

Les vitesses ds et $\delta\lambda$ avec lesquelles les points μ et m sortent en même temps, l'un du lieu m sur la ligne s, l'autre du lieu O sur la ligne OY, sont nécessairement égales. De là résulte, pour la vitesse d_1s_1 avec laquelle le point μ sort du lieu O sur la ligne OX_1,

$$(19) \quad \ldots\ldots \quad d_1s_1 = \sqrt{2}.\,ds = \sqrt{2}.\,\delta\lambda,$$

et, pour la vitesse angulaire avec laquelle la directrice du point μ sur la ligne OX_1 tourne autour de ce point au sortir du lieu O,

$$(20) \quad \ldots\ldots \quad d_1s_1.\frac{\cos\theta_1}{\rho_1} = \sqrt{2}.\,ds.\frac{\cos\theta_1}{\rho_1}.$$

Eu égard au double mouvement qui anime à la fois la directrice du point μ sur la ligne s et celle du point m sur la ligne OY (celle-ci tournant, par hypothèse, en sens inverse de l'autre) la vitesse angulaire $d_1s_1.\frac{\cos\theta_1}{\rho'}$ a pour expression équivalente

$$ds.\frac{\cos\theta}{\rho} - \delta\lambda.\frac{\cos\theta'}{\rho'}.$$

Il vient, en conséquence,

$$d_1s_1\frac{\cos\theta_1}{\rho_1} = ds\frac{\cos\theta}{\rho} - \delta\lambda\frac{\cos\theta'}{\rho'}$$

et, par suite des équations (19) et (20),

$$(21) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\cos\theta_1}{\rho_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\cos\theta}{\rho} - \frac{\cos\theta'}{\rho'}\right].$$

L'équation (21) subsiste, en général, pour toutes les positions

successives du point μ sur la ligne OX_1, les modules $\frac{\cos\theta_1}{\rho_1}$, $\frac{\cos\theta}{\rho}$, $\frac{\cos\theta'}{\rho'}$ dépendant du lieu que ce point occupe à l'instant que l'on considère et variant ainsi d'une manière incessante. On peut, par conséquent, la différencier. Soit, comme ci-dessus, d_1 la caractéristique correspondante. Elle exprime, par rapport à chacun des termes du second membre de l'équation (21) une différentielle totale, ou, ce qui revient au même, la somme des différentielles qui correspondent respectivement, l'une à la caractéristique d, l'autre à la caractéristique δ. De là résulte,

$$\frac{d_1 \frac{\cos\theta_1}{\rho_1}}{d_1 s_1} \cdot d_1 s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{d\left(\frac{\cos\theta}{\rho} - \frac{\cos\theta'}{\rho'}\right)}{ds} ds + \frac{\delta\left(\frac{\cos\theta}{\rho} - \frac{\cos\theta'}{\rho_1}\right)}{\delta\lambda} \delta\lambda \right],$$

et, eu égard à l'équation (19),

$$(22).\quad \frac{d_1 \frac{\cos\theta_1}{\rho_1}}{d_1 s_1} = \frac{1}{2} \left[\frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{ds} - \frac{\delta\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{\delta\lambda} + \frac{\delta\frac{\cos\theta}{\rho}}{\delta\lambda} - \frac{d\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{ds} \right].$$

S'agit-il maintenant de la ligne OY_1? Le même procédé donne, en premier lieu,

$$\frac{\cos\theta_1'}{\rho_1'} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\cos\theta}{\rho} + \frac{\cos\theta'}{\rho'} \right]$$

et, en second lieu,

$$(23).\quad \frac{\delta_1 \frac{\cos\theta_1'}{\rho_1'}}{\delta_1 \lambda_1} = -\frac{1}{2} \left[\frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{ds} + \frac{\delta\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{\delta\lambda} + \frac{\delta\frac{\cos\theta}{\rho}}{\delta\lambda} + \frac{d\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{ds} \right].$$

Observons ici qu'avant de combiner entre elles les équations (22) et (23), il faut avoir égard, pour la dernière, à l'inversion du sens de la ligne OX et y changer, en conséquence, le signe

des différentielles qui ont la lettre d pour caractéristique. On trouve ainsi

$$(24)\ldots\quad \frac{\delta_1 \frac{\cos\theta'_1}{\rho'_1}}{\delta_1\lambda_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{ds} - \frac{\delta\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{\delta\lambda} - \frac{\delta\frac{\cos\theta}{\rho}}{\delta\lambda} + \frac{d\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{ds}\right].$$

Ajoutant, membre à membre, les équations (22) et (24), il vient

$$(25).\ldots\quad \frac{d_1\frac{\cos\theta_1}{\rho_1}}{d_1 s_1} + \frac{\delta_1\frac{\cos\theta'_1}{\rho'_1}}{\delta_1\lambda_1} = \frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{ds} - \frac{\delta\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{\delta\lambda}.$$

L'équation (25) met en évidence la proposition qu'il s'agissait d'établir *à priori* ou de vérifier *à posteriori*. Il est clair, en effet, qu'on ne peut avoir

$$\frac{d\frac{\cos\theta}{\rho}}{ds} - \frac{\delta\frac{\cos\theta'}{\rho'}}{\delta\lambda} = 0,$$

sans qu'il n'en résulte

$$\frac{d_1\frac{\cos\theta_1}{\rho_1}}{d_1 s_1} + \frac{\delta_1\frac{\cos\theta'_1}{\rho'_1}}{\delta_1\lambda_1} = 0,$$

et réciproquement.

Terminons par quelques applications particulières.

Si nous considérons d'abord les surfaces de révolution, il est visible que les méridiens et les parallèles constituent un double système de trajectoires orthogonales, dont chacune, suivant qu'elle est un méridien ou un parallèle, satisfait en tous ses points à la première ou à la seconde des équations

$$\frac{\cos\theta}{\rho} = 0, \quad \frac{\cos\theta'}{\rho'} = \text{cons}^{\text{te}}.$$

Il s'ensuit que ces lignes satisfont à l'équation (1) et remplissent, en conséquence, les conditions I, II, III, IV.

Ce résultat est en quelque sorte évident et l'on peut l'établir *à priori* sans aucun calcul. Il en est de même dans le cas où les lignes considérées étant planes, les unes sont des circonférences concentriques, les autres des droites issues du centre commun aux premières. On reconnaît immédiatement que ces circonférences et ces droites constituent un double système de trajectoires orthogonales satisfaisant à toutes les conditions formulées ci-dessus.

Restons au point de vue des trajectoires planes.

Deux paraboles homofocales, dont les axes principaux font entre eux l'angle 2α, se coupent sous l'angle α. Il s'ensuit que les paraboles homofocales, dont l'axe principal est dirigé suivant une même droite et dans le même sens, ont pour trajectoires orthogonales d'autres paraboles ne différant des premières que par le sens de l'axe principal.

Plaçons l'origine au foyer commun de ces paraboles et prenons pour axe des x la droite dirigée suivant leur axe principal. Elles ont pour équation générale, les unes

$$y^2 = a^2 + 2ax,$$

les autres

$$y^2 = b^2 - 2bx,$$

et pour ordonnées des points où elles se coupent

$$y = \pm \sqrt{a.b}.$$

On trouve, pour les premières

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y}, \quad ds = \frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{a} dy, \quad \rho = \frac{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}, \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{3y}{a}.$$

De là résulte, en remplaçant y^2 par $a.b$,

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} = \pm \frac{3y}{a+b}.$$

Il est visible qu'on trouverait de même, pour les secondes,

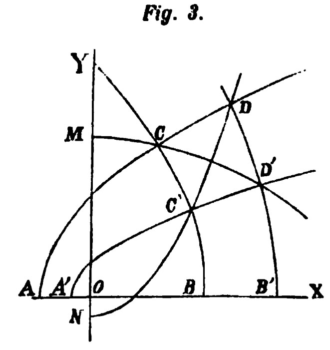
$$\frac{\delta \frac{1}{\rho'}}{\delta \lambda} = \pm \frac{3y}{a+b}.$$

Concluons que ces paraboles constituent un double système de lignes orthogonales satisfaisant à l'équation (18) et remplissant, en conséquence, la condition IV. Ici, d'ailleurs, se manifeste d'elle-même la réciprocité établie entre ces lignes et leurs trajectoires à 45°. Il est clair, en effet, que celles-ci s'obtiennent en faisant tourner les autres d'un angle droit.

Vérifions, en ce qui concerne les paraboles ainsi déterminées, la propriété qu'elles ont de découper le plan qui les contient en quadrilatères rectangles, admettant pour diagonales les trajectoires à 45° de ces mêmes paraboles.

Soit O le foyer commun pris pour origine des coordonnées; ACD, A'C'D', BC'C trois paraboles choisies, comme on veut, les deux premières dans l'un des systèmes considérés, la troisième dans l'autre; MCD' l'une des trajectoires à 45° passant par le point C; D' le point de rencontre de cette trajectoire avec la branche A'C'D'; B'D'D la parabole du système BC'C menée par le point D'; D le point d'intersection des deux branches ACD, B'D'D. Tout se réduit à démontrer que la trajectoire à 45° menée par le point C' et représentée par NC'D passe par le point D.

Fig. 3.



Donnons-nous les équations des paraboles ACD, A'C'D', BC'C, B'D'D et représentons-les respectivement par

$$y^2 = a^2 + 2ax,\quad y^2 = a'^2 + 2a'x,\quad y^2 = b^2 - 2bx,\quad y^2 = b'^2 - 2b'x.$$

On trouve aisément, pour les coordonnées du point C,

$$x = \frac{b-a}{2},\quad y = \sqrt{a.b};$$

pour celles du point C′,

$$x=\frac{b-a'}{2},\quad y=\sqrt{a'.b};$$

pour celles du point D′,

$$x=\frac{b'-a'}{2},\quad y=\sqrt{a'.b'};$$

pour celles du point D,

$$x=\frac{b'-a}{2},\quad y=\sqrt{a.b'}.$$

Soit

$$x^2=m^2-2my,$$

l'équation de la trajectoire MCD′. Cette trajectoire passant par les deux points C, D′, on a

$$\frac{(b-a)^2}{4}=m^2-2m\sqrt{a.b},\quad \frac{(b'-a')^2}{4}=m^2-2m\sqrt{a'.b'},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(26).\quad \frac{(b+a)^2}{4}=[m-\sqrt{a.b}]^2,\quad \frac{(b'+a')^2}{4}=[m-\sqrt{a'.b'}]^2.$$

Les équations (26) déterminent les paramètres m et b' supposés tous deux positifs. Elles donnent, d'abord,

$$m=\frac{b+a}{2}+\sqrt{a.b},\quad \frac{b'+a'}{2}=m-\sqrt{a'.b'}.$$

De là résulte

$$[\sqrt{b}+\sqrt{a}]^2=[\sqrt{b'}+\sqrt{a'}]^2,$$

et, par suite,

$$(27).\quad .\ .\ .\ .\ .\quad \sqrt{b'}=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a'}.$$

Soit

$$x^2 = n^2 + 2ny,$$

l'équation de la trajectoire NC′D. Étant menée par le point C′, son paramètre n est déterminé par l'équation de condition

$$\frac{(b - a')^2}{4} = n^2 + 2n\sqrt{a'.b}.$$

On en déduit, comme tout à l'heure,

$$(28). \quad \ldots\ldots \quad n = \frac{b + a'}{2} - \sqrt{a'.b}.$$

Cela posé, pour que cette trajectoire passe par le point D, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{(b' - a)^2}{4} = n^2 + 2n\sqrt{a.b'},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(29). \quad \ldots\ldots \quad \frac{b' + a}{2} = n + \sqrt{a.b'}.$$

La simultanéité des équations (28) et (29) donne

$$\frac{b' + a}{2} - \sqrt{a.b'} = \frac{b + a'}{2} - \sqrt{a'.b},$$

et, par suite (b' étant plus grand que b, et a plus grand que a')

$$(30). \quad \ldots\ldots \quad \sqrt{b'} - \sqrt{a} = \sqrt{b} - \sqrt{a'}. \ldots$$

La concordance des équations (27) et (30) fournit la vérification cherchée.

Passons des paraboles aux autres sections coniques. On reconnaît immédiatement, par la construction des tangentes, qu'un

système quelconque d'ellipses homofocales a pour trajectoires orthogonales, les hyperboles ayant les mêmes foyers que ces ellipses.

Soit

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - c^2} = 1,$$

l'équation générale des lignes du premier système. On a pour celle du second

$$\frac{x^2}{v^2} - \frac{y^2}{v^2 - c^2} = 1,$$

la quantité c étant constante et la même, de part et d'autre.

Considérons un point quelconque où viennent se couper l'une des ellipses et sa trajectoire orthogonale. On trouve aisément pour les coordonnées de ce point

$$x = \frac{\mu . v}{c}, \quad c^2 y^2 = (\mu^2 - c^2)(v^2 - c^2),$$

et, par suite,

$$(31)\ldots\ldots \quad \frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} = \frac{3c^2 xy}{(\mu^2 - v^2)^3} = \frac{\delta \frac{1}{\rho'}}{\delta \lambda},$$

le rayon ρ, l'arc s et la caractéristique d s'appliquant à l'ellipse, le rayon ρ', l'arc λ et la caractéristique δ à l'hyperbole correspondante.

L'équation (31) montre que le double système des lignes orthogonales formé par les ellipses et les hyperboles de mêmes foyers remplit la condition IV. Ces lignes permettent, en conséquence, de découper leur plan en quadrilatères rectangles admettant pour diagonales leurs trajectoires à 45°.

Revenons au cas général des lignes planes et indiquons une dernière application.

Supposons les lignes s *isothermes*. Le flux de chaleur y est proportionnel en chaque point au quotient $\frac{ds}{\delta \lambda}$, et ce quotient doit

pouvoir rester le même, non-seulement d'un point à un autre d'une même ligne *s*, mais, en outre, dans le passage d'une quelconque de ces lignes aux suivantes. Cela revient à dire que si l'on se donne *à priori* les équations (13) (ce qu'on est toujours maître de faire), il faut que l'équation (12) en résulte.

On déduit de là l'énoncé suivant :

Pour qu'une suite de lignes situées dans un même plan soient isothermes, il faut et il suffit qu'elles fassent partie d'un double système orthogonal satisfaisant à l'équation

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} = \pm \frac{\delta\frac{1}{\rho'}}{\delta\lambda}.$$

Cet énoncé revient à celui que M. Ossian Bonnet * a formulé comme expression équivalente d'un théorème de M. Bertrand **. Nous croyons pouvoir le compléter en y ajoutant ce corollaire :

Lorsqu'une suite de lignes situées dans un même plan sont isothermes, il en est de même non-seulement de leurs trajectoires orthogonales, mais, en outre, de chacun des systèmes formés par leurs trajectoires à 45°.

* Voir le mémoire déjà cité (page 48).

** *Journal de mathématiques pures et appliquées*, tome XI, année 1844, page 126.

FIN DE L'APPENDICE A LA TROISIÈME PARTIE

et

DU TOME SECOND.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME PARTIE.

PREMIÈRE SÉRIE.

APPLICATIONS ANALYTIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.

EXPOSÉ DES THÉORÈMES FONDAMENTAUX.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS PARTICULIÈRES.

CHAPITRE III.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES.

CHAPITRE IV.

DE LA CONTINUITÉ CONSIDÉRÉE DANS SES RAPPORTS AVEC LA CONVERGENCE DES SÉRIES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN.

CHAPITRE V.

DES MAXIMA ET MINIMA.

CHAPITRE VI.

EMPLOI DES IMAGINAIRES DANS L'ANALYSE.

NOTES.

DEUXIÈME SÉRIE.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE PREMIER.

GÉNÉRALITÉS.

CHAPITRE II

THÉORIE DES TANGENTES.

CHAPITRE III.

RECTIFICATIONS ET QUADRATURES EN GÉOMÉTRIE PLANE.

CHAPITRE IV.

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'OSCULATION DES COURBES PLANES.

CHAPITRE V.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ENVELOPPES EN GÉOMÉTRIE PLANE.

CHAPITRE VI.

DES POINTS SINGULIERS EN GÉOMÉTRIE PLANE.

CHAPITRE VII.

THÉORIE GÉNÉRALE DES CONTACTS DE TOUS LES ORDRES.

NOTE *A*.

CHAPITRE VIII.

COURBES A DOUBLE COURBURE.

CHAPITRE IX.

DES SURFACES.

CHAPITRE X.

COURBURE DES SURFACES.

CHAPITRE XI.

APPLICATIONS GÉNÉRALES CONCERNANT LES SURFACES.

CHAPITRE XII.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES LIGNES GÉODÉSIQUES.

CHAPITRE XIII.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES SURFACES APPLICABLES L'UNE SUR L'AUTRE SANS DÉCHIRURE NI DUPLICATURE.

CHAPITRE XIV.

RECTIFICATIONS ET QUADRATURES DANS L'ESPACE. — CUBATURES.

APPENDICE AU N° 229 DU CHAPITRE XII.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.